

Obyčejné diferenciální rovnice sbírka řešených a neřešených příkladů

Ordinary Differential Equations
The Collection of Solved and Unsolved Examples

Tomáš Račák



nascannované zadání s. 1

nascannované zadání s. 2

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených a neřešených příkladů z obyčejných diferenciálních rovnic. Sbíрка by měla sloužit převážně studentům bakalářského studia na FAI UTB ve Zlíně, a to jako studijní pomůcka v předmětu Matematika 3 - Diferenciální rovnice.

Klíčová slova: obyčejná diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení, charakteristická rovnice, fundamentální systém, homogenní rovnice, nehomogenní rovnice.

ABSTRACT

The purpose of this bachelor thesis was to create a collection of solved and unsolved examples of ordinary differential equations. The collection should be used by students of Mathematics III course on Faculty of Applied Informatics, UTB, Zlín.

Keywords: ordinary differential equation, general solution, particular solution, characteristic equation, fundamental system, homogeneous equation, nonhomogeneous equation.

Touto cestou bych rád poděkoval paní Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za odborné vedení této práce, obětavý přístup a za veškerý čas strávený při jejím konzultování.

*”Důkazem vysokého vzdělání je schopnost mluvit
o největších věcech nejjednodušším způsobem.”*

Ralph Waldo Emerson
(1803-1882; americký filosof)

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně

.....

podpis diplomanta

Obsah

ÚVOD	9
I TEORETICKÁ ČÁST	9
1 ZÁKLADNÍ POJMY	11
1.1 ODR 1. ŘÁDU	11
1.2 ODR n -TÉHO ŘÁDU	12
2 ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI	13
3 HOMOGENNÍ ODR	14
4 LINEÁRNÍ ODR 1. ŘÁDU	15
5 BERNOULLIOVA ROVNICE	16
6 EXAKTNÍ DR A INTEGRAČNÍ FAKTOR	17
7 LODR VYŠŠÍCH ŘÁDŮ S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY	19
7.1 ZÁKLADNÍ POJMY	19
7.2 HOMOGENNÍ LODR 2. ŘÁDU	20
7.3 HOMOGENNÍ LODR n -TÉHO ŘÁDU	21
7.4 NEHOMOGENNÍ LODR VYŠŠÍCH ŘÁDŮ S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY	21
II PRAKTICKÁ ČÁST	23
8 ROVNICE SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI	25
8.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	25
8.2 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	34
9 HOMOGENNÍ ODR	35
9.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	35
9.2 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	41
10 LINEÁRNÍ ODR 1. ŘÁDU	42
10.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	42
10