

Využití obyčejných diferenciálních rovnic v praxi

Peter Hornák

Bakalářská práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Fakulta aplikované informatiky

akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Peter Hornák**

Osobní číslo: **A11104**

Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**

Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**

Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Využití obyčejných diferenciálních rovnic v praxi**

Zásady pro vypracování:

1. Uveďte základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.
2. Popište metody řešení vybraných typů obyčejných diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu.
3. K vybraným typům obyčejných diferenciálních rovnic najděte vhodné aplikace v různých vědních disciplínách, zejména ve fyzice, chemii, biologii a ekonomii.
4. Jednotlivé aplikace podrobně vyřešte užitím vhodných metod.
5. Uveďte několik neřešených aplikačních úloh, včetně výsledků.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BRONSON, Gabriel B a Gabriel COSTA.** Schaum's outline of differential equations. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN 00-714-5687-2.
2. **NAGY, Jozef.** Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983. ISBN 04-015-83.
3. **BEZÁKOVÁ, Anna.** Diferenciálne rovnice. Zvolen: MAT-CENTRUM, 2001. ISBN 80-968057-9-7.
4. **ELIAŠ, Jozef, Ján HORVÁTH a Juraj KAJAN.** Zbierka úloh z vyššej matematiky: 3. časť. Bratislava: Alfa, 1980. ISBN 63-230-79.
5. **REKTORYS, Karel.,** Přehled použité matematiky, 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-719-6179-5.

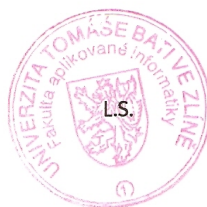
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **28. února 2014**

Termín odevzdání bakalářské práce: **13. června 2014**

Ve Zlíně dne 28. února 2014


prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan




prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- Že odevzdaná verze diplomové/bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce je ukázať použitie obyčajných diferenciálnych rovníc v praxi. Hlavná pozornosť bude venovaná aplikáciám obyčajných diferenciálnych rovníc 1. a 2. rádu v rôznych vedných disciplínach, najmä vo fyzike, chémii, biológii, ekonómii a pod. Práca bude slúžiť ako podporný materiál poslucháčom FAI UTB ve Zlíně pri štúdiu predmetu Diferenciální rovnice.

Klíčová slova: matematika, obyčajná diferenciálna rovnica, aplikácie, fyzika, chémia, biológia, ekonómia, metóda variácie konštanty, metóda neurčitých koeficientov

ABSTRACT

The purpose of this bachelor thesis is to show use of ordinary differential equations in practise. The main attention is given to applications of the first and the second order ordinary differential equations in various fields of sciences, mainly in physics, chemistry, biology, economics etc. This thesis can be used as a support material for students at the FAI TBU in Zlín of the course Differential equations.

Keywords: mathematics, ordinary differential equation, applications, physics, chemistry, biology, economics, variation of parameter, the method of undetermined coefficients

Touto cestou by som sa chcel poďakovať pani Mgr. Jane Řezníčkovéj, Ph.D. za cenné rady, informácie a čas, ktorý mi venovala pri konzultáciach ohľadom tejto bakalárskej práce.

Obsah

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČASŤ	9
1 TEÓRIA DIFERENCIÁLYCH ROVNÍC	11
2 ODR PRVÉHO RÁDU	12
2.1 PRIAMO INTEGROVATEĽNÁ ODR.....	12
2.2 SEPAROVATEĽNÁ ODR	13
2.3 LINEÁRNA ODR PRVÉHO RÁDU	14
2.4 BERNOULLIHO ROVNICA	15
3 ODR VYŠŠIEHO RÁDU	17
3.1 LINEÁRNA ODR n -TÉHO RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI	17
3.2 LINEÁRNA ODR 2. RÁDU S KONŠTANTNÝMI KOEFICIENTAMI	18
II PRAKTICKÁ ČASŤ	20
4 PRÍKLADY Z FYZIKY	22
4.1 NEWTONOV OCHLADZOVACÍ ZÁKON.....	22
4.2 OHYB NOSNÍKU	23
4.3 VOLŇÝ PÁD S AERODYNAMICKÝM ODPOROM VZDUCHU	25
5 PRÍKLADY Z ELEKTRONIKY	31
5.1 RC OBVOD.....	31
5.2 RL OBVOD	34
6 PRÍKLADY Z BIOLÓGIE	38
6.1 ROZMNOŽOVANIE BAKTÉRIÍ	38
6.2 NAKAZENÉ MYŠI.....	39
6.3 VÝVOJ ĽUDSKEJ POPULÁCIE.....	42
7 PRÍKLADY Z CHÉMIE	44
7.1 CHEMICKÁ REAKCIA	44
7.2 ZMIEŠAVANIE.....	45
8 PRÍKLADY Z EKONOMIKY	47
8.1 SPOJITÉ ÚROKOVANIE 1	47
8.2 SPOJITÉ ÚROKOVANIE 2	47
9 NERIEŠENÉ PRÍKLADY ODR 1. RÁDU	50
10 APLIKÁCIE ODR 2. RÁDU	52
10.1 NETLMENÝ HARMONICKÝ POHYB.....	52

10.2	TLMENÝ HARMONICKÝ POHYB.....	55
10.3	VYNÚTENÉ KMITY	61
10.4	PADAJÚCA RETAZ.....	65
10.5	PLÁVAJÚCE TELESO	68
10.6	RLC OBVOD	70
11	NERIEŠENÉ PRÍKLADY ODR 2. RÁDU	75
	ZÁVER	76
	ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY.....	77
	ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK.....	79
	ZOZNAM OBRÁZKOV	80
	ZOZNAM PRÍLOH	81

ÚVOD

Predložená bakalárska práca je zameraná na aplikácie obyčajných diferenciálnych rovníc prvého a druhého rádu. Diferenciálne rovnice majú uplatnenie v mnohých odvetviach, napríklad technických, spoločenských, ekonomických a iných.

V teoretickej časti práce sú uvedené základne pojmy z teórie diferenciálnych rovníc, následne sú vysvetlené postupy riešení jednotlivých typov diferenciálnych rovníc prvého a druhého rádu, ktoré sa vyskytujú v praktických príkladoch. V praktickej časti sa nachádzajú aplikácie obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu z oblasti fyziky, elektroniky, biológie, chémie a ekonomiky. Z aplikácií obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu je práca, popri aplikáciach v rôznych odvetviach, zameraná najmä na problematiku kmitania telesa na pružine, či už ide o pohyb netlmený alebo o rôzne prípady tlmeného pohybu. Sú tiež uvedené situácie, keď na teleso pôsobí konštantná, prípadne periodicky sa meniaca vonkajšia sila.

K pochopeniu obsahu bakalárskej práce sú potrebné znalosti diferenciálneho a integrálneho počtu funkcie jednej premennej.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 TEÓRIA DIFERENCIÁLYCH ROVNÍC

Diferenciálna rovnica je taká rovnica, ktorej neznámou je funkcia a v ktorej sa vyskytujú derivácie tejto neznámej funkcie.

Obyčajná diferenciálna rovnica (ďalej iba ODR) je taká diferenciálna rovnica, ktorej neznámou je funkcia jednej premennej a v ktorej sa vyskytujú derivácie tejto neznámej funkcie.

Parciálna diferenciálna rovnica je taká diferenciálna rovnica, ktorej neznámou je funkcia dvoch alebo viacej premenných a v ktorej sa vyskytujú parciálne derivácie tejto neznámej funkcie.

Rád diferenciálnej rovnice nazývame rád najvyššej derivácie hľadanej funkcie.

2 ODR PRVÉHO RÁDU

Definícia 2.1 Obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu je rovnica v tvare

$$F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0 \quad (1)$$

alebo v prípade, že je rozriešená vzhľadom k $\frac{dy(x)}{dx}$, v tvare

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

Riešením (integrálom) diferenciálnej rovnice (1) na intervale I nazveme každú funkciu $f(x)$, ktorá má na danom intervale I deriváciu a vyhovuje diferenciálnej rovnici (1), teda platí

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}\right) = 0.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1) obsahuje neurčitú konštantu $C \in \mathbb{R}$ a je možné ho zapísať do tvaru

$$y = \varphi(x, C).$$

Dosadením konkrétnej hodnoty za neurčitú konštantu C dostaneme **partikulárne riešenie** y_P danej diferenciálnej rovnice.

Počiatočnú (Cauchyho) úlohu pre ODR prvého rádu nazývame úlohu nájsť také riešenie rovnice (1), ktoré bude spĺňať počiatočnú podmienku

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

2.1 Priamo integrovateľná ODR

Definícia 2.2 ODR v tvare

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x),$$

kde $f(x)$ je spojitá funkcia na otvorenom intervale I , je **ODR priamo integrovateľná**.

POSTUP RIEŠENIA

Diferenciálne rovnice tohto typu sa riešia priamou integráciou

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= f(x), \\ \int dy(x) &= \int f(x) dx, \end{aligned}$$

$$y(x) + C_1 = \int f(x) dx + C_2,$$

kde C_1, C_2 sú integračné konštanty a platí $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Keďže sčítaním (odčítaním) ľubovoľných konštánt z množiny reálnych čísel dostaneme opäť konštantu z množiny reálnych čísel, môžeme integračnú konštantu uvádzať iba na jednej strane rovnice. V praktickej časti je vo výpočtoch po zintegrovaní oboch strán rovnice uvádzaná iba jedna integračná konštanta. Všeobecné riešenie potom bude mať tvar

$$y(x) = \int f(x) dx + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Toto riešenie sa nazýva všeobecným riešením ODR, ktoré zahŕňa ne-konečne veľa partikulárnych riešení.

2.2 Separovateľná ODR

Definícia 2.3 ODR v tvare

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y),$$

kde $f(x)$ a $g(y)$ sú spojité funkcie na otvorenom intervale I , je **ODR so separovateľnými premennými**.

POSTUP RIEŠENIA

Separovateľné ODR riešime metódou separácie premenných. V prvom kroku upravíme diferenciálnu rovnicu tak, aby na každej strane rovnice bola iba jedna premenná. Za predpokladu, že $g(y) \neq 0$, dostávame

$$\frac{1}{g(y)} dy(x) = f(x) dx.$$

Ľavú stranu rovnice zintegrujeme podľa premennej y , pravú podľa x a dostaneme

$$\int \frac{1}{g(y)} dy(x) = \int f(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Teraz sa vrátime k prípadu $g(y) = 0$. Riešením sú konštantné funkcie, ktoré sú súčasne riešením danej rovnice, a preto ich pripíšeme k všeobecnému riešeniu alebo ich zahrnieme do všeobecného riešenia vhodnou voľbou konštanty C .

2.3 Lineárna ODR prvého rádu

Definícia 2.4 Máme ODR v tvare

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)y(x) + g(x), \quad (2)$$

kde $f(x), g(x)$ sú spojité funkcie na otvorenom intervale I . Pokiaľ je funkcia $g(x)$ aspoň v jednom bode intervalu I nenulová, jedná sa o **nehomogénnu lineárnu ODR prvého rádu**. Pokiaľ je funkcia $g(x)$ na celom intervale I nulová, hovoríme o **homogénnej lineárnej ODR prvého rádu**.

POSTUP RIEŠENIA

Všeobecné riešenie rovnice (2) nájdeme pomocou metódy variácie konštánt. Najprv rovnicu (2) zhomogenizujeme (položíme $g(x) = 0$)

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)y(x) \quad (3)$$

a nájdeme jej všeobecné riešenie y_H metódou separácie premenných

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(x)} dy(x) &= f(x) dx, \\ \int \frac{1}{y(x)} dy(x) &= \int f(x) dx, \\ \ln |y(x)| &= \int f(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |y(x)| &= e^{\int f(x) dx + C}, \\ |y(x)| &= e^C e^{\int f(x) dx}. \end{aligned}$$

Keďže výsledkom umocnenia Eulerového čísla e ľubovoľnou konštantou C bude vždy kladná konštanta, môžeme vykonať náhradu e^C znakom konštanty C , kde $C > 0$. Po odstránení absolútnej hodnoty z ľavej strany posledného uvedeného vzťahu (s prihliadnutím, že $y(x) = 0$ je konštantným riešením pre $C = 0$) platí $C \in \mathbb{R}$. Táto úprava je využívaná v ďalších častiach práce.

$$y_H(x) = Ce^{\int f(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Dostali sme všeobecné riešenie homogénnej lineárnej ODR (3). Predpokladáme, že riešenie rovnice (2) má tvar (4), kde C je určitá funkcia premennej x , teda

$$y(x) = C(x)e^{\int f(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Toto riešenie zderivujeme

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{\int f(x) dx} + C(x)f(x)e^{\int f(x) dx}$$

a dosadíme spolu s riešením (5) do pôvodnej rovnice (2)

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{\int f(x) dx} + C(x)f(x)e^{\int f(x) dx} = f(x)C(x)e^{\int f(x) dx} + g(x).$$

Odčítame od seba členy obsahujúce $C(x)$ a rovnicu upravíme

$$\begin{aligned}\frac{dC(x)}{dx} e^{\int f(x) dx} &= g(x), \\ \frac{dC(x)}{dx} &= g(x)e^{-\int f(x) dx}.\end{aligned}$$

Po zintegrovaní vyjadrenú funkciu $C(x)$

$$C(x) = \int g(x)e^{-\int f(x) dx} dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

dosadíme do rovnice (5) a dostaneme všeobecné riešenie lineárnej ODR prvého rádu

$$y(x) = \left(\int g(x)e^{-\int f(x) dx} dx + C \right) e^{\int f(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.4 Bernoulliho rovnica

Definícia 2.5 ODR v tvare

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)y(x) + g(x)y^r(x), \quad (6)$$

kde $f(x)$ a $g(x)$ sú spojité funkcie na otvorenom intervale I , pričom $g(x) \neq 0$ pre každé $x \in I$ a $r \neq 0 \wedge r \neq 1$, je **Bernoulliho rovnica**.

POSTUP RIEŠENIA

Pri riešení Bernoulliho rovnice zavedieme na začiatku substitúciu

$$z(x) = y^{1-r}(x), \quad (7)$$

ktorú následne zderivujeme

$$\frac{dz(x)}{dx} = (1-r)y^{-r}(x)\frac{dy(x)}{dx}.$$

Deriváciu $\frac{dy(x)}{dx}$ nahradíme z rovnice (6) a upravíme

$$\begin{aligned}\frac{dz(x)}{dx} &= (1-r)y^{-r}(x)[f(x)y(x) + g(x)y^r(x)], \\ \frac{dz(x)}{dx} &= (1-r)f(x)y^{1-r}(x) + (1-r)g(x), \\ \frac{dz(x)}{dx} &= (1-r)f(x)z(x) + (1-r)g(x).\end{aligned}$$

Dostali sme lineárnu ODR prvého rádu s premennými x, z . Nájdeme všeobecné riešenie $z(x)$

$$z(x) = \left(\int (1-r)g(x)e^{-\int (1-r)f(x) dx} dx + C \right) e^{\int (1-r)f(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

ktoré následne nahradíme podľa substitúcie (7)

$$y^{1-r}(x) = \left(\int (1-r) g(x) e^{-\int (1-r)f(x) dx} dx + C \right) e^{\int (1-r)f(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z predchádzajúceho vzťahu nakoniec vyjadríme $y(x)$ ako všeobecné riešenie Bernoulliho rovnice. Pokiaľ $r > 0$, má Bernoulliho rovnica tiež riešenie $y(x) \equiv 0$.

3 ODR VYŠŠIEHO RÁDU

Definícia 3.1 Obyčajná diferenciálna rovnica n -tého rádu je rovnica v tvare

$$F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right) = 0 \quad (8)$$

alebo v prípade, že je rozriešená vzhľadom k najvyššej derivácii, v tvare

$$\frac{d^ny(x)}{dx^n} = f\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

Riešením (integrálom) diferenciálnej rovnice (8) na intervale I nazveme každú funkciu $f(x)$, ktorá má na danom intervale I všetkých n derivácií a vyhovuje diferenciálnej rovnici (8), teda platí

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{d^nf(x)}{dx^n}\right) = 0.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (8) obsahuje n neurčitých konštánt $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ a môžeme ho zapísať v tvare

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Dosadením konkrétnych hodnôt za neurčité konštanty $C_1, C_2, \dots, C_n$ dostaneme **partikulárne riešenie** y_P danej diferenciálnej rovnice.

Počiatočnú (Cauchyho) úlohu pre ODR n -tého rádu nazývame úlohu nájsť také riešenie rovnice (8), ktoré bude spĺňať počiatočné podmienky

$$y(x_0) = y_0, \quad \frac{dy(x_0)}{dx} = y_1, \quad \dots, \quad \frac{dy^{n-1}(x_0)}{dx^{n-1}} = y_{n-1}, \quad x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

3.1 Lineárna ODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami

Definícia 3.2 Jedná sa o rovnicu v tvare

$$a_n \frac{d^ny(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = f(x),$$

kde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ a $f(x)$ je spojitá funkcia na otvorenom intervale I . Pokiaľ je funkcia $f(x)$ aspoň v jednom bode intervalu I nenulová, jedná sa o **nehomogénnu lineárnu ODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami**. Pokiaľ je funkcia $f(x)$ na celom intervale I nulová, hovoríme o **homogénnej lineárnej ODR n -tého rádu s konštantnými koeficientami**.

Vzhľadom k tomu, že v praktickej časti riešime diferenciálne rovnice do druhého rádu, uvedieme v nasledujúcej časti len vlastnosti lineárnej ODR druhého rádu s konštantnými koeficientami.

3.2 Lineárna ODR 2. rádu s konštantnými koeficientami

Definícia 3.3 Rovnica typu

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = f(x), \quad (9)$$

kde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$ a $f(x)$ je spojitá a nenulová funkcia na otvorenom intervale I , sa nazýva **nehomogénna lineárna ODR 2. rádu s konštantnými koeficientami**. Pokiaľ je funkcia $f(x)$ na celom intervale I nulová, hovoríme o **homogénnej lineárnej ODR 2. rádu s konštantnými koeficientami**, ktorá má tvar

$$a_2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = 0. \quad (10)$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (9) je v tvare

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x),$$

kde $y_H(x)$ je všeobecné riešenie zhomogenizovaného tvaru diferenciálnej rovnice (9) (teda rovnice (10)) a $y_P(x)$ je ľubovoľné partikulárne riešenie tejto rovnice.

POSTUP RIEŠENIA

1. Nájďme všeobecné riešenie y_H rovnice (10). K rovnici zostavíme tzv. **charakteristickú rovnicu**, čo je kvadratická rovnica s neznámou λ , ktorá vznikne z rovnice (10) nahradením $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lambda^2$, $\frac{dy(x)}{dx} = \lambda$ a $y(x) = \lambda^0$, teda

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (11)$$

Táto charakteristická rovnica má korene $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$. Môžu nastať nasledujúce tri prípady:

$$(i) \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Charakteristická rovnica má dva rôzne reálne korene. Všeobecné riešenie rovnice (10) je v tvare

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Charakteristická rovnica má dvojnásobný reálny koreň. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad \lambda_{1,2} = a \pm ib \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Charakteristická rovnica má dva komplexne združené korene. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y_H(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pre výpočet partikulárneho riešenia y_P použijeme **metódu neurčitých koeficientov**. Ak pravá strana rovnice (9) má tvar

$$(i) \quad f(x) = P_n(x),$$

kde $P_n(x)$ je polynóm n -tého stupňa, tak partikulárne riešenie bude mať tvar

$$y_P = x^k \bar{P}_n(x),$$

kde $k \geq 0$ udáva, koľko koreňov charakteristickej rovnice (11) je rovných 0, a $\bar{P}_n(x)$ je polynóm s neurčitými koeficientami rovnakého stupňa ako polynóm $P_n(x)$. Partikulárne riešenie y_P môžeme teda rozpísať do tvaru

$$y_P = x^k (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n), \quad A_0, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad f(x) = e^{ax} P_n(x),$$

kde a je reálne číslo a $P_n(x)$ je polynóm n -tého stupňa, tak partikulárne riešenie bude mať tvar

$$y_P = x^k e^{ax} \bar{P}_n(x),$$

kde $k \geq 0$ udáva, koľko koreňov charakteristickej rovnice (11) je rovných číslu a , a $\bar{P}_n(x)$ je polynóm s neurčitými koeficientami rovnakého stupňa ako polynóm $P_n(x)$.

$$(iii) \quad f(x) = e^{ax} [M_m(x) \cos bx + N_n(x) \sin bx],$$

kde a, b sú reálne čísla, $M(x)$ je polynóm m -tého stupňa a $N(x)$ je polynóm n -tého stupňa, tak partikulárne riešenie bude mať tvar

$$y_P = x^k e^{ax} [\bar{M}_s(x) \cos bx + \bar{N}_s(x) \sin bx],$$

kde $k \geq 0$ udáva, koľko koreňov charakteristickej rovnice (11) je rovných $a \pm ib$, a $\bar{M}_s(x), \bar{N}_s(x)$ sú polynómy s -tého stupňa, kde s je väčšie z čísiel m, n .

3. Zapišeme všeobecné riešenie rovnice (9) v tvare

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x).$$

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [2], [3], [4], [5], [13].

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

4 PRÍKLADY Z FYZIKY

4.1 Newtonov ochladzovací zákon

Príklad 4.1 Pizza po vytiahnutí z pece mala teplotu 150°C . Za 5 minút ochladla na 85°C . Vypočítajte, akú teplotu bude mať pizza po 10 minútach, ak teplota v miestnosti je 22°C . Rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu aktuálnej teploty pizze a teploty okolia.

Podľa zadania zostavíme diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_O),$$

$T(t)$ je teplota pizze v čase t , T_O je teplota okolitého prostredia a k je konštanta úmernosti. Záporné znamienko pri konštante úmernosti k je z dôvodu, že teplota pizze s narastajúcim časom klesá. Diferenciálnu rovnicu vyriešime metódou separácie premenných

$$\begin{aligned}\frac{1}{T(t) - T_O} dT(t) &= -k dt, \\ \int \frac{1}{T(t) - T_O} dT(t) &= - \int k dt, \\ \ln |T(t) - T_O| &= -kt + C, \quad C > 0, \\ T(t) - T_O &= Ce^{-kt}, \\ T(t) &= T_O + Ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Za T_O dosadíme teplotu okolia, čiže 22°C

$$T(t) = 22 + Ce^{-kt}. \quad (12)$$

Na začiatku časového intervalu, čiže po vytiahnutí pizze z pece, mala pizza teplotu 150°C . Aby sme určili integračnú konštantu C , dosadíme do všeobecného riešenia (12) prvú podmienku $T(0) = 150$

$$\begin{aligned}150 &= 22 + Ce^{-k \cdot 0}, \\ 150 &= 22 + C, \\ C &= 128.\end{aligned}$$

Vyjadrenú integračnú konštantu dosadíme do rovnice (12)

$$T(t) = 22 + 128e^{-kt}. \quad (13)$$

Integračnú konštantu k určíme pomocou druhej podmienky, z ktorej vieme, že teplota pizze po piatich minútach bola 85°C . Matematický zápis tejto podmienky má tvar $T(5) = 85$. Po dosadení si vyjadríme konštantu k

$$\begin{aligned}
 85 &= 22 + 128e^{-k \cdot 5}, \\
 e^{-5k} &= \frac{63}{128}, \\
 -5k &= \ln\left(\frac{63}{128}\right), \\
 k &= -\frac{\ln\left(\frac{63}{128}\right)}{5} \doteq 0,1418,
 \end{aligned}$$

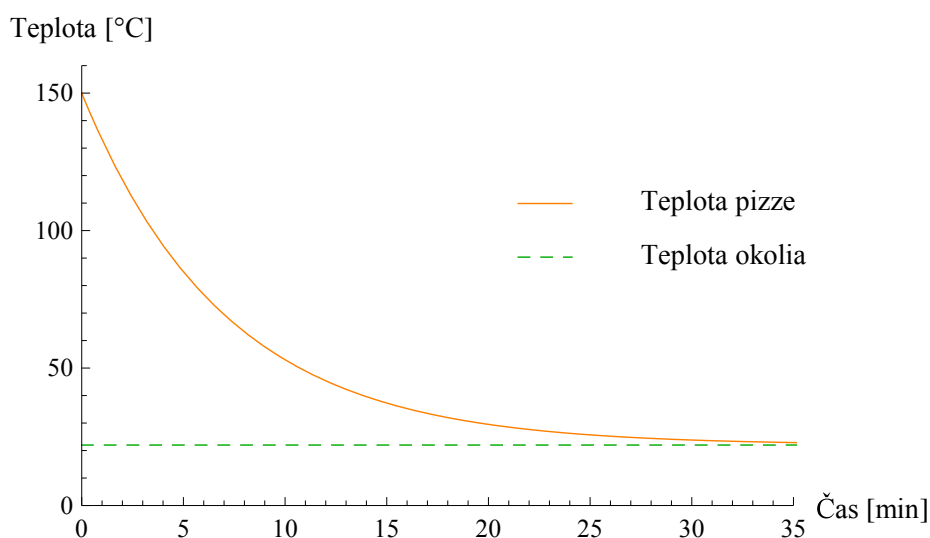
ktorú dosadíme do rovnice (13) a dostaneme funkciu popisujúcu závislosť teploty pizze na čase

$$T(t) = 22 + 128e^{-0,1418t}.$$

Aby sme zistili teplotu pizze po desiatich minútach, dosadíme za čas $t = 10$

$$T(10) = 22 + 128e^{-0,1418 \cdot 10} \doteq \underline{53}.$$

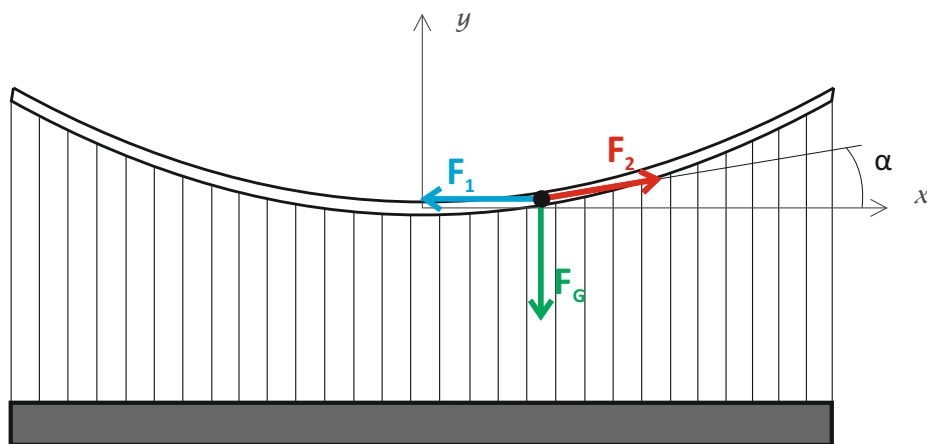
Teplota pizze po desiatich minútach od vytiahnutia z pece je približne 53 °C.



Obr. 4.1.1. Časový priebeh teploty pizze

4.2 Ohyb nosníku

Príklad 4.2 Určite tvar krivky nosného lana o dĺžke l , na ktorom je zavesený most. Hmotnosť nosného lana vzhľadom k hmotnosti vozovky zanedbajte a predpokladajte, že zaťaženie je rovnomerne rozložené po dĺžke lana v horizontálnej priamke.



Obr. 4.2.1. Most s nosným lanom

Za začiatok súradnicového systému ($x = 0, y = 0$) si zvolíme miesto najnižšej polohy lana. Medzi počiatkom a obecným bodom $[x, y]$, nachádzajúcim sa na lane, pôsobí gravitačná sila $F_G = \frac{mg}{l} x$, kde m celková hmotnosť mostu, l je celková dĺžka lana, g je gravitačné zrýchlenie, a dve ťahové sily F_1 a F_2 . Sila F_1 má smer rovnobežný s horizontálnou súradnicovou osou (os x) a sila F_2 má smer dotýčnice v danom bode pôsobenia. Smernica tejto dotýčnice je daná deriváciou hľadanej funkcie $y(x)$, ktorá popisuje tvar nosného lana. Po rozpísaní do zložiek má sila F_2 tvar

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha, \quad (14)$$

kde α je uhol, ktorý lano zvierá s horizontálnou osou. Keďže je lano v rovnovážnom stave, platí, že výslednica síl pôsobiacich na lano je nulová. V smere osi x musí byť nulový súčet sily F_1 a x -ová zložka sily F_2

$$F_1 + F_{2x} = 0.$$

V smere osy y sa musí vyrovnať gravitačná sila F_G vertikálnej zložke sily F_2

$$F_G + F_{2y} = 0.$$

Zložky sily F_2 nahradíme podľa vzťahov (14)

$$F_1 + F_2 \cos \alpha = 0,$$

$$F_G + F_2 \sin \alpha = 0.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme silu F_2 a dosadíme ju do druhej rovnice. Dostaneme

$$F_G - \frac{F_1}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_G}{F_1}.$$

Po úprave

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mg}{lF_1} x \quad (15)$$

Keďže $\operatorname{tg} \alpha$ vyjadruje smernicu dotyčnice v danom bode, môžeme zapísať $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy(x)}{dx}$. Po dosadení do rovnice (15) dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{mg}{lF_1} x.$$

Zintegrujeme

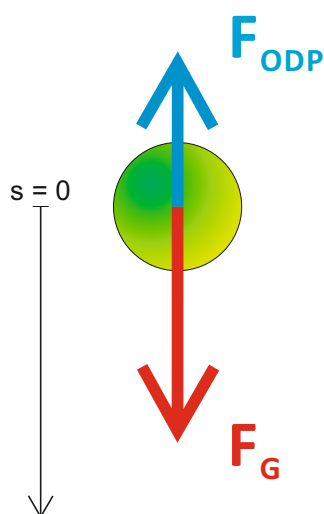
$$\begin{aligned} \int dy(x) &= \int \frac{mg}{lF_1} x dx, \\ y(x) &= \frac{mg}{2lF_1} x^2 + C, \quad C \geq 0. \end{aligned}$$

Lano bude mať tvar paraboly. Funkčná hodnota v bode $x = 0$ má hodnotu $y(0) = 0$. Po dosadení danej počiatočnej podmienky zistíme, že konštanta C je nulová. Výsledná parabola popisujúca tvar prehnutia nosného lana má tvar

$$y(x) = \frac{mg}{2lF_1} x^2.$$

4.3 Voľný pád s aerodynamickým odporom vzduchu

Príklad 4.3 Guľa s polomerom 5 centimetrov a hmotnosťou 1 kg bola upustená s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Guľa padá voľným pádom v prostredí o hustote $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Koeficient odporu gule $C_x = 0,5$. Aká veľká je hraničná rýchlosť, ktorú by mohla guľa dosiahnuť a akú dráhu prejde za 10 sekúnd, keď berieme do úvahy aerodynamický odpor vzduchu?



Obr. 4.3.1. Padajúca guľa

Na těleso působí v směru jeho pohybu gravitační síla, proti které působí odporová síla vzduchu. Rovnice popisující tento případ bude mít tvar

$$F(t) = F_G - F_{ODP}(t),$$

kde $F(t)$ prepíšeme podle Newtonova zákona síly, F_G je součin hmotnosti a gravitačního zrychlení a F_{ODP} prepíšeme podle vztahu pro aerodynamický odpor, který tvrdí, že velikost odporové síly je polovica součinu součinitele odporu, hustoty vzduchu, velikosti čelní plochy a kvadrátu okamžité rychlosti. Po nahrazení vztahů pro jednotlivé síly dostaneme diferenciální rovnici v tvaru

$$ma(t) = mg - \frac{1}{2}C_x\sigma S v^2(t). \quad (16)$$

Zrychlení je derivací rychlosti podle času, takže vykonáme úpravu $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ a vyjádříme si závislost rychlosti na čase

$$\begin{aligned} m \frac{dv(t)}{dt} &= mg - \frac{1}{2}C_x\sigma S v^2(t), \\ \frac{dv(t)}{dt} &= g - \frac{C_x\sigma S}{2m} v^2(t). \end{aligned}$$

Pro lepší přehlednost výpočtů označíme $k = \frac{C_x\sigma S}{2m}$ a rovnici vyřešíme

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= g - kv^2(t), \\ \frac{1}{g - kv^2(t)} dv(t) &= dt, \\ \int \frac{1}{g - kv^2(t)} dv(t) &= \int dt, \\ \int \frac{1}{g - kv^2(t)} dv(t) &= t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Zlomok $\frac{1}{g - kv^2(t)}$ rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{g - kv^2(t)} = \frac{1}{(\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t))(\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t))}.$$

Pravou stranu rovnice rozložíme na dva zlomky

$$\frac{1}{g - kv^2(t)} = \frac{A}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} + \frac{B}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)}. \quad (18)$$

Určíme koeficienty A a B

$$1 = A(\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)) + B(\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)).$$

$$\begin{aligned}
v(t) : \quad 0 &= A\sqrt{k} - B\sqrt{k} \Rightarrow A = B. \\
v^0(t) : \quad 1 &= A\sqrt{g} + B\sqrt{g}, \\
1 &= B\sqrt{g} + B\sqrt{g} \Rightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{g}} = A.
\end{aligned}$$

Koeficienty A a B dosadíme do rovnice (18)

$$\frac{1}{g - kv^2(t)} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)} \right). \quad (19)$$

Pôvodný zlomok rovnice (17) nahradíme jeho parciálnym rozkladom (19) a pokračujeme vo výpočte

$$\begin{aligned}
& \int \left(\frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)} \right) \right) dv(t) = t + C, \\
& \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(\int \frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} dv(t) + \int \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)} dv(t) \right) = t + C, \\
& \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} dv(t) + \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)} dv(t) \right) = t + C, \\
& \frac{1}{2\sqrt{g}} \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} \ln |\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)| + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln |\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)| \right) = t + C, \\
& \frac{1}{2\sqrt{gk}} \left(\ln |\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)| - \ln |\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)| \right) = t + C, \\
& \ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} \right| = 2\sqrt{gk}t + C. \quad (20)
\end{aligned}$$

Uuríme si konštantu C . Vieme, že teleso začalo padať s nulovou počiatkovou rýchlosťou, takže do (20) môžeme dosadiť $v(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k} \cdot 0}{\sqrt{g} - \sqrt{k} \cdot 0} \right| &= 2\sqrt{gk} \cdot 0 + C, \\
\ln |1| &= C, \\
C &= 0.
\end{aligned}$$

Vyčíslenú konštantu C dosadíme do rovnice (20) a pokračujeme vo vyjadrovaní $v(t)$

$$\begin{aligned}
\ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} \right| &= 2\sqrt{gk}t, \\
\frac{\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t)} &= e^{2\sqrt{gk}t}, \\
\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t) &= \left(\sqrt{g} - \sqrt{k}v(t) \right) e^{2\sqrt{gk}t}, \\
\sqrt{g} + \sqrt{k}v(t) &= \sqrt{g}e^{2\sqrt{gk}t} - \sqrt{k}v(t)e^{2\sqrt{gk}t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{k}v(t) + \sqrt{k}v(t)e^{2\sqrt{gkt}} &= \sqrt{g}e^{2\sqrt{gkt}} - \sqrt{g}, \\
\sqrt{k}v(t) \left(1 + e^{2\sqrt{gkt}}\right) &= \sqrt{g} \left(e^{2\sqrt{gkt}} - 1\right), \\
\sqrt{k}v(t) &= \sqrt{g} \left(\frac{e^{2\sqrt{gkt}} - 1}{e^{2\sqrt{gkt}} + 1}\right), \\
\sqrt{k}v(t) &= \sqrt{g} \left(\frac{e^{2\sqrt{gkt}} - 1 + 2 - 2}{e^{2\sqrt{gkt}} + 1}\right), \\
\sqrt{k}v(t) &= \sqrt{g} \left(\frac{e^{2\sqrt{gkt}} + 1}{e^{2\sqrt{gkt}} + 1} - \frac{2}{e^{2\sqrt{gkt}} + 1}\right), \\
v(t) &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{gkt}} + 1}\right).
\end{aligned}$$

Pomocnú konštantu k nahradíme pôvodnou hodnotou

$$v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{C_x\sigma S}} \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{\frac{gC_x\sigma S}{2m}}t} + 1}\right). \quad (21)$$

Určiť hraničnú rýchlosť padajúceho telesa môžeme dvoma spôsobmi:

1. Vypočítaním rýchlosti v čase, ktorý sa limitne blíži do nekonečna:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2mg}{C_x\sigma S}} \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{\frac{gC_x\sigma S}{2m}}t} + 1}\right) = \sqrt{\frac{2mg}{C_x\sigma S}}$$

2. Z vedomosti, že po dosiahnutí hraničnej rýchlosti teleso už nebude zrýchlovať, takže do rovnice (16) dosadíme $a(t) = 0$

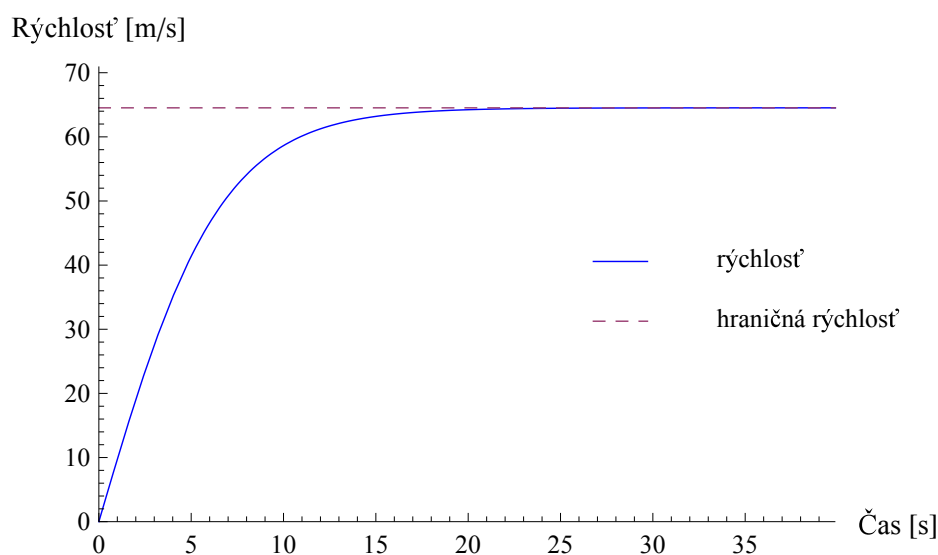
$$\begin{aligned}
m \cdot 0 &= mg - \frac{1}{2}C_x\sigma S v^2(t), \\
mg &= \frac{1}{2}C_x\sigma S v^2(t), \\
\frac{2mg}{C_x\sigma S} &= v^2(t), \\
v(t) &= \pm \sqrt{\frac{2mg}{C_x\sigma S}}.
\end{aligned}$$

V našom prípade má význam iba kladná hodnota hraničnej rýchlosti. Pre t platí, že ide o ľubovoľný čas po čase dosiahnutia hraničnej rýchlosti.

Po dosadení konkrétnych hodnôt zo zadania do vzťahu pre maximálnu dosiahnuteľnú rýchlosť dostaneme

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 9,81}{0,5 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot 0,05^2}} \doteq \underline{64,53}.$$

Najväčšia rýchlosť, ktorú môže padajúca guľa dosiahnuť, je $64,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 4.3.2. Závislost rychlosti na čase

Aby sme získali funkciu popisujúcu závislosť dráhy na čase, musíme rovnicu rýchlosti (21) zintegrovat' podľa času. Pre lepšiu prehľadnosť výpočtov opäť nahradíme $\frac{C_x \sigma S}{2m} = k$

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int v(t) dt = \int \sqrt{\frac{g}{k}} \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} \right) dt = \sqrt{\frac{g}{k}} \int \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} \right) dt \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(\int 1 dt - \int \frac{2}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} dt \right) = \sqrt{\frac{g}{k}} \left(t + C_1 - 2 \int \frac{1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} dt \right) \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(t + C_1 - 2 \int \frac{e^{2\sqrt{gk}t} - e^{2\sqrt{gk}t} + 1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} dt \right) \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(t + C_1 - 2 \int \left(\frac{e^{2\sqrt{gk}t} + 1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} - \frac{e^{2\sqrt{gk}t}}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} \right) dt \right) \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(t + C_1 - 2 \int \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{gk}} \frac{2\sqrt{gk}e^{2\sqrt{gk}t}}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1} \right) dt \right) \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(t + C_1 - 2 \left(t - \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln |e^{2\sqrt{gk}t} + 1| \right) \right) \\
 &= \sqrt{\frac{g}{k}} \left(-t + \frac{1}{\sqrt{gk}} \ln |e^{2\sqrt{gk}t} + 1| + C_1 \right) = -\sqrt{\frac{g}{k}} t + \frac{1}{k} \ln |e^{2\sqrt{gk}t} + 1| + C_1. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Zostáva nám určiť konštantu C_1 . Vychádzame z faktu, že v čase $t = 0$ malo teleso nulovú prejdenú dráhu, takže $s(0) = 0$ dosadíme do rovnice (22)

$$\begin{aligned}
 0 &= -\sqrt{\frac{g}{k}} \cdot 0 + \frac{1}{k} \ln |e^{2\sqrt{gk} \cdot 0} + 1| + C_1, \\
 0 &= \frac{1}{k} \ln |1 + 1| + C_1, \\
 C_1 &= -\frac{\ln |2|}{k}.
 \end{aligned}$$

Konštantu dosadíme do rovnice pre dráhu

$$\begin{aligned}
s(t) &= -\sqrt{\frac{g}{k}}t + \frac{1}{k} \ln \left| e^{2\sqrt{gk}t} + 1 \right| - \frac{\ln |2|}{k} = \frac{1}{k} \left(-\sqrt{gk}t + \ln \left| e^{2\sqrt{gk}t} + 1 \right| - \ln |2| \right) \\
&= \frac{1}{k} \left(-\sqrt{gk}t + \ln \left| \frac{e^{2\sqrt{gk}t} + 1}{2} \right| \right).
\end{aligned}$$

Pomocnú konštantu k nahradíme pôvodnou hodnotou

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{2m}{C_x \sigma S} \left(-\sqrt{\frac{gC_x \sigma S}{2m}}t + \ln \left| \frac{1}{2} e^{2\sqrt{\frac{gC_x \sigma S}{2m}}t} + \frac{1}{2} \right| \right), \\
s(t) &= \frac{2m}{C_x \sigma S} \left(-\sqrt{\frac{gC_x \sigma S}{2m}}t + \ln \left| \frac{1}{2} \left(e^{2\sqrt{\frac{gC_x \sigma S}{2m}}t} + 1 \right) \right| \right).
\end{aligned}$$

Po dosadení konkrétných hodnôt zo zadania a nahradením $t = 10$ dostaneme vzdialenosť, ktorú guľa prekonala voľným pádom za 10 sekúnd, teda

$$s(10) \doteq \underline{370,89}.$$

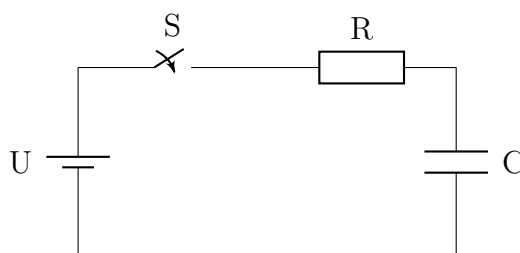
Guľa za 10 sekúnd prekonala vzdialenosť približne 370,89 metrov.

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1], [9], [12].

5 PRÍKLADY Z ELEKTRONIKY

5.1 RC obvod

Príklad 5.1 Nájdite časový priebeh prúdu v obvode a časový priebeh napätí na jednotlivých prvkoch RC obvodu po zopnutí spínača S. Predpokladajte napätie zdroja $U = 5\text{ V}$, odpor rezistora $R = 500\ \Omega$, kapacitu kondenzátora $C = 20\ \mu\text{F}$.



Obr. 5.1.1. RC sériový obvod

Aplikáciou druhého Kirchhoffovho zákona, ktorý hovorí, že súčet napätí v uzavretej slučke na spotrebičoch sa rovná súčtu elektromotorických napätí zdrojov v tejto časti obvodu, dostávame rovnicu

$$U_R(t) + U_C(t) = U, \quad (23)$$

kde U_R je napätie na rezistore, U_C je napätie na kondenzátore a U je napätie zdroja. Dosadením jednotlivých vzťahov za napätia môžeme rovnicu (23) rozpísať na tvar

$$R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U. \quad (24)$$

Najskôr si vyjadríme závislosť prúdu na čase. Zavedieme substitúciu

$$\begin{aligned} y(t) &= \int i(t) dt, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= i(t), \end{aligned} \quad (25)$$

dosadíme do rovnice (24)

$$R \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C} y(t) = U$$

a diferenciálnu rovnicu vyriešime

$$\begin{aligned} R \frac{dy(t)}{dt} &= U - \frac{1}{C} y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{U - \frac{1}{C} y(t)}{R}, \\ \frac{1}{U - \frac{1}{C} y(t)} dy(t) &= \frac{1}{R} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{U - \frac{1}{C}y(t)} dy(t) &= \int \frac{1}{R} dt, \\
-C \int \frac{-\frac{1}{C}}{U - \frac{1}{C}y(t)} dy(t) &= \int \frac{1}{R} dt, \\
-C \ln \left| U - \frac{1}{C}y(t) \right| &= \frac{1}{R}t + K, \quad K > 0, \\
\ln \left| U - \frac{1}{C}y(t) \right| &= -\frac{1}{RC}t + K, \\
U - \frac{1}{C}y(t) &= Ke^{-\frac{1}{RC}t}, \\
\frac{1}{C}y(t) &= U - Ke^{-\frac{1}{RC}t}, \\
y(t) &= C \left(U - Ke^{-\frac{1}{RC}t} \right).
\end{aligned}$$

Prevedieme spätnú substitúciu za $y(t)$ podľa (25)

$$i(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d \left(C \left(U - Ke^{-\frac{1}{RC}t} \right) \right)}{dt} = -CKe^{-\frac{1}{RC}t} \left(-\frac{1}{RC} \right) = \frac{K}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (26)$$

Pri určovaní konštanty K vychádzame z toho, že v čase $t = 0$ nie je na kondenzátore žiadne napätie, takže prúd v obvode podlieha Ohmovmu zákonu. Z toho vyplýva, že do (26) môžeme dosadiť $i(0) = \frac{U}{R}$

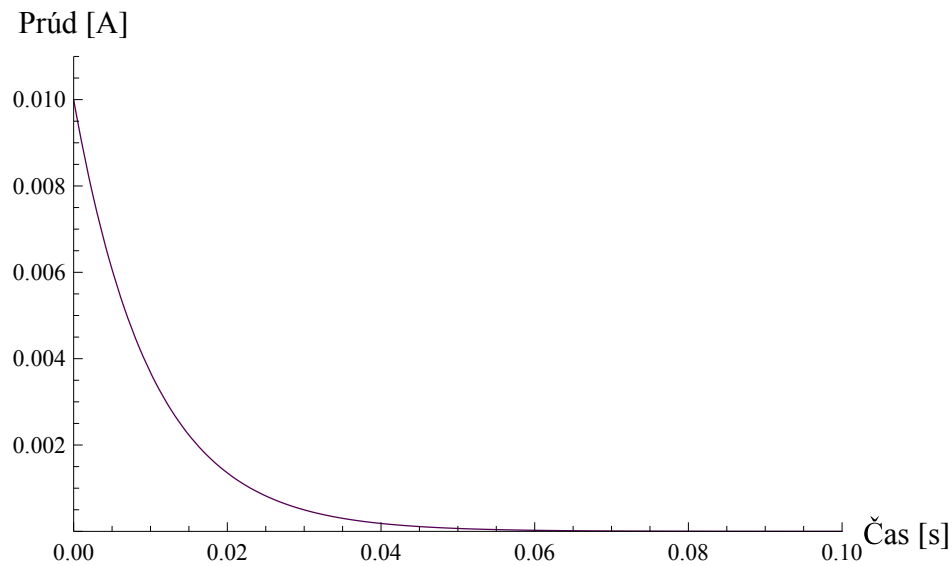
$$\begin{aligned}
\frac{U}{R} &= \frac{K}{R}e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0}, \\
K &= U.
\end{aligned}$$

Konštantu K dosadíme do (26) a dostaneme výslednú závislosť prúdu na čase

$$i(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (27)$$

Dosadením hodnôt zo zadania dostaneme konkrétny priebeh prúdu pre zadaný obvod

$$i(t) = \frac{5}{500} e^{-\frac{1}{500 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}t} = \underline{0,01e^{-100t}}.$$



Obr. 5.1.2. Časový priebeh prúdu RC obvodu

Vyjadrený prúd (27) dosadíme do vzťahov pre napätie na rezistore a na kondenzátore (24), vypočítame závislosti napätí v čase a ich priebehy zobrazíme v jednom grafe

$$U_R(t) = R i(t) = R \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} = U e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} dt = \frac{U}{RC} \int e^{-\frac{1}{RC}t} dt, \\ U_C(t) &= \frac{U}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} (-RC) + K, \quad K > 0, \\ U_C(t) &= -U e^{-\frac{1}{RC}t} + K. \end{aligned} \quad (29)$$

Konštantu K vypočítame dosadením počiatočnej podmienky $U_C(0) = 0$ do (29)

$$\begin{aligned} 0 &= -U e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} + K, \\ K &= U. \end{aligned}$$

Konštantu dosadíme do (29)

$$U_C(t) = -U e^{-\frac{1}{RC}t} + U = U \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right). \quad (30)$$

Súčin RC v argumentoch exponenciálnych funkcií $e^{-\frac{1}{RC}t}$ sa nazýva časová konštanta sériového RC obvodu. Označuje sa τ_C , teda

$$U_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_C}t} \right).$$

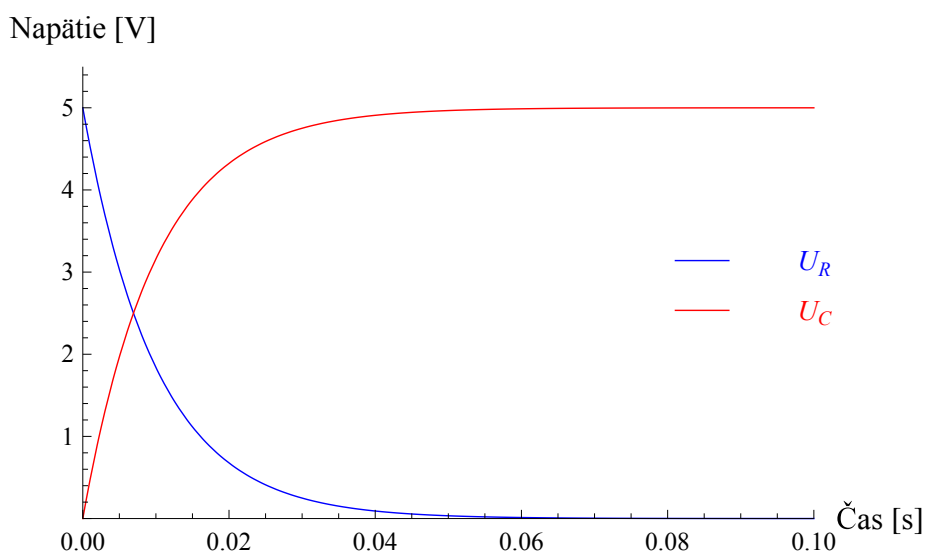
V čase $t = \tau_C$ je napätie na kondenzátore rovné hodnote

$$U_C(\tau_C) = U \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_C}\tau_C} \right) = U (1 - e^{-1}) \doteq 0,63U.$$

Z toho vyplýva, že časová konštanta τ_C určuje dĺžku časového intervalu, za ktorý sa napätie na kondenzátore zvýši z nuly na približne 63 % konečnej hodnoty napätia U . Dosadením hodnôt zo zadania $U = 5\text{ V}$, $R = 500\ \Omega$ a $C = 2 \cdot 10^{-5}\text{ F}$ do rovníc (28) a (30) dostaneme konkrétne priebehy napätí na rezistore a kondenzátore

$$U_R(t) = 5e^{-\frac{1}{500 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}t} = \underline{5e^{-100t}},$$

$$U_C(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{1}{500 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}t}\right) = \underline{5(1 - e^{-100t})}.$$

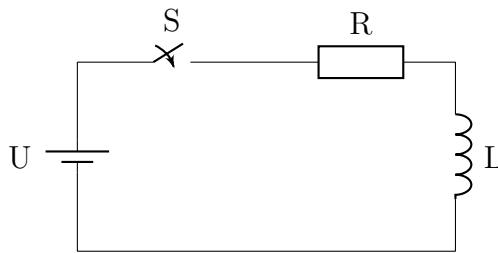


Obr. 5.1.3. Časový priebeh napätí na prvkoch RC obvodu

Napätie na kondenzátore sa postupne zvyšuje, pokiaľ sa toto napätie nevyrovná napätiu zdroja U . Ako sa kondenzátor nabíja, tak postupne klesá prúd tečúci obvodom a znižuje sa napätie na rezistore.

5.2 RL obvod

Príklad 5.2 Nájdite časový priebeh prúdu v obvode a časový priebeh napätí na jednotlivých prvkoch RL obvodu po zopnutí spínača S. Predpokladajte napätie zdroja $U = 5\text{ V}$, odpor rezistora $R = 500\ \Omega$, indukčnosť cievky $L = 1\text{ H}$ a nulový počiatočný prúd.



Obr. 5.2.1. RL sériový obvod

Na zostavenie diferenciálnej rovnice opäť použijeme druhý Kirchhoffov zákon

$$U_R + U_L = U, \quad (31)$$

kde U_R je napätie na rezistore, U_L je napätie na cievke a U je napätie zdroja. Dosadením jednotlivých vzťahov za napätia môžeme rovnicu (31) rozpísať na tvar

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = U \quad (32)$$

a diferenciálnu rovnicu vyriešime

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} &= U - R i(t), \\ di(t) &= \frac{U - R i(t)}{L} dt, \\ \frac{1}{U - R i(t)} di(t) &= \frac{1}{L} dt, \\ \int \frac{1}{U - R i(t)} di(t) &= \int \frac{1}{L} dt, \\ -\frac{1}{R} \int \frac{-R}{U - R i(t)} di(t) &= \int \frac{1}{L} dt, \\ -\frac{1}{R} \ln |U - R i(t)| &= \frac{1}{L} t + K, \quad K > 0, \\ \ln |U - R i(t)| &= -\frac{R}{L} t + K, \\ U - R i(t) &= e^{-\frac{R}{L} t + K}, \\ -R i(t) &= -U + K e^{-\frac{R}{L} t}, \\ i(t) &= \frac{U}{R} - \frac{K}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{1}{R} \left(U - K e^{-\frac{R}{L} t} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Do rovnice (33) dosadíme počiatočnú podmienku $i(0) = 0$ a vyjadríme si konštantu K

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{R} \left(U - K e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} \right), \\ 0 &= \frac{1}{R} (U - K), \\ C &= U. \end{aligned}$$

Integračnú konštantu K dosadíme do rovnice (33) a získame obecnú vyjadrenú závislosť

prúdu na čase v RL obvode

$$i(t) = \frac{1}{R} \left(U - U e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (34)$$

čo môžeme zapísať ako

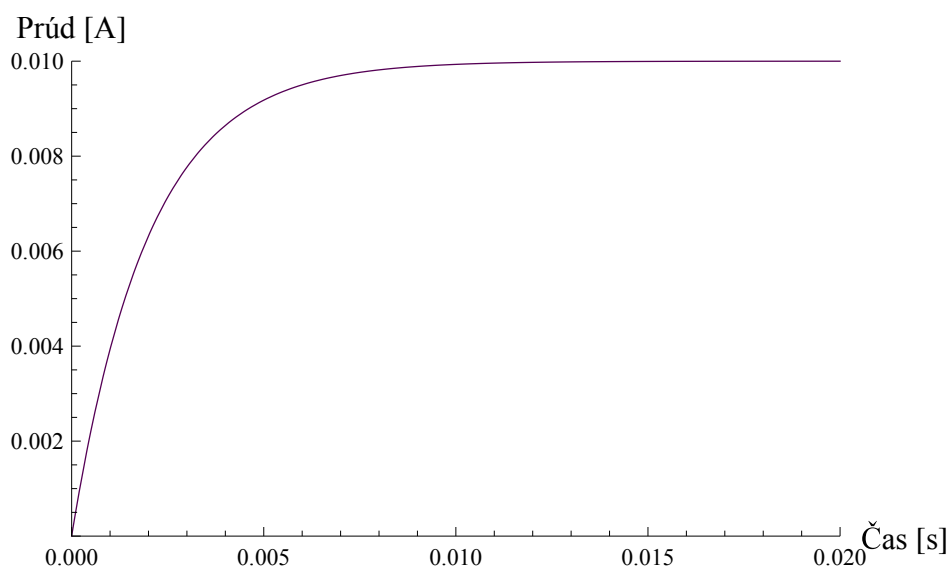
$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_L}t} \right), \quad (35)$$

kde $\tau_L = \frac{L}{R}$ je časová konštanta RL obvodu. Nahradením $\tau_L = t$ v (35) objasníme jej fyzikálny význam

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{t}t} \right) = \frac{U}{R} (1 - e^{-1}) \doteq 0,63 \frac{U}{R}.$$

Časová konštanta τ_L je teda čas, za ktorý sa prúd zvýši z nulovej hodnoty na približne 63 % konečnej ustálenej hodnoty $\frac{U}{R}$. Dosadením hodnôt zo zadania do (34) dostaneme konkrétny priebeh prúdu pre zadaný obvod

$$i(t) = \frac{5}{500} \left(1 - e^{-\frac{500}{1}t} \right) = \underline{0,01 (1 - e^{-500t})}.$$



Obr. 5.2.2. Časový priebeh prúdu RL obvodu

Z grafu je zrejmé, že prúd postupne narastá až do maximálnej hodnoty, ktorá je rovná $\frac{U}{R}$. Cievka sa v obvode chová ako zotrvačný prvok, ktorý zabráňuje prudkému nárastu prúdu. Do vzťahov z rovnice (32) dosadíme funkciu priebehu prúdu (34) na určenie priebehu napätia na rezistore a cievke

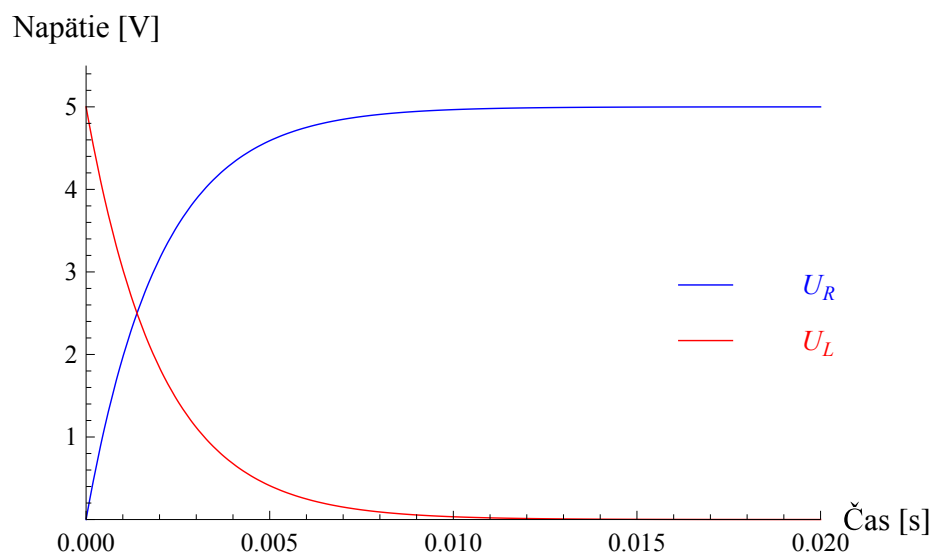
$$U_R = R i(t) = R \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = U \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

$$U_L = L \frac{d\left(\frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right)}{dt} = \frac{UL}{R} \frac{d\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}{dt} = \frac{UL}{R} \left(-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \left(-\frac{R}{L}\right) = Ue^{-\frac{R}{L}t}.$$

Dosadením hodnôt zo zadania $U = 5 \text{ V}$, $R = 500 \Omega$ a $L = 1 \text{ H}$ dostaneme konkrétne priebehy napätia rezistora a cievky

$$U_R = 5 \left(1 - e^{-\frac{500}{1}t}\right) = \underline{5 \left(1 - e^{-500t}\right)},$$

$$U_L = 5e^{-\frac{500}{1}t} = \underline{5e^{-500t}}.$$



Obr. 5.2.3. Časový priebeh napätí na prvkoch RL obvodu

Prúd v obvode narastá stále pomalšie, takže napätie na cievke, ktoré je úmerne rýchlosti časovej zmeny prúdu $\frac{dI(t)}{dt}$, postupne klesá. Tým pádom musí narastať napätie na rezistore, čo vyplýva z druhého Kirchhoffovho zákona. V ustálenom stave sa cievka správa ako dokonalý vodič.

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [6], [8], [10].

6 PRÍKLADY Z BIOLÓGIE

6.1 Rozmnožovanie baktérií

Príklad 6.1 Na počiatku pozorovania sme zaznamenali počet baktérií v uzavretom spoločenstve rovný hodnote 1000. Po jednej hodine ich počet narástol na 1,5-násobok pôvodného množstva. Za koľko hodín ich počet narastie na 50-násobok pôvodného množstva, keď vieme, že rýchlosť nárastu počtu baktérií je úmerný ich aktuálnemu počtu?

Počet baktérií si označíme ako $y(t)$. Príslušná diferenciálna rovnica bude mať tvar

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t). \quad (36)$$

Vidíme, že sa jedná o separovateľnú diferenciálnu rovnicu. Prevedieme separáciu premenných a rovnicu vyriešime

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{y(t)} &= k \, dt, \\ \int \frac{1}{y(t)} dy(t) &= \int k \, dt, \\ \ln |y(t)| &= kt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ |y(t)| &= e^{kt+C}, \\ y(t) &= Ce^{kt}, \quad C > 0. \end{aligned}$$

Dosadením počiatočnej podmienky $y(0) = 1000$ vyčíslime konštantu $C = 1000$. Partikulárne riešenie má tvar

$$y(t) = 1000e^{kt}. \quad (37)$$

Vieme, že po jednej hodine narástol počet baktérií na 1,5-násobok pôvodného množstva, čiže môžeme napísať $y(1) = 1,5 \cdot y(0) = 1,5 \cdot 1000 = 1500$. Podmienku dosadíme do rovnice (37)

$$\begin{aligned} 1500 &= 1000e^{k \cdot 1}, \\ k &= \ln 1,5 \doteq 0,4055. \end{aligned}$$

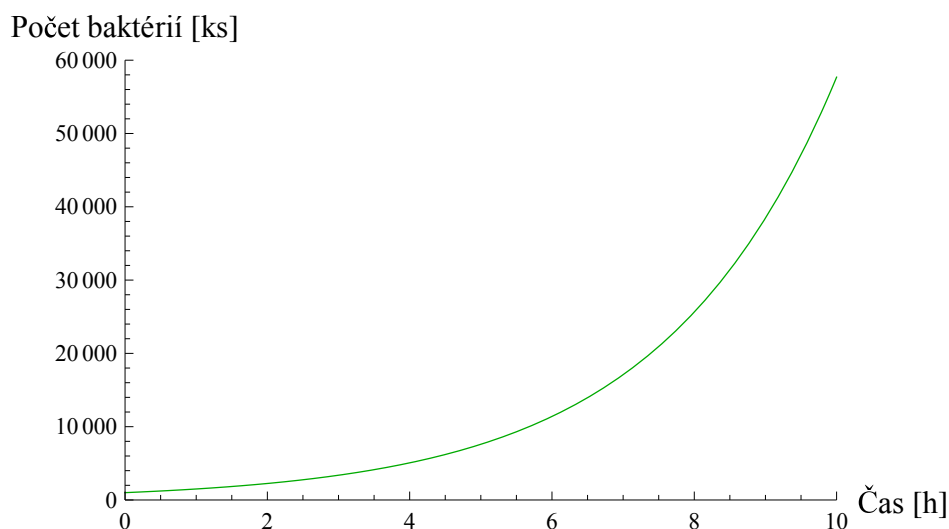
Všeobecné riešenie má tvar

$$y(t) = 1000e^{0,4055t}.$$

Získali sme funkciu závislosti počtu baktérií na čase. Našou úlohou je zistiť, za akú dlhú dobu narastie počet baktérií na 50-násobok. Za $y(t)$ dosadíme $50 \cdot y(0) = 50000$ a vyjadríme t

$$\begin{aligned}
 50000 &= 1000e^{0,4055t}, \\
 50 &= e^{0,4055t}, \\
 t &= \frac{\ln 50}{0,4055} \doteq \underline{9,65}.
 \end{aligned}$$

Počet bakterií bude 50–násobný počiatočnému počtu za približne 9 hodín a 39 minút.



Obr. 6.1.1. Časový priebeh rozmnožovania bakterií

6.2 Nakazené myši

Príklad 6.2 V biologickom laboratóriu majú 700 myší, z ktorých jednu infikovali nákazlivou chorobou za účelom overenia teórie, ktorá tvrdí, že v uzavretom spoločenstve živočíchov je rýchlosť šírenia danej choroby úmerná súčinu počtu nakazených a nenakazených jedincov. O 24 hodín vykonali kontrolu a zistili, že nákazou trpí už 60 myší. Vypočítajte, za akú dobu by malo byť, podľa tejto teórie, nakazená polovica populácie myší.

Počet nakazených myší si označíme ako $y(t)$ a celkový počet myší Y . Podľa znenia teórie zostavíme diferenciálnu rovnicu a upravíme ju

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} &= ky(t)(Y - y(t)), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= ky(t)(700 - y(t)), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= 700ky(t) - ky^2(t).
 \end{aligned} \tag{38}$$

Rovnicu je možné vypočítať ako separovateľnú diferenciálnu rovnicu alebo ako Bernoulliho diferenciálnu rovnicu. Zvolíme druhý spôsob. Z rovnice vyplýva, že $r = 2$. Zavedieme substitúciu

$$z(t) = y^{1-r}(t) = y^{1-2}(t) = \frac{1}{y(t)}, \quad (39)$$

ktorú zderivujeme

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{1}{y^2(t)} \frac{dy(t)}{dt}.$$

Z rovnice (38) dosadíme $\frac{dy(t)}{dt}$ a roznásobíme

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{1}{y^2(t)} (700ky(t) - ky^2(t)) = -700k \frac{1}{y(t)} + k.$$

Zlomok $\frac{1}{y(t)}$ nahradíme jeho substitúciou (39) a dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu v premenných t, z v tvare

$$\frac{dz(t)}{dt} = -700kz(t) + k, \quad (40)$$

ktorú vyriešime metódou variácie konštanty. Rovnicu najskôr zhomogenizujeme

$$\frac{dz(t)}{dt} = -700kz(t),$$

určíme $a(x) = -700k$ a vypočítame všeobecné riešenie homogénnej rovnice

$$z_H(t) = Ce^{\int a(t) dt} = Ce^{-700k \int dt} = Ce^{-700kt}. \quad (41)$$

Pre nájdenie riešenia pôvodnej nehomogénnej rovnice musíme konštantu C vo všeobecnom riešení zhomogenizovanej rovnice (41) nahradiť funkciou času $C(t)$ a túto funkciu nájsť

$$\begin{aligned} z(t) &= C(t)e^{-700kt}, \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{dC(t)}{dt}e^{-700kt} - 700kC(t)e^{-700kt}. \end{aligned} \quad (42)$$

Funkciu $z(t)$ a jej deriváciu dosadíme do rovnice (40) a vypočítame $C(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt}e^{-700kt} - 700kC(t)e^{-700kt} &= -700kC(t)e^{-700kt} + k, \\ \frac{dC(t)}{dt}e^{-700kt} &= k, \\ \frac{dC(t)}{dt} &= ke^{700kt}, \\ dC(t) &= ke^{700kt} dt, \\ \int dC(t) &= \int ke^{700kt} dt, \\ C(t) &= k \frac{e^{700kt}}{700k} + C, \quad C > 0, \\ C(t) &= \frac{e^{700kt}}{700} + C. \end{aligned}$$

$C(t)$ dosadíme do (42)

$$z(t) = \left(\frac{e^{700kt}}{700} + C \right) e^{-700kt} = \frac{1}{700} + Ce^{-700kt}.$$

Funkciu $z(t)$ nahradíme jej pôvodnou hodnotou (39) a vyjadríme $y(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(t)} &= \frac{1}{700} + Ce^{-700kt}, \\ \frac{700}{y(t)} &= 1 + 700Ce^{-700kt}, \\ y(t) &= \frac{700}{1 + 700Ce^{-700kt}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Na začiatku pozorovania bola nakazená jedna myš, takže do rovnice (43) dosadíme $y(0) = 1$ a vyjadríme C , ktoré následne do tejto rovnice dosadíme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{700}{1 + 700Ce^{-700k \cdot 0}}, \\ 1 &= \frac{700}{1 + 700C}, \\ C &= \frac{699}{700}. \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{700}{1 + 700 \frac{699}{700} e^{-700kt}} = \frac{700}{1 + 699e^{-700kt}}. \quad (44)$$

Pre získanie konečnej funkcie ostáva určiť konštantu úmernosti k . Využijeme fakt, že o 24 hodín od začiatku pozorovania bolo nakazených 60 myší, čiže do rovnice (44) dosadíme $y(24) = 60$

$$\begin{aligned} 60 &= \frac{700}{1 + 699e^{-700k \cdot 24}}, \\ 1 + 699e^{-16800k} &= \frac{700}{60}, \\ e^{-16800k} &= \frac{\frac{70}{6} - 1}{699}, \\ k &= -\frac{\ln \left| \frac{32}{2097} \right|}{16800} \doteq 2,49 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Konštantu k dosadíme do rovnice (44)

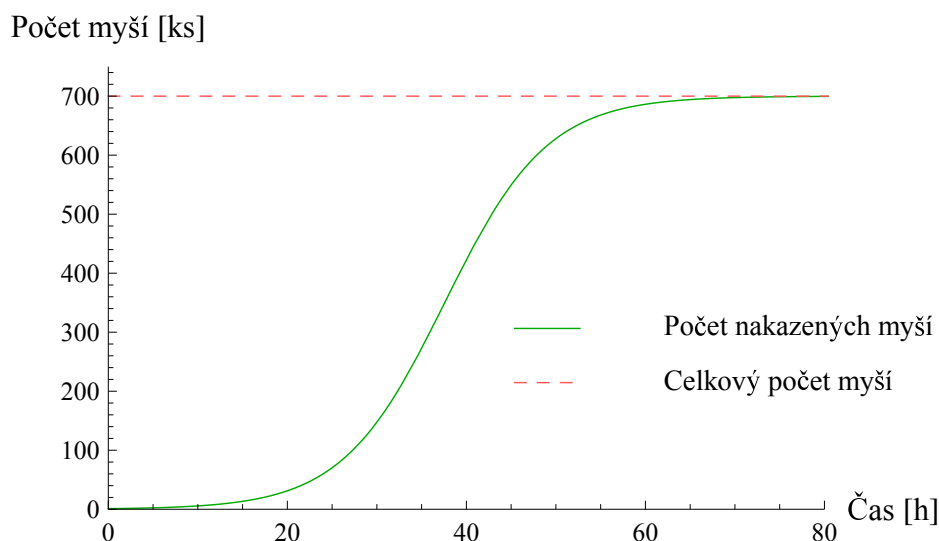
$$y(t) = \frac{700}{1 + 699e^{-700 \cdot 2,49 \cdot 10^{-4} t}} = \frac{700}{1 + 699e^{-0,1743t}}.$$

Teraz už sme schopní vypočítať, za ako dlho bude nakazená polovica populácie myší. Za $y(t)$ dosadíme $\frac{Y}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{Y}{2} &= \frac{700}{1 + 699e^{-0,1743t}}, \\ 350 &= \frac{700}{1 + 699e^{-0,1743t}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 + 699e^{-0,1743t} &= 2, \\
 e^{-0,1743t} &= \frac{1}{699}, \\
 t &= \frac{\ln \frac{1}{699}}{-0,1743} \doteq \underline{37,58}.
 \end{aligned}$$

Pokiaľ je teória vedcov o rýchlosti šírenia choroby správna, polovica populácie myší bude nakazená za približne 37 hodín a 35 minút.



Obr. 6.2.1. Časový priebeh šírenia nákazy u myší

6.3 Vývoj ľudskej populácie

Príklad 6.3 V roku 2013 bolo na Zemi približne 7,16 miliardy ľudí. V roku 2000 to bolo približne 6,13 miliardy ľudí. Koľko ľudí bolo na svete v roku 1990, pokiaľ predpokladáme, že rýchlosť rastu populácie je úmerna jej aktuálnemu stavu?

Prípad, kedy je derivácia funkcie úmerná funkčnej hodnote danej funkcie, sme už riešili v tejto kapitole v Príklade 6.1. Ide o rovnicu (36)

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t),$$

ktorej všeobecné riešenie má tvar

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad (45)$$

kde $y(t)$ je aktuálna svetová populácia v čase t , ktorého počiatok si zvolíme rok 1990, takže pre rok 2000 bude platiť $t = 10$ a pre rok 2013 bude platiť $t = 23$. Konštanta C z rovnice (45) bude výsledok nášho príkladu, čo môžeme dokázať tak, že do rovnice dosadíme $y(0) = y_0$, kde y_0 je počet obyvateľov na začiatku časového intervalu, čiže v našom prípade v roku 1990. Po dosadení dostávame

$$y_0 = Ce^{k \cdot 0} = C.$$

Do rovnice (45) dosadíme obidve podmienky a dostaneme sústavu 2 rovníc o 2 neznámych

$$6,13 = y_0 e^{10k}, \quad (46)$$

$$7,16 = y_0 e^{23k}. \quad (47)$$

Vydelením rovnice (47) rovnicou (46) dostávame

$$e^{13k} = \frac{7,16}{6,13},$$

odtiaľ

$$k = \frac{\ln \frac{7,16}{6,13}}{13} \doteq 0,01195.$$

Konštantu k dosadíme napríklad do rovnice (46) a vypočítame y_0

$$6,13 = y_0 e^{10 \cdot 0,01195},$$
$$y_0 = \frac{6,13}{e^{0,1195}} \doteq \underline{5,44}.$$

Na svete bolo v roku 1990 približne 5,44 miliardy ľudí.

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1], [3].

7 PŘÍKLADY Z CHÉMIE

7.1 Chemická reakcia

Príklad 7.1 Počas chemickej reakcia sa mení látka A na látku B. Rýchlosť tejto zmeny je úmerna kvadrátu zvyšnej hmotnosti látky A. Na počiatku má látka A hmotnosť 350 gramov. Po hodine je to už iba 220 gramov. Akú hmotnosť bude mať látka A po troch hodinách od začiatku chemickej reakcie?

Aktuálnu hmotnosť látky si označíme ako $y(t)$. Čas t budeme údať v hodinách. Diferenciálna rovnica popisujúca tento problém má tvar

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky^2(t),$$

kde k je konštanta úmernosti. Metódou separácie premenných vypočítame všeobecné riešenie

$$\begin{aligned}\frac{1}{y^2(t)} dy(t) &= k dt, \\ \int \frac{1}{y^2(t)} dy(t) &= \int k dt, \\ -\frac{1}{y(t)} &= kt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= -\frac{1}{kt + C}, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{48}$$

Na začiatku chemickej reakcie mala látka A hmotnosť 350 gramov. Dosadíme teda počiatočnú podmienku $y(0) = 350$ a určíme hodnotu integračnej konštanty C

$$\begin{aligned}350 &= -\frac{1}{k \cdot 0 + C}, \\ C &= -\frac{1}{350},\end{aligned}$$

ktorú dosadíme do (48)

$$y(t) = -\frac{1}{kt - \frac{1}{350}} = -\frac{1}{\frac{350kt-1}{350}} = -\frac{350}{350kt-1}.\tag{49}$$

Na určenie konštanty úmernosti k využijeme údaj, že za hodinu mala látka A hmotnosť 220 gramov, čiže dosadíme $y(1) = 220$

$$\begin{aligned}220 &= -\frac{350}{350k-1}, \\ 350k-1 &= -\frac{350}{220}, \\ 350k &= -\frac{13}{22}, \\ k &= -\frac{13}{7700}.\end{aligned}$$

Dosadíme konštantu k do (49)

$$y(t) = -\frac{350}{-\frac{13}{7700}350t - 1} = \frac{350}{\frac{4550t+7700}{7700}} = \frac{350 \cdot 7700}{4550t + 7700} = \frac{7700}{13t + 22}$$

a dosadením za $t = 3$ zistíme, akú mala hmotnosť látka A po troch hodinách

$$y(3) = \frac{7700}{13 \cdot 3 + 22} \doteq 126,23.$$

Po troch hodinách od začiatku chemickej reakcie mala látka A hmotnosť približne 126,23 gramov.

7.2 Zmiešavanie

Príklad 7.2 Tank obsahuje 800 litrov vody. Z tanku nepretržite vyteká 50 litrov za minútu. Rovnaký objem kvapaliny, ktorá je zložená z 50 % vody a z 50 % alkoholu, do tanku nepretržite každú minútu priteká. Predpokladajte, že alkohol je vo vode v každom časovom okamihu rozložený rovnomerne. Koľko percent alkoholu bude obsahovať tank po 20 minútach?

Aktuálny objem alkoholu v tanku si označíme ako $y(t)$. Za jednotky času t uvažujeme minúty. Každú minútu pritečie do tanku 25 litrov alkoholu a vytečie 50 litrov kvapaliny, z ktorej je $50 \frac{y(t)}{800}$ litrov alkoholu. Rýchlosť nárastu objemu alkoholu v tanku popisuje diferenciálna rovnica

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= 25 - 50 \frac{y(t)}{800}, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 25 - \frac{y(t)}{16}\end{aligned}$$

Rovnicu budeme riešiť ako separovateľnú diferenciálnu rovnicu a nájdeme jej všeobecné riešenie

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= 25 - \frac{y(t)}{16}, \\ \frac{1}{25 - \frac{y(t)}{16}} dy(t) &= dt, \\ \int \frac{16}{400 - y(t)} dy(t) &= \int dt, \\ -16 \ln |400 - y(t)| &= t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ \ln |400 - y(t)| &= -\frac{t}{16} + C, \\ 400 - y(t) &= e^{-\frac{t}{16} + C}, \\ y(t) &= 400 - Ce^{-\frac{t}{16}}, \quad C > 0.\end{aligned}\tag{50}$$

Na počiatku neobsahoval tank žiaden alkohol, takže pre určenie konštanty C dosadíme do všeobecného riešenia $y(0) = 0$

$$0 = 400 - Ce^{-\frac{t}{16}},$$

$$C = 400.$$

Po dosadení konštanty C do všeobecného riešenia (50) dostaneme funkciu popisujúcu závislosť objemu alkoholu v tanku na čase

$$y(t) = 400 - 400e^{-\frac{t}{16}} = 400 \left(1 - e^{-\frac{t}{16}}\right).$$

Aby sme zistili objem alkoholu v tanku po 20 minútach, dosadíme $t = 20$

$$y(20) = 400 \left(1 - e^{-\frac{20}{16}}\right) \doteq 285,4.$$

V percentách, vzhľadom na objem celej tekutiny v tanku, to bude

$$\frac{285,4}{800} 100 \doteq \underline{36}.$$

Po dvadsiatich minútach obsahoval tank približne 36 % alkoholu.

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [7], [8].

8 PRÍKLADY Z EKONOMIKY

8.1 Spojité úrokovanie 1

Príklad 8.1 Aký úrok zákazník banky potrebuje pri spojitom úrokovaní, pokiaľ chce mať za 10 rokov na účte trojnásobok pôvodného vkladu?

Rýchlosť nárastu množstva peňazí $y(t)$ na účte je úmerná aktuálnemu stavu na účte, pričom konštantu úmernosti označíme ako k . Diferenciálna rovnica popisujúca tento prípad a jej riešenie budú vyzeráť nasledovne

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= ky(t), \\ \int \frac{1}{y(t)} dy(t) &= \int k dt, \\ \ln |y(t)| &= kt + C, \\ |y(t)| &= e^{kt+C}, \\ y(t) &= Ce^{kt}, \quad C > 0.\end{aligned}\tag{51}$$

Pôvodný vklad si označíme ako y_0 . Budeme predpokladať, že vklad bol vložený na začiatku časového intervalu, teda prvá podmienka, ktorú dosadíme do rovnice (51), bude $y(0) = y_0$

$$y_0 = Ce^{k \cdot 0} = C.$$

Integračnú konštantu C dosadíme do rovnice (51) rovno aj s druhou podmienkou, ktorá hovorí, že za 10 rokov má byť na účte trojnásobok pôvodného vkladu, čiže $y(10) = 3y_0$, a vyčíslime potrebnú výšku úroku k

$$\begin{aligned}3y_0 &= y_0 e^{10k}, \\ 3 &= e^{10k}, \\ k &= \frac{\ln 3}{10} \doteq \underline{0,1099}.\end{aligned}$$

Aby bol na účte po 10 rokoch trojnásobok pôvodného vkladu, je potrebný úrok o výške 10,99 %.

8.2 Spojité úrokovanie 2

Príklad 8.2 Zákazník v banke vložil na svoj účte 20000 €. Počas prvých piatich rokov sa čiastka úročí 7-percentným úrokom a nasledujúce tri roky 9,5-percentným úrokom. Následne celú hotovosť vyberie. Akú veľkú čiastku mal na účte, keď predpokladáme, že počas celých ôsmich rokov nebol vykonaný žiadny iný výber alebo vklad a čiastka bola úročená nepretržite?

Čas vkladu čiastky do banky budeme považovať za začiatok časového intervalu. Najskôr

spočítame stav na účte po 5 rokoch pri 7-percentnom úroku, pričom za časovú jednotku považujeme rok

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{7}{100}y(t), \\ \int \frac{1}{y(t)} dy &= \int 0,07 dt, \\ \ln |y(t)| &= 0,07t + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= e^{0,07t+C}, \\ y(t) &= Ce^{0,07t}, \quad C > 0, 0 \leq t \leq 5.\end{aligned}\tag{52}$$

Počiatočnou podmienkou je výška vkladu na účet, čiže do (52) dosadíme $y(0) = 20000$

$$\begin{aligned}20000 &= Ce^{0,07 \cdot 0}, \\ C &= 20000.\end{aligned}$$

Dosadením konštanty C do rovnice (52) dostávame

$$y(t) = 20000e^{0,07t}.\tag{53}$$

Aby sme zistili, koľko peňazí bolo na účte po prvých 5 rokoch úročenia, dosadíme do rovnice (53) konečný čas intervalu, teda $t = 5$

$$y(5) = 20000e^{0,07 \cdot 5} = 20000e^{0,35} \doteq 28381,35.\tag{54}$$

Po piatich rokoch bolo na účte približne 28381,35 €. Nasledujú ďalšie 3 roky s 9,5-percentným spojitým úrokováním. Rast hotovosti na účte za toto obdobie popisuje diferenciálna rovnica

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{9,5}{100}y(t),$$

ktorá po úprave má tvar

$$y(t) = Ce^{0,095t}, \quad C > 0, 5 \leq t \leq 8.$$

Dosadíme podmienku, ktorou bude stav účtu na začiatku tohto obdobia, čiže hodnotu z (54)

$$\begin{aligned}28381,35 &= Ce^{0,095 \cdot 5}, \\ C &= 28381,35e^{-0,475} \doteq 17649,94.\end{aligned}$$

Spätným dosadením konštanty C dostávame tvar

$$y(t) = 17649,94e^{0,095t}, \quad 5 \leq t \leq 8.\tag{55}$$

Aby sme mohli vypočítať, koľko peňazí bolo na účte po ôsmich rokoch, dosadíme $t = 8$

do (55)

$$y(t) = 17649,94e^{0,095 \cdot 8} = 17649,94e^{0,76} \doteq \underline{37740,45}.$$

Po ôsmich rokoch bolo na účte približne 37740,45 €.

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1] .

9 NERIEŠENÉ PRÍKLADY ODR 1. RÁDU

1. Na vode sa pohybuje motorový čln rýchlosťou $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Po 40 sekundách od vypnutia motora klesne jeho rýchlosť na hodnotu $v_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Voda kladie pohybujúcemu sa člnu odpor, ktorý je priamo úmerný jeho okamžitej rýchlosti. Určite rýchlosť člna v čase 90 sekúnd od vypnutia motora.

$$[0,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

2. Obecné vyjadrite vzťah pre rýchlosť padajúceho telesa pre prípad, keď odporová sila vzduchu je úmerná okamžitej rýchlosti telesa.

$$\left[v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k} \right]$$

3. Vyšetrovatelia našli v byte vyhrievanom na konštantnú teplotu 23°C mŕtvu osobu. V čase nálezu malo telo teplotu 31°C , po 30 minútach teplota klesla na 27°C . Vypočítajte, pred koľkými minútami od príchodu vyšetrovateľov daná osoba skonala, ak predpokladáme, že v čase úmrtia mala osoba telesnú teplotu $36,5^\circ\text{C}$.

$$[22,6 \text{ min}]$$

4. Dvaja kamaráti sa dohodnú, že rozšíria fámu, že začínajú byť povinné všetky prednášky. Z 1000 študentov, ktorí sú na fakulte, to o 24 hodín vedelo 700. V akom čase o fáme nebude vedieť už iba 50 študentov? Predpokladajte, že rýchlosť šírenia informácie v ľubovoľnom čase je úmerná súčinu počtu osôb, ktorí o fáme počuli, a počtu osôb, ktorí o fáme ešte nevedia.

$$[31,13 \text{ h}]$$

5. Vypočítajte, za aký čas dosiahne napätie na kondenzátore v sériovo zapojenom RC obvode hodnotu 95 % vstupného napätia U , pokiaľ uvažujeme hodnoty odporu rezistora $R = 200 \Omega$ a kapacitu kondenzátora $C = 1 \mu\text{F}$.

$$[0,0006 \text{ s}]$$

6. Zákazník chce vložiť 1000 € na sporiaci účet. Prvá banka mu ponúka 5-percentný úrok počas prvých piatich rokoch sporenia a následne sa úrok zvýši na 10 % po dobu ďalších piatich rokov. Druhá banka mu ponúka konštantný 7,5-percentný úrok počas celých 10 rokov. Obidve banky poskytujú spojitú úročenú. Ktorý účet je pre zákazníka výhodnejší?

$$[\text{Ponuky sú zhodné, na konci úročenia bude v oboch prípadoch na účte 2117 €}]$$

7. V roku 1990 bolo na Zemi približne 5,32 miliardy ľudí. Keď predpokladáme, že rýchlosť rastu populácie je úmerná jej aktuálnemu stavu, koľko ľudí bude na Zemi v roku 2030, keď v roku 2010 bolo na Zemi 6,92 miliardy ľudí?

[9 miliárd]

8. Na začiatku rozpadu mal radioaktívny materiál hmotnosť 50 mg. Po dvoch hodinách sa jeho hmotnosť zmenšila o 10 %. Vypočítajte hmotnosť radioaktívneho materiálu po štyroch hodinách, pokiaľ predpokladáme, že rýchlosť rozpadu je úmerná jeho okamžitej hmotnosti.

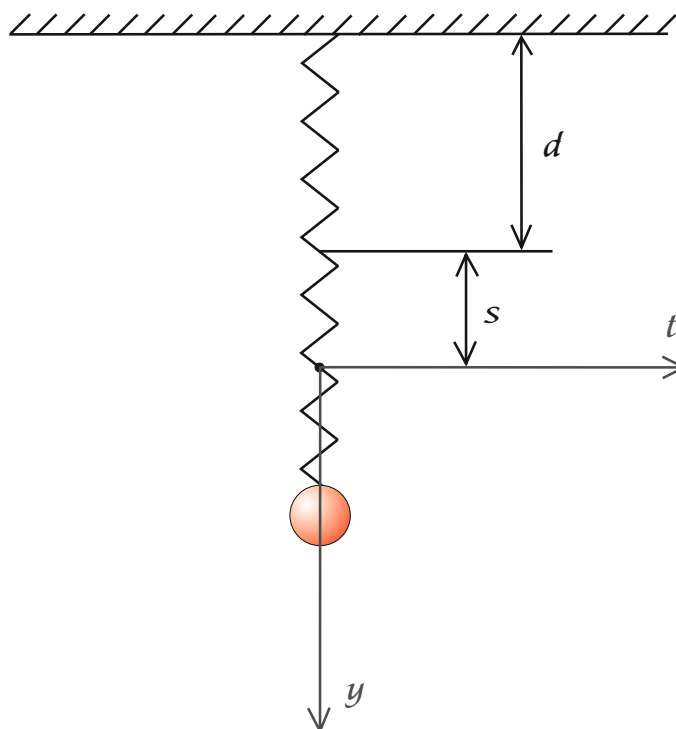
[40,5 mg]

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1] , [3] , [15] .

10 APLIKÁCIE ODR 2. RÁDU

10.1 Netlmený harmonický pohyb

Príklad 10.1 Uvažujte teleso zavesené na vertikálnej pružine. Nájdite funkciu popisujúcu jeho pohyb po vychýlení z rovnovážnej polohy, pokiaľ zanedbáme odpor prostredia a hmotnosť pružiny.



Obr. 10.1.1. Teleso zavesené na pružine

Dĺžka pružiny v nezaťaženom stave je d , predĺženie pružiny po zavesení telesa v rovnovážnom stave si označíme ako s . Stred telesa v tomto stave budeme považovať za začiatok súradnicového systému, ktorého kladný smer vertikálnej osy bude orientovaný smerom nadol. Na teleso pôsobia dve sily: gravitačná sila F_G a elastická sila pružiny F_P , ktorá je podľa Hookeovho zákona priamo úmerná výchylke pružiny s a pôsobí smerom k rovnovážnej polohe. Súčet týchto síl v rovnovážnom stave je nulový, teda

$$F_G + F_P = 0, \quad (56)$$

$$mg - ks = 0, \quad (57)$$

kde $k > 0$ je konštanta úmernosti. Po vychýlení telesa z rovnovážneho stavu je výsledná sila pôsobiaca na teleso nenulová, takže rovnicu (56) prepíšeme do tvaru

$$F(t) = F_G + F_P(t).$$

Veľkosť vychýlenia telesa z rovnovážneho stavu v čase t si označíme ako $y(t)$, takže

elastická síla pružiny bude mať tvar $k(s+y(t))$. Gravitačná síla sa nemení a prepísaním sily $F(t)$ podľa 2. Newtonovho zákona dostaneme rovnicu v tvare

$$ma(t) = mg - k(s + y(t))$$

a po úprave

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = mg - ks - ky(t).$$

Z rovnice (57) vieme, že $mg - ks = 0$, takže dostaneme diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) &= 0, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Jedná sa o homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami, ktorá sa rieši postupom uvedeným v kapitole 3.2 v teoretickej časti práce. Charakteristická rovnica

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

má dva komplexne združené korene

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}},$$

kterých reálna časť $a = 0$ a imaginárna časť $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Riešenie diferenciálnej rovnice (58) má tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= C_1 e^{0 \cdot t} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 e^{0 \cdot t} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t, \\ y(t) &= C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \end{aligned} \quad (59)$$

Konštanty C_1 a C_2 určíme z počiatočných podmienok. Vychýlenie telesa v čase 0 označíme ako y_0 , takže do (59) dosadíme $y(0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \right) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ C_1 &= y_0. \end{aligned}$$

Konštantu C_1 dosadíme do rovnice (59)

$$y(t) = y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (60)$$

Teleso po natiahnutí o dĺžku y_0 pustíme rýchlosťou v_0 . Aby sme mohli pomocou počiatočnej podmienky $v(0) = v_0$ určiť konštantu C_2 , musíme funkciu (60) zderivovať podľa času, čím dostaneme funkciu popisujúcu rýchlosť telesa v čase t

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -y_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right).$$

Dosadíme $v(0) = v_0$ a určíme C_2

$$\begin{aligned} v_0 &= -y_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0 \right), \\ v_0 &= C_2 \sqrt{\frac{k}{m}}, \\ C_2 &= \sqrt{\frac{m}{k}} v_0. \end{aligned}$$

Dosadením konštanty C_2 do (60) získame funkciu popisujúcu pohyb telesa

$$y(t) = y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t. \quad (61)$$

Zavedieme substitúcie $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$, $y_0 = A \sin \varphi$ a $\sqrt{\frac{m}{k}} v_0 = A \cos \varphi$, kde ω je uhlová frekvencia, $A = \sqrt{y_0^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{k}} v_0\right)^2}$ je amplitúda výchylky, $\varphi = \arctg \frac{y_0}{\sqrt{\frac{m}{k}} v_0}$, $v_0 \neq 0$ je fázový posun, dosadíme ich do (61)

$$y(t) = A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = A (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t)$$

a použitím súčtového vzorca

$$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin (\alpha + \beta)$$

dostaneme

$$y(t) = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (62)$$

Periódou T periodického pohybu určíme pomocou vzťahu $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Frekvencia periodického pohybu f je daná prevrátenou hodnotou periódou, teda $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Nahradením konštánt A, ω a φ v (62) dostaneme

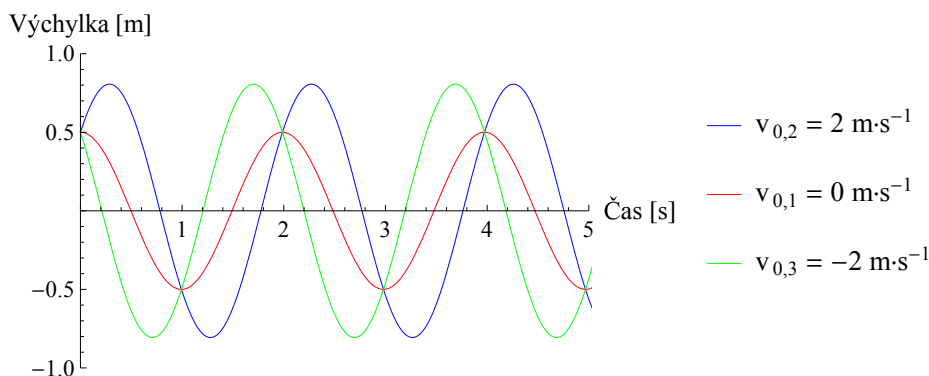
$$y(t) = \sqrt{y_0^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{k}} v_0\right)^2} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \arctg \frac{y_0}{\sqrt{\frac{m}{k}} v_0} \right).$$

Zvolíme si konkrétnu hodnotu hmotnosti telesa, počiatočnej odchýlky od rovnovážneho stavu a koeficientu pružnosti pružiny, aby sme mohli vykresliť priebeh netlmeného harmonického pohybu

$$m = 1 \text{ kg}, \quad k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad y_0 = 0,5 \text{ m}.$$

Pre počiatocnú rýchlosť v_0 , akou je teleso uvedené do pohybu po počiatocnom natiahnutí y_0 , si zvolíme 3 hodnoty

$$v_{0,1} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{0,2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{0,3} = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Obr. 10.1.2. Netlmený harmonický pohyb

10.2 Tlmený harmonický pohyb

Príklad 10.2 Uvažujte predchádzajúci príklad s prihliadnutím na lineárne narastajúcu odporovú silu prostredia závislú na rýchlosti telesa.

Na teleso v tomto prípade pôsobí ešte ďalšia sila odporu prostredia úmerná rýchlosti $F_R(t) = -r \frac{dy(t)}{dt}$, kde $r > 0$ je konštanta úmernosti. Táto sila pôsobí proti smeru pohybu telesa a spôsobuje, že sa pohyb telesa po určitom čase zastaví. Výslednú silu pôsobiacu na vychýlené teleso popisuje rovnica

$$\begin{aligned} F(t) &= F_G + F_P(t) + F_R(t), \\ ma(t) &= mg - k(s + y(t)) - r \frac{dy(t)}{dt}, \\ m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= mg - ks - ky(t) - r \frac{dy(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Keďže podľa (57) vieme, že $mg - ks = 0$, rovnica bude mať tvar

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + r \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) &= 0, \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) &= 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Charakteristická rovnica

$$\lambda^2 + \frac{r}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

má dva korene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{r}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}}}{2}.$$

Postupnými úpravami môžeme korene $\lambda_{1,2}$ zjednodušiť na tvar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4km}}{2m}. \quad (64)$$

Môžu nastať 3 rôzne prípady. Pokiaľ $r^2 = 4km$, nastáva hraničný tlmený pohyb, keď platí $r^2 > 4km$, vzniká neperiodický tlmený pohyb a pokiaľ $r^2 < 4km$, tak vznikne periodický tlmený pohyb.

Postupne rozobereme všetky tri prípady:

1. Hraničný tlmený pohyb

Platí podmienka

$$r^2 = 4km.$$

Tento pohyb sa nazýva hraničný, pretože stačí nepatrná zmena niektorého z parametrov r , m alebo k a pohyb sa zmení na tlmený periodický pohyb, prípadne tlmený aperiodický pohyb. Keďže $r^2 = 4km$, tak v čitateli pod odmocninou v (64) dostaneme nulu a charakteristická rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (63) pre tento prípad má tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}, \\ y(t) &= C_1 e^{-\frac{r}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{r}{2m}t}. \end{aligned} \quad (65)$$

Dosadením počiatočnej podmienky $y(0) = y_0$ zistíme, že $C_1 = y_0$. Dosadíme konštantu C_1 do rovnice (65), ktorú nasledne zderivujeme podľa času, aby sme mohli aplikovať podmienku s počiatočnou rýchlosťou na určenie konštanty C_2

$$v(t) = -y_0 \frac{r}{2m} e^{-\frac{r}{2m}t} + C_2 \left(e^{-\frac{r}{2m}t} - \frac{rt}{2m} e^{-\frac{r}{2m}t} \right).$$

Dosadíme počiatočnú podmienku $v(0) = v_0$ a vyjadríme C_2

$$\begin{aligned} v_0 &= -y_0 \frac{r}{2m} e^{-\frac{r}{2m} \cdot 0} + C_2 \left(e^{-\frac{r}{2m} \cdot 0} - \frac{r \cdot 0}{2m} e^{-\frac{r}{2m} \cdot 0} \right), \\ v_0 &= -\frac{y_0 r}{2m} + C_2, \\ C_2 &= v_0 + \frac{y_0 r}{2m}. \end{aligned}$$

Konštanty C_1 a C_2 dosadíme do (65)

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{r}{2m}t} + \left(v_0 + \frac{y_0 r}{2m}\right) t e^{-\frac{r}{2m}t} = e^{-\frac{r}{2m}t} \left[y_0 + \left(v_0 + \frac{y_0 r}{2m}\right) t \right].$$

Pre zostrojenie grafického priebehu funkcie výchylky boli použité nasledujúce hodnoty, ktoré splňujú podmienku $r^2 = 4km$:

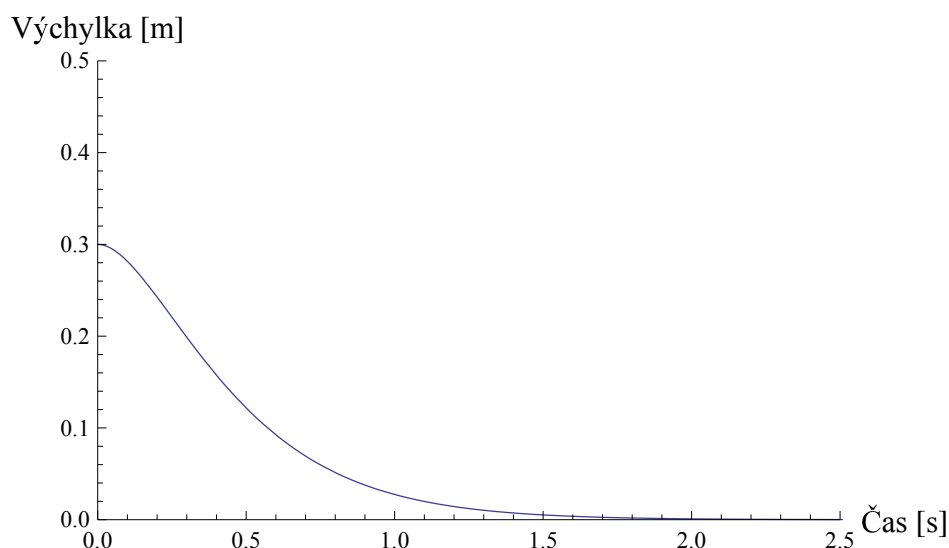
Hmotnosť telesa $m = 1 \text{ kg}$,

Počiatočná výchylka $y_0 = 0,3 \text{ m}$,

Počiatočná rýchlosť $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

Koeficient odporu vzduchu $r = 8 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$,

Koeficient tuhosti pružiny $k = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



Obr. 10.2.1. Hraničný tlmený pohyb

2. Tlmený aperiodický pohyb

Platí podmienka

$$r^2 > 4km.$$

V čitateli pod odmocninou v (64) dostaneme kladné číslo, takže charakteristická rovnica má dva reálne korene

$$\lambda_1 = \frac{-r + \sqrt{r^2 - 4km}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-r - \sqrt{r^2 - 4km}}{2m}. \quad (66)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (63) pre tento prípad má tvar

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (67)$$

Pre lepšiu prehľadnosť výpočtov nebudeme zatiaľ korene λ_1 a λ_2 nahradzovať rozšírenými tvarmi. Konštanta C_1 bude mať po dosadení počiatočnej podmienky $y(0) = y_0$ tvar $C_1 = y_0 - C_2$. Konštantu dosadíme

$$y(t) = (y_0 - C_2) e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

funkciu zderivujeme

$$v(t) = (y_0 - C_2) \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t},$$

dosadíme počiatočnú podmienku $v(0) = v_0$ a vyjadríme C_2

$$\begin{aligned} v_0 &= (y_0 - C_2) \lambda_1 + C_2 \lambda_2, \\ v_0 &= y_0 \lambda_1 - C_2 \lambda_1 + C_2 \lambda_2, \\ v_0 - y_0 \lambda_1 &= C_2 (\lambda_2 - \lambda_1), \\ C_2 &= \frac{v_0 - y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Potom

$$C_1 = y_0 - C_2 = y_0 - \frac{v_0 - y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{y_0 \lambda_2 - y_0 \lambda_1 - v_0 + y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{y_0 \lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Konštanty C_1 a C_2 dosadíme do rovnice (67)

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{y_0 \lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{v_0 - y_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) e^{\lambda_2 t}, \\ y(t) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [(y_0 \lambda_2 - v_0) e^{\lambda_1 t} + (v_0 - y_0 \lambda_1) e^{\lambda_2 t}]. \end{aligned}$$

Po dosadení za λ_1 a λ_2 podľa (66) a následných úpravách bude mať funkcia $y(t)$ tvar

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[\left(y_0 + \frac{2mv_0 + ry_0}{\sqrt{r^2 - 4km}} \right) e^{\frac{-r + \sqrt{r^2 - 4km}}{2m} t} + \left(y_0 - \frac{2mv_0 + ry_0}{\sqrt{r^2 - 4km}} \right) e^{\frac{-r - \sqrt{r^2 - 4km}}{2m} t} \right].$$

Konkrétne hodnoty pre zostrojenie grafu boli zvolené, aby platila podmienka tlmeného aperiodického pohybu, čiže $r^2 > 4km$

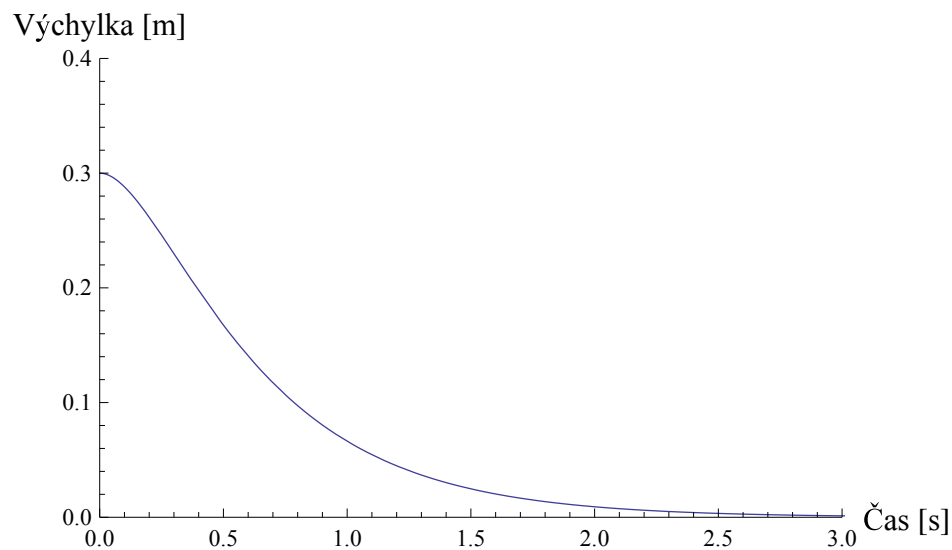
$$\text{Hmotnosť telesa} \quad m = 1 \text{ kg},$$

$$\text{Počiatočná výchylka} \quad y_0 = 0,3 \text{ m},$$

$$\text{Počiatočná rýchlosť} \quad v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\text{Koeficient odporu vzduchu} \quad r = 7 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1},$$

$$\text{Koeficient tuhosti pružiny} \quad k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$



Obr. 10.2.2. Tlmený aperiodický pohyb

3. Tlmený periodický pohyb

Platí podmienka

$$r^2 < 4km.$$

V čitateli pod odmocninou v (64) dostaneme záporné číslo, takže charakteristická rovnica má dva komplexne združené korene

$$\lambda_1 = \frac{-r + i\sqrt{4km - r^2}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-r - i\sqrt{4km - r^2}}{2m}.$$

Pre prehľadnosť výpočtov si označíme reálnu časť koreňov ako a , imaginárnu časť ako b , kde

$$a = -\frac{r}{2m}, \quad b = \frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m}. \quad (68)$$

Všeobecné riešenie má tvar

$$y(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt.$$

Po dosadení podmienky $y(0) = y_0$ zistíme hodnotu konštanty $C_1 = y_0$. Konštantu dosadíme

$$y(t) = y_0 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt \quad (69)$$

a zderivujeme podľa času

$$v(t) = y_0 (ae^{at} \cos bt - be^{at} \sin bt) + C_2 (ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt).$$

Dosadíme počiatočnú podmienku $v(0) = v_0$ a vyjadríme C_2

$$v_0 = y_0 [ae^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0) - be^{a \cdot 0} (\sin b \cdot 0)] + C_2 [ae^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + be^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0)],$$

$$v_0 = y_0 a + C_2 b,$$

$$C_2 = \frac{v_0 - y_0 a}{b}.$$

Konstantu C_2 dosadíme do (69)

$$y(t) = y_0 e^{at} \cos bt + \left(\frac{v_0 - y_0 a}{b} \right) e^{at} \sin bt = e^{at} \left[y_0 \cos bt + \left(\frac{v_0 - y_0 a}{b} \right) \sin bt \right].$$

Po dosazení za a, b z (68) dostaneme

$$y(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} \left[y_0 \cos \left(\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m} t \right) + \left(\frac{v_0 + y_0 \frac{r}{2m}}{\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m}} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m} t \right) \right].$$

Po úprave

$$y(t) = e^{-\frac{r}{2m}t} \left[y_0 \cos \left(\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m} t \right) + \left(\frac{2mv_0 + y_0 r}{\sqrt{4km - r^2}} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m} t \right) \right],$$

čo môžeme zapísať ako (vid' Príklad 10.1)

$$y(t) = A e^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$y(t) = \sqrt{y_0^2 + \frac{(2mv_0 + y_0 r)^2}{4km - r^2}} e^{-\frac{r}{2m}t} \sin \left(\frac{\sqrt{4km - r^2}}{2m} t + \arctg \frac{y_0 \sqrt{4km - r^2}}{2mv_0 + y_0 r} \right).$$

Zostrojíme graf funkcie $y(t)$ pre hodnoty

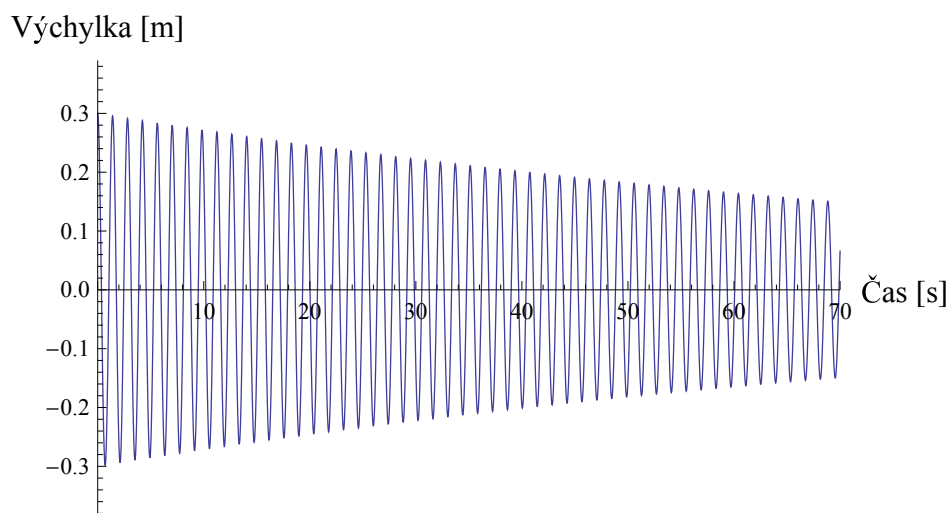
$$\text{Hmotnosť telesa} \quad m = 0,5 \text{ kg},$$

$$\text{Počiatočná výchylka} \quad y_0 = 0,3 \text{ m},$$

$$\text{Počiatočná rýchlosť} \quad v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\text{Koeficient odporu vzduchu} \quad r = 0,01 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1},$$

$$\text{Koeficient tuhosti pružiny} \quad k = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$



Obr. 10.2.3. Tlmený periodický pohyb

10.3 Vynútené kmity

Príklad 10.3 Teleso zavesené na pružine na začiatku časového intervalu vychýlime o vzdialenosť $y_0 = 0,3\text{ m}$ a s nulovou počiatočnou rýchlosťou pustíme. V prvom prípade na ňu nebudeme pôsobiť žiadnou vonkajšou silou. V druhom prípade budeme na ňu pôsobiť konštantnou silou $F_K = 30\text{ N}$ a v treťom prípade periodickou silou $F_0 \sin \omega t$, kde $\omega = 2\pi f$ je uhlová frekvencia a $f = 1\text{ s}^{-1}$ je frekvencia, ktorá udáva počet dokončených kmitov v priebehu jednej sekundy. Amplitúda F_0 periodickej sily má veľkosť 5 N . Porovnajte graficky časové priebehy odchýlky polohy telesa zaveseného na pružine od rovnovážnej polohy pre jednotlivé prípady. Uvažujte hmotnosť telesa $m = 1\text{ kg}$, koeficient odporu vzduchu $r = 1\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ a koeficient tuhosti pružiny $k = 40\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$

Prípad, kedy na teleso nepôsobila vonkajšia sila, sme už vyriešili v Príklade 10.2. Obecne vyriešime teraz druhý prípad. Na teleso budeme pôsobiť časovo nezávislou silou F_K . Výsledná sila pôsobiaca na teleso je vyjadrená ako súčet všetkých síl, ktoré na teleso v tomto prípade pôsobia

$$F(t) = F_G + F_P(t) + F_R(t) + F_K.$$

Obdobnými úpravami ako v Príklade 10.2 dôjdeme k tvaru rovnice

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F_K}{m}. \quad (70)$$

Charakteristické korene zhomogenizovanej rovnice

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4km}}{2m}.$$

Po dosadení konkrétnych hodnôt zistíme, že tieto korene sú komplexne združené, takže teleso bude vykazovať tlmený periodický pohyb. Všeobecné riešenie zhomogenizovanej rovnice je

$$y_H(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt, \quad (71)$$

kde $a = -\frac{r}{2m}$ je reálna časť a $b = \frac{\sqrt{4km-r^2}}{2m}$ je imaginárna časť komplexne združených koreňov λ_1, λ_2 . Keďže na nenulovej pravej strane rovnice (70) je polynóm nultého stupňa a číslo 0 nie je koreňom charakteristickej rovnice, tak partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice (70) bude mať tvar

$$y_P(t) = A.$$

Spravíme prvú a druhú deriváciu

$$\begin{aligned} \frac{dy_P(t)}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

V rovnici (70) nahradíme $y(t) = y_P(t)$, $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy_P(t)}{dt}$, $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2}$ a vyjadríme si A

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy_P(t)}{dt} + \frac{k}{m} y_P(t) &= \frac{F_K}{m}, \\ 0 + \frac{r}{m} \cdot 0 + \frac{k}{m} A &= \frac{F_K}{m}, \\ A &= \frac{F_K}{k}. \end{aligned}$$

Súčet všeobecného riešenia zhomogenizovanej rovnice y_H a partikulárneho riešenia $y_P = A = \frac{F_K}{k}$ nám dá všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice (70)

$$\begin{aligned} y(t) &= y_H(t) + y_P(t), \\ y(t) &= C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt + \frac{F_K}{k}. \end{aligned} \quad (72)$$

Dosadíme prvú počiatočnú podmienku. Teleso v čase $t = 0$ bude vychýlené z rovnovážneho stavu o vzdialenosť y_0 , teda $y(0) = y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0) + C_2 e^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + \frac{F_K}{k}, \\ y_0 &= C_1 + \frac{F_K}{k}, \\ C_1 &= y_0 - \frac{F_K}{k}. \end{aligned}$$

Konstantu C_1 spätne dosadíme do (72)

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt + \frac{F_K}{k} \quad (73)$$

a funkciu $y(t)$ zderivujeme

$$v(t) = \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) (ae^{at} \cos bt - be^{at} \sin bt) + C_2 (ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt).$$

Po dosadení počiatočnej podmienky $v(0) = v_0$ určíme konstantu C_2

$$\begin{aligned} v_0 &= \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) [ae^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0) - be^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0)] + C_2 [ae^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + be^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0)], \\ v_0 &= \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) a + C_2 b, \\ C_2 &= \frac{1}{b} \left[v_0 - a \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) \right]. \end{aligned}$$

Po dosadení konštanty C_2 do (73) dostaneme obecné vyjadrenú výslednú funkciu

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) e^{at} \cos bt + \frac{1}{b} \left[v_0 - a \left(y_0 - \frac{F_K}{k}\right) \right] e^{at} \sin bt + \frac{F_K}{k}.$$

Teraz vyriešime prípad, kedy na teleso budeme pôsobiť periodickou silou $F_0 \sin \omega t$. Differenciálna rovnica popisujúca tento systém sa zhoduje s rovnicou (70), len konštantnú silu F_K nahradíme periodickou silou $F_0 \sin \omega t$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (74)$$

Keďže zhomogenizovaná rovnica má rovnaký tvar ako v prípade s konštantnou silou, tak jej všeobecné riešenie sa bude zhodovať so všeobecným riešením (71)

$$y_H(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt, \quad (75)$$

kde $a = -\frac{r}{2m}$ je reálna časť a $b = \frac{\sqrt{4km-r^2}}{2m}$ je imaginárna časť komplexne združených koreňov λ_1, λ_2 . Za predpokladu, že $\pm \omega i$ nie je koreňom charakteristickej rovnice, bude partikulárne riešenie v tvare

$$y_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (76)$$

Vypočítame prvú a druhú deriváciu

$$\begin{aligned} \frac{dy_P(t)}{dt} &= -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t, \\ \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2} &= -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t. \end{aligned}$$

V rovnici (74) nahradíme $y(t) = y_P(t)$, $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy_P(t)}{dt}$, $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d^2 y_P(t)}{dt^2}$

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t + \frac{r}{m} (-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t) \\
& + \frac{k}{m} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.
\end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov u funkcií $\cos \omega t$ a $\sin \omega t$ na ľavej a pravej strane rovnice získame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámých A, B

$$\begin{aligned}
\cos \omega t : & -\omega^2 A + \frac{r}{m} \omega B + \frac{k}{m} A = 0, \\
\sin \omega t : & -\omega^2 B - \frac{r}{m} \omega A + \frac{k}{m} B = \frac{F_0}{m}.
\end{aligned}$$

Riešením sústavy rovníc je

$$A = \frac{F_0 r \omega}{2m\omega^2 k - m^2 \omega^4 - r^2 \omega^2 - k^2}, \quad B = \frac{F_0 (m\omega^2 - k)}{2m\omega^2 k - m^2 \omega^4 - r^2 \omega^2 - k^2}.$$

Konštanty A a B dosadíme do obecné vyjadreného partikulárneho riešenia (76)

$$\begin{aligned}
y_P(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\
y_P(t) &= \left(\frac{F_0 r \omega}{2m\omega^2 k - m^2 \omega^4 - r^2 \omega^2 - k^2} \right) \cos \omega t \\
&+ \left(\frac{F_0 (m\omega^2 - k)}{2m\omega^2 k - m^2 \omega^4 - r^2 \omega^2 - k^2} \right) \sin \omega t, \\
y_P(t) &= \left(\frac{F_0}{2m\omega^2 k - m^2 \omega^4 - r^2 \omega^2 - k^2} \right) [r\omega \cos \omega t + (m\omega^2 - k) \sin \omega t].
\end{aligned}$$

Pre lepšiu prehľadnosť nasledujúcich výpočtov budeme používať partikulárne riešenie v obecnom tvare $y_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, ktoré sčítame s všeobecným riešením (75) zhomogenizovanej diferenciálnej rovnice a dostaneme všeobecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice (74)

$$y(t) = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt + A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (77)$$

Dosadíme prvú počiatočnú podmienku $y(0) = y_0$ a vyjadríme si konštantu C_1

$$y_0 = C_1 e^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0) + C_2 e^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + A \cos(\omega \cdot 0) + B \sin(\omega \cdot 0),$$

$$C_1 = y_0 - A.$$

Konštantu C_1 dosadíme do (77)

$$y(t) = (y_0 - A) e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (78)$$

rovniciu zderivujeme

$$v(t) = (y_0 - A) (ae^{at} \cos bt - be^{at} \sin bt) + C_2 (ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt) - \omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

a aplikujeme druhú počiatočnú podmienku, podľa ktorej bola teleso na začiatku časového intervalu uvedené do pohybu s počiatočnou rýchlosťou v_0 , čiže $v(0) = v_0$, a určíme konštantu C_2

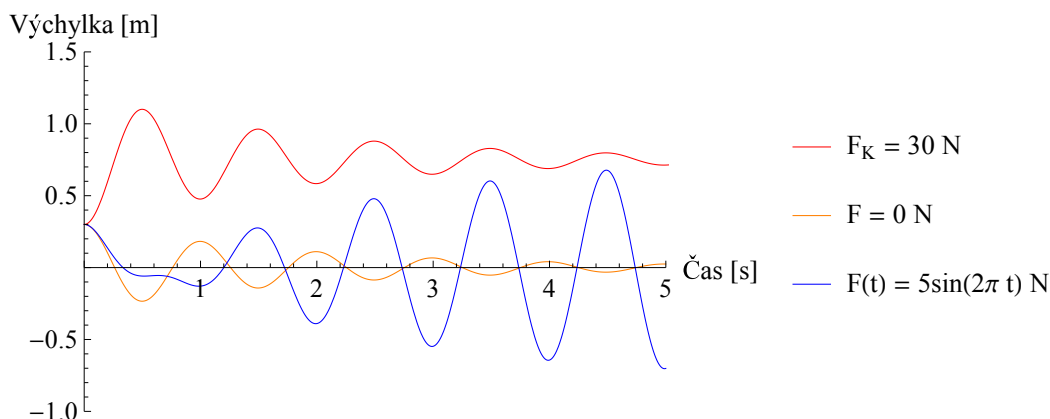
$$v_0 = (y_0 - A) [ae^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0) - be^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0)] + C_2 [ae^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + be^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0)] - \omega A \sin(\omega \cdot 0) + \omega B \cos(\omega \cdot 0) = (y_0 - A) a + bC_2 + \omega B.$$

Odtiaľ

$$C_2 = \frac{v_0 - a(y_0 - A) - \omega B}{b}.$$

Konštantu C_2 dosadíme do (78) a obdržíme výslednú funkciu

$$y(t) = (y_0 - A) e^{at} \cos bt + \left(\frac{v_0 - a(y_0 - A) - \omega B}{b} \right) e^{at} \sin bt + A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$



Obr. 10.3.1. Časové priebehy v jednotlivých prípadoch

10.4 Padajúca reťaz

Príklad 10.4 Reťaz o dĺžke 6 m sa kľže bez trenia z lešenia. Na začiatku visí z lešenia o 50 cm. Sila pôsobiaca na reťaz je úmerná dĺžke visiacej časti reťaze. Určite čas, za aký reťaz spadne z lešenia, pokiaľ uvažujeme nulovú počiatočnú rýchlosť.

Dĺžku visiacej časti reťaze v čase t si označíme ako $y(t)$. Silu pôsobiacu na reťaz môžeme zapísať ako

$$F(t) = ky(t), \quad (79)$$

kde $k > 0$ je konštanta úmernosti. Z druhého Newtonovho zákona vieme, že

$$F(t) = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2},$$

takže rovnicu (79) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= ky(t), \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{k}{m} y(t) &= 0. \end{aligned} \quad (80)$$

Dostali sme lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami. Je dôležité si uvedomiť, že od momentu, kedy reťaz spadne z lešenia, čiže $y(t) = 6$, bude zrýchlenie $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ rovné gravitačnému zrýchleniu g . Tieto hodnoty dosadíme do rovnice (80)

$$\begin{aligned} g - \frac{k}{m} 6 &= 0, \\ \frac{k}{m} &= \frac{g}{6}. \end{aligned}$$

Vyjadrený podiel $\frac{k}{m}$ nahradíme v rovnici (80)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{g}{6} y(t) = 0.$$

Charakteristická rovnica

$$\lambda^2 - \frac{g}{6} = 0$$

má korene

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{6}}.$$

Keďže sa jedná o dva rôzne reálne korene, všeobecné riešenie bude mať tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 > 0, \\ y(t) &= C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{6}} t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{6}} t}. \end{aligned} \quad (81)$$

Vykonáme deriváciu všeobecného riešenia $y(t)$

$$\frac{dy(t)}{dt} = C_1 \sqrt{\frac{g}{6}} e^{\sqrt{\frac{g}{6}} t} - C_2 \sqrt{\frac{g}{6}} e^{-\sqrt{\frac{g}{6}} t}.$$

Na počiatku časového intervalu visela reťaz z lešenia o 0,5 m, teda prvá počiatočná podmienka bude $y(0) = 0,5$. Počiatočná rýchlosť reťaze bola nulová, čiže $\frac{dy(0)}{dt} = 0$. Dosadením počiatočných podmienok do všeobecného riešenia,

$$y(0) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad 0,5 = C_1 + C_2,$$

následne do derivácie všeobecného riešenia

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \sqrt{\frac{g}{6}} - C_2 \sqrt{\frac{g}{6}}$$

a podelením druhej rovnice výrazom $\sqrt{\frac{g}{6}}$ dostaneme sústavu rovníc

$$0,5 = C_1 + C_2,$$

$$0 = C_1 - C_2,$$

ktorej riešením je $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}$. Konštanty dosadíme do (81) a dostaneme funkciu popisujúcu závislosť dĺžky visiacej časti reťaze na čase

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t},$$

$$y(t) = \frac{1}{4} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t} \right).$$

Pre určenie času, za ktorý reťaz spadne z lešenia, dosadíme za $y(t) = 6$ a vyjadríme t

$$6 = \frac{1}{4} e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t},$$

$$24 = e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}.$$

Celú rovnicu vynásobíme výrazom $e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}$

$$24e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} = e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} \left(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t} \right),$$

$$24e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} = \left(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t} \right)^2 + 1.$$

Zavedieme substitúciu $x = e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}$

$$24x = x^2 + 1,$$

$$x^2 - 24x + 1 = 0.$$

Dostali sme kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú $x_1 = 12 + \sqrt{143}$ a $x_2 = 12 - \sqrt{143}$. Koreň x_1 dosadíme do zavedenej substitúcie a vyjadríme čas t

$$12 + \sqrt{143} = e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t},$$

$$\ln(12 + \sqrt{143}) = \ln(e^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}),$$

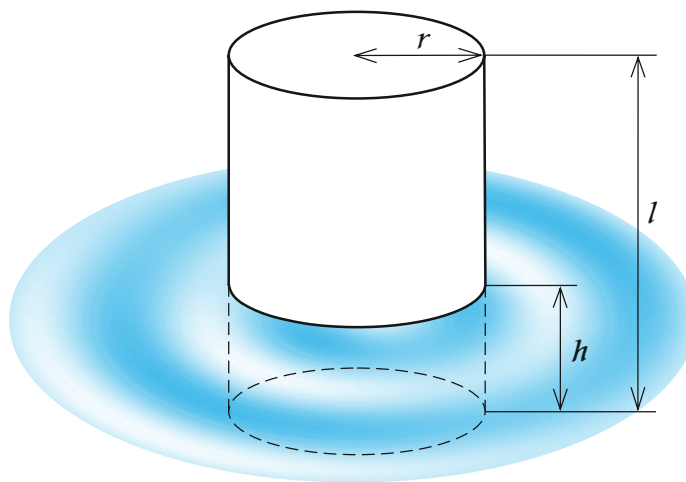
$$\ln(12 + \sqrt{143}) = \sqrt{\frac{g}{6}}t,$$

$$t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln(12 + \sqrt{143}) = \sqrt{\frac{6}{9,81}} \ln(12 + \sqrt{143}) \doteq \underline{2,48}.$$

Dosadením koreňa x_2 do substitúcie by sme dostali záporný čas $t \doteq -2,48$, čo v našom príklade nemá význam. Reťaz teda padne z lešenia za približne 2,48 sekundy.

10.5 Plávající těleso

Příklad 10.5 Těleso v tvare valca o hmotnosti m , s polomerom podstavy r a výškou $l = 0,25$ m, ktorého os je orientovaná vertikálne, pláva čiastočne ponorené o vzdialenosť h vo vode s hustotou $\rho_v = 995 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Odpor vody a vonkajšieho prostredia zanedbajte. Po vychýlení valca z kludového stavu smerom kolmo na podstavu začne harmonicky kmitať s periódou $T = 0,7$ s. Vypočítajte hustotu materiálu, z ktorého je valec vyrobený.



Obr. 10.5.1. Čiastočne ponorený valec vo vode

Na čiastočne ponorený valec pôsobí gravitačná sila F_G a v opačnom smere pôsobiaca vztlaková sila F_V , ktorej veľkosť je podľa Archimedovho zákona daná súčinom gravitačného zrýchlenia a hmotnosti kvapaliny o objeme, ktorý je rovný objemu ponorenej časti telesa. V kludovom stave telesa je výslednica týchto dvoch síl nulová

$$F_G + F_V = 0.$$

Jednotlivé sily rozpíšeme. Pre výpočet hmotnosti vody m_v o objeme ponorenej časti valca použijeme vzorec $m_v = V\rho_v$, kde V je objem ponorenej časti valca

$$\begin{aligned} mg - m_v g &= 0, \\ mg - \pi r^2 h \rho_v g &= 0. \end{aligned} \tag{82}$$

Po vychýlení valca z kludového stavu je výslednica gravitačnej a vztlakovej sily nenulová

$$F(t) = F_G + F_V(t).$$

Sily rozpíšeme a rovnicu upravíme

$$\begin{aligned}
ma(t) &= mg - \pi r^2(h + y(t))\varrho_v g, \\
m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= mg - \pi r^2(h + y(t))\varrho_v g, \\
m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= mg - \pi r^2 \varrho_v g h - \pi r^2 \varrho_v g y(t).
\end{aligned}$$

Zo vzťahu (82) vieme, že $mg - \pi r^2 \varrho_v g h = 0$, takže po úprave

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= -\pi r^2 \varrho_v g y(t), \\
\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \frac{-\pi r^2 \varrho_v g}{m} y(t).
\end{aligned}$$

Za m dosadíme vzťah pre výpočet hmotnosti celého valca $m = \pi r^2 l \varrho_t$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{\pi r^2 \varrho_v g}{\pi r^2 l \varrho_t} y(t) = -\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t} y(t).$$

Charakteristická rovnica tejto diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 = -\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t}$$

má dva komplexne združené korene

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t}}.$$

Všeobecné riešenie má tvar

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t}} t.$$

Periódka kmitavého pohybu je obecně vyjadrená vzťahom

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

kde ω je imaginárna časť komplexne združeného charakteristického koreňa, teda

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\varrho_v g}{l \varrho_t}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \varrho_t}{\varrho_v g}}$$

Vyjadríme si hľadanú hustotu telesa ϱ_t

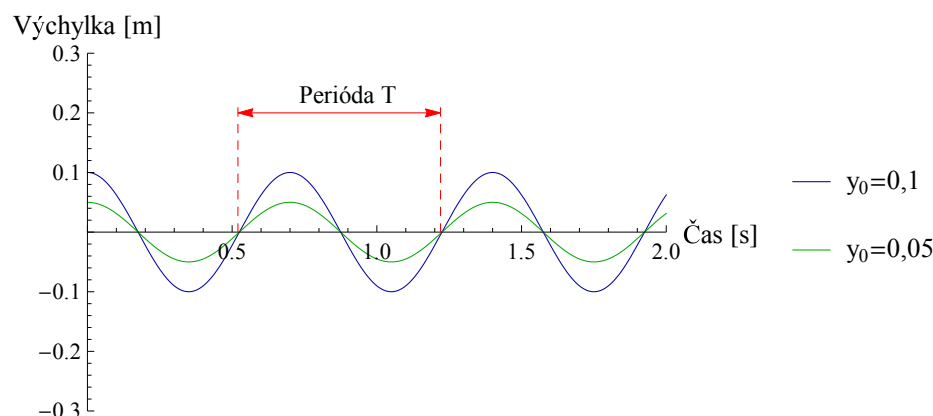
$$\begin{aligned}
2\pi \frac{\sqrt{l \varrho_t}}{\sqrt{\varrho_v g}} &= T, \\
\sqrt{l \varrho_t} &= \frac{T \sqrt{\varrho_v g}}{2\pi}, \\
\sqrt{\varrho_t} &= \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\varrho_v g}{l}},
\end{aligned}$$

$$\varrho_t = \frac{T^2 \varrho_v g}{4\pi^2 l}$$

a dosadíme konkrétné hodnoty

$$\varrho_t = \frac{0,7^2 \cdot 995 \cdot 9,81}{4\pi^2 \cdot 0,25} \doteq \underline{484,6}.$$

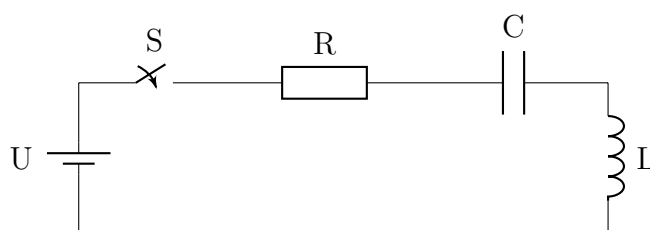
Hustota materiálu valca je približne $484,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



Obr. 10.5.2. Harmonický pohyb valca

10.6 RLC obvod

Príklad 10.6 Vypočítajte časový priebeh prúdu a časový priebeh napätia na kondenzátore RLC sériového obvodu po zopnutí spínača S. Uvažujte nasledujúce hodnoty: napätie zdroja $U=5 \text{ V}$, odpor rezistora $R=100 \text{ } \Omega$, indukčnosť cievky $L=1 \text{ H}$ a kapacitu kondenzátora $C=100 \text{ } \mu\text{F}$.



Obr. 10.6.1. RLC sériový obvod

Pomocou druhého Kirchhoffovho zákona odvodíme rovnicu

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U,$$

kde $U_R(t)$ je napätie na rezistore, $U_L(t)$ je napätie na cievke, $U_C(t)$ je napätie na kondenzátore a U je napätie zdroja. Rozpíšeme vzťahy pre jednotlivé napätia na prvkoch obvodu

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U. \quad (83)$$

Rovnicu zderivujeme a dostaneme homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0. \quad (84)$$

Charakteristická rovnica

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

má korene

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}.$$

Po dosadení konkrétnych hodnôt zo zadania za R , L a C zistíme, že charakteristické korene sú komplexne združené, pretože $R^2 < 4 \frac{L}{C}$. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (84) má tvar

$$i(t) = K_1 e^{at} \cos bt + K_2 e^{at} \sin bt, \quad K_1, K_2 > 0, \quad (85)$$

kde $a = -\frac{R}{2L}$ je reálna časť a $b = \frac{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}$ je imaginárna časť komplexne združených koreňov charakteristickej rovnice. V čase zopnutia spínača $t = 0$ neprechádza obvodom žiadny prúd. Po dosadení počiatočnej podmienky $i(0) = 0$ určíme hodnotu konštanty $K_1 = 0$, čiže (85) upravíme do tvaru

$$i(t) = K_2 e^{at} \sin bt. \quad (86)$$

Druhú počiatočnú podmienku, hodnotu derivácie prúdu $i(t)$ v čase $t = 0$, určíme vyjadrením $\frac{di(t)}{dt}$ z rovnice (83)

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} &= U - \frac{1}{C} \int i(t) dt - Ri(t), \\ \frac{di(t)}{dt} &= \frac{U - \frac{1}{C} \int i(t) dt - Ri(t)}{L}. \end{aligned}$$

Dosadíme $t = 0$

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{U - \frac{1}{C} \int i(0) dt - Ri(0)}{L}.$$

Keďže $i(0) = 0$, druhá počiatočná podmienka bude mať tvar

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{U}{L}. \quad (87)$$

Aby sme ju mohli aplikovať, zderivujeme funkciu (86) podľa času

$$\frac{di(t)}{dt} = K_2 (ae^{at} \sin bt + be^{at} \cos bt).$$

Za čas dosadíme $t = 0$

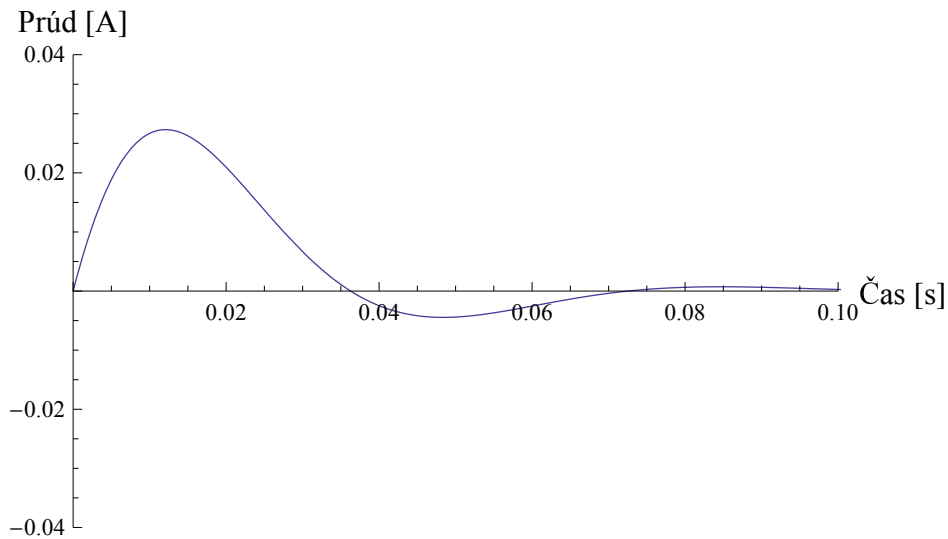
$$\frac{di(0)}{dt} = K_2 (ae^{a \cdot 0} \sin(b \cdot 0) + be^{a \cdot 0} \cos(b \cdot 0)) ,$$

vykonáme úpravu podľa (87) a vyjadríme K_2

$$\begin{aligned} \frac{U}{L} &= K_2 b, \\ K_2 &= \frac{U}{Lb}. \end{aligned}$$

Konštantu dosadíme do (86)

$$i(t) = \frac{U}{Lb} e^{at} \sin bt.$$



Obr. 10.6.2. Časový priebeh prúdu sériového RLC obvodu

Vypočítame priebeh napätia na kondenzátore

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} \int \frac{U}{Lb} e^{at} \sin bt dt = \frac{U}{CLb} \int e^{at} \sin bt dt. \quad (88)$$

Vypočítame si zvlášť integrál $\int e^{at} \sin bt dt$ dvojnásobným použitím metódy per partes

$$\begin{aligned} \int e^{at} \sin bt dt &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{at} & u' = ae^{at} \\ v' = \sin bt & v = -\frac{1}{b} \cos bt \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{at} \cos bt + \frac{a}{b} \int e^{at} \cos bt dt \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{at} & u' = ae^{at} \\ v' = \cos bt & v = \frac{1}{b} \sin bt \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{at} \cos bt + \frac{a}{b} \left[\frac{1}{b} e^{at} \sin bt - \frac{a}{b} \int e^{at} \sin bt dt \right] \\ &= -\frac{1}{b} e^{at} \cos bt + \frac{a}{b^2} e^{at} \sin bt - \frac{a^2}{b^2} \int e^{at} \sin bt dt \\ &= \frac{e^{at}}{b^2} [a \sin bt - b \cos bt] - \frac{a^2}{b^2} \int e^{at} \sin bt dt. \end{aligned}$$

Vidíme, že sme na pravej strane rovnice dostali integrál, z ktorého sme vychádzali

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{e^{at}}{b^2} [a \sin bt - b \cos bt] - \frac{a^2}{b^2} \int e^{at} \sin bt \, dt.$$

Integrály dáme na spoločnú stranu rovnice a rovnicu doriešime

$$\begin{aligned} \int e^{at} \sin bt \, dt + \frac{a^2}{b^2} \int e^{at} \sin bt \, dt &= \frac{e^{at}}{b^2} [a \sin bt - b \cos bt], \\ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{at} \sin bt \, dt &= \frac{e^{at}}{b^2} [a \sin bt - b \cos bt], \\ \frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{at} \sin bt \, dt &= \frac{e^{at}}{b^2} [a \sin bt - b \cos bt], \\ \int e^{at} \sin bt \, dt &= \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \sin bt - b \cos bt]. \end{aligned}$$

Nesmieme zabudnúť na integračné konštanty, ktoré pri integrovaní vznikli. Tieto konštanty nahradíme jednou konštantou K_3 , takže úplný výsledok integrálu bude

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \sin bt - b \cos bt] + K_3, \quad K_3 \in \mathbb{R}.$$

Tento výsledok dosadíme do (88)

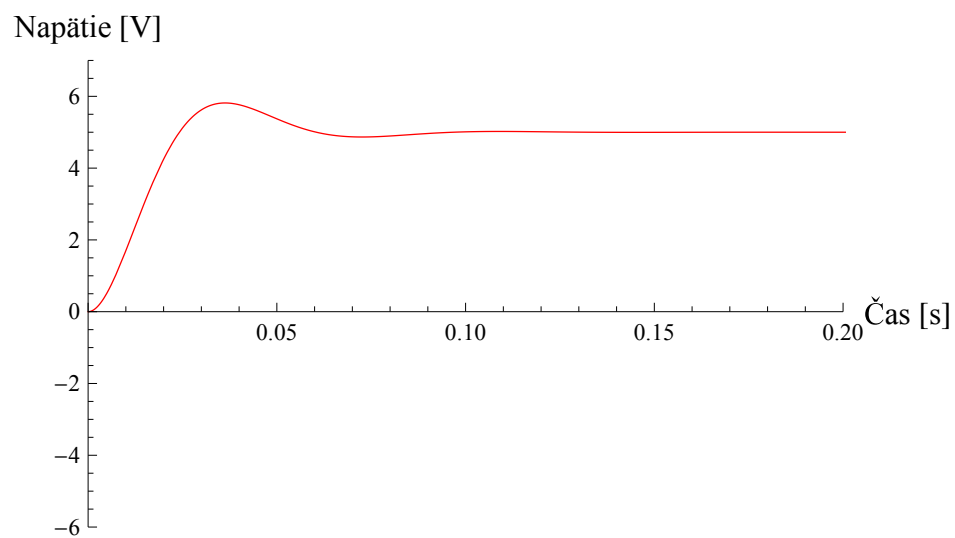
$$U_C(t) = \frac{U}{CLb} \left\{ \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \sin bt - b \cos bt] + K_3 \right\}. \quad (89)$$

Zostáva nám určiť konštantu K_3 . V čase $t = 0$ je medzi doskami kondenzátora nulový potenciálový rozdiel, čiže dosadíme $U_C(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U}{CLb} \left\{ \frac{e^{a \cdot 0}}{a^2 + b^2} [a \sin(b \cdot 0) - b \cos(b \cdot 0)] + K_3 \right\}, \\ 0 &= \frac{U}{CLb} \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} + K_3 \right), \\ 0 &= -\frac{b}{a^2 + b^2} + K_3, \\ K_3 &= \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Konštantu K_3 dosadíme do (89)

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{U}{CLb} \left\{ \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} [a \sin bt - b \cos bt] + \frac{b}{a^2 + b^2} \right\} \\ &= \frac{U}{CLb(a^2 + b^2)} \{ e^{at} [a \sin bt - b \cos bt] + b \}. \end{aligned}$$



Obr. 10.6.3. Časový priebeh napätia na kondenzátore sériového RLC obvodu

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1] , [3] , [10] , [11] .

11 NERIEŠENÉ PRÍKLADY ODR 2. RÁDU

1. Teleso sa pohybuje netlmeným harmonickým pohybom s amplitúdou 0,24 m. V čase $t = 0$ s malo teleso nulovú rýchlosť a výchylku 0,24 m. Vypočítajte polohu telesa v čase $t = 0,5$ s.

[0,17 m]

2. Teleso o hmotnosti 0,5 kg je zavesené na pružine o tuhosti $8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Teleso je uvedené do pohybu zo vzdialenosti 10 cm nad rovnovážnou polohou s počiatočnou rýchlosťou $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ rovnakého smeru. Určite vzdialenosť od rovnovážnej polohy v čase $t = 1$ s, pokiaľ na teleso pôsobí odporová sila prostredia $F_R(t) = -4v(t) \text{ N}$.

[4,58 cm]

3. Teleso zavesené na pružine je uvedené do pohybu z rovnovážnej polohy počiatočnou rýchlosťou $v(0) = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Na teleso pôsobí vonkajšia sila $F(t) = 5 \sin t \text{ N}$. Nájdite funkciu popisujúcu polohu telesa v ľubovoľnom čase, pokiaľ hmotnosť telesa je $m = 10 \text{ kg}$ a koeficient tuhosti pružiny, na ktorej je teleso zavesené, je $k = 140 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

$[-0,18e^{-2t} + 0,198e^{-7t} + 0,026 \sin t - 0,018 \cos t]$

4. Bója v tvare valca o hustote $450 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pláva s periódou $T = 1 \text{ s}$ v kvapaline vo vode o hustote $995 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Určite celkovú výšku bóje.

[0,55 m]

5. Je daný sériovo zapojený RLC obvod so striedavým napätím $U(t) = 200 \cos 100t \text{ V}$, odporom rezistora $R = 5 \Omega$, kapacitou kondenzátora $C = 0,4 \text{ mF}$ a indukčnosťou cievky $L = 0,05 \text{ H}$. Vypočítajte hodnotu prúdu v čase $t = 1 \text{ s}$ od uzavretia obvodu.

[6,79 A]

K vypracovaniu tejto podkapitoly boli použité zdroje: [1], [15].

ZÁVER

Predložená bakalárska práca poukazuje na to, že diferenciálne rovnice majú široké spektrum uplatnenia. V praktickej časti práce sú uvedené aplikácie všetkých typov diferenciálnych rovníc, ktoré sú obecné vysvetlené v teoretickej časti. Súčasťou práce sú aj neriešené príklady prvého aj druhého rádu s uvedenými správnymi výsledkami, takže si študent môže overiť, nakoľko preberanej látke porozumel.

Celá práca je písaná typografickým systémom $\text{\LaTeX}$, ktorý je vhodný na písanie matematických prác. Elektrické obvody boli kreslené pomocou balíku makier CircuiTikZ, ktorý je primárne určený na tento účel. Obrázky znázorňujúce rôzne riešené fyzikálne situácie sú nakreslené vektorovým grafickým editorom CorelDRAW X6 a na znázornenie priebehov hľadaných funkcií bol použitý softvér Mathematica 9 od spoločnosti Wolfram.

Práca je určená študentom Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně ako podporný materiál popri štúdiu predmetu Diferenciální rovnice, ale zároveň môže byť prínosná študentom z iných fakúlt, ktorí sa zaujímajú o aplikácie diferenciálnych rovníc v rôznych odvetviach.

Literatúra

- [1] BRONSON, Gabriel B a Gabriel COSTA. *Schaum's outline of differential equations*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN 00-714-5687-2.
- [2] NAGY, Jozef. *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [3] BEZÁKOVÁ, Anna. *Diferenciálne rovnice*. Zvolen: MAT-CENTRUM, 2001. ISBN 80-968057-9-7.
- [4] ELIAŠ, Jozef, Ján HORVÁTH a Juraj KAJAN. *Zbierka úloh z vyššej matematiky: 3. časť*. Bratislava: Alfa, 1980.
- [5] REKTORYS, Karel. *Přehled použité matematiky*, 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-719-6179-5.
- [6] ADÁMEK, Milan a Miroslav MATÝSEK. *Úvod do elektrotechniky*. Vyd. 1. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006, 159 s. ISBN 80-731-8411-7.
- [7] *Applications of Differential Equations* [online]. [cit. 2014-03-15]. Dostupné z: http://www.college.cengage.com/mathematics/larson/calculus_applied/6e/shared/appendices/appdx_c_sec_04.pdf.
- [8] KUBEN, Jaromír. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. vyd. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1995. ISBN 80-706-7535-7.
- [9] *Diferenciální rovnice* [online]. [cit. 2014-04-22]. Dostupné z: <http://www.fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf>.
- [10] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. 5. vyd. Brno/Praha: VUTIUM/PROMETHEUS, 2000, 1198 s. ISBN 80-214-1869-9.
- [11] KREMPASKÝ, Július. *Fyzika*. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1987.
- [12] *Diferenciální počet, stavba zavěšených mostů a prohýbání nosných lan* [online]. [cit. 2014-04-21]. Dostupné z: <http://www.user.mendelu.cz/marik/wiki/aplikace/most.pdf>.
- [13] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [14] LOMTATIDZE, Lenka a Roman PLCH. *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003, 122 s. ISBN 80-210-3228-6.

-
- [15] HAJKO, Vladimír. *Fyzika v příkladoch*. 4. vyd. Bratislava: Alfa, 1971.

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

etc.	et cetera
a pod.	a podobne
ODR	obyčejná diferenciální rovnice
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
RC	obvod so zapojením rezistora a kondenzátora
RL	obvod so zapojením rezistora a cievky
RLC	obvod so zapojením rezistora, cievky a kondenzátora

Zoznam obrázkov

Obr. 4.1.1.	Časový priebeh teploty pizze	23
Obr. 4.2.1.	Most s nosným lanom	24
Obr. 4.3.1.	Padajúca guľa.....	25
Obr. 4.3.2.	Závislosť rýchlosti na čase.....	29
Obr. 5.1.1.	RC sériový obvod.....	31
Obr. 5.1.2.	Časový priebeh prúdu RC obvodu.....	33
Obr. 5.1.3.	Časový priebeh napätí na prvkoch RC obvodu.....	34
Obr. 5.2.1.	RL sériový obvod	35
Obr. 5.2.2.	Časový priebeh prúdu RL obvodu	36
Obr. 5.2.3.	Časový priebeh napätí na prvkoch RL obvodu.....	37
Obr. 6.1.1.	Časový priebeh rozmnožovania baktérií	39
Obr. 6.2.1.	Časový priebeh šírenia nákazy u myší.....	42
Obr. 10.1.1.	Teleso zavesené na pružine	52
Obr. 10.1.2.	Netlmený harmonický pohyb	55
Obr. 10.2.1.	Hraničný tlmený pohyb	57
Obr. 10.2.2.	Tlmený aperiodický pohyb	59
Obr. 10.2.3.	Tlmený periodický pohyb.....	61
Obr. 10.3.1.	Časové priebehy v jednotlivých prípadoch	65
Obr. 10.5.1.	Čiastočne ponorený valec vo vode	68
Obr. 10.5.2.	Harmonický pohyb valca	70
Obr. 10.6.1.	RLC sériový obvod.....	70
Obr. 10.6.2.	Časový priebeh prúdu sériového RLC obvodu.....	72
Obr. 10.6.3.	Časový priebeh napätia na kondenzátore sériového RLC obvodu.....	74

ZOZNAM PRÍLOH

P I. CD-ROM obsahujúce zdrojové súbory práce, grafov a obrázkov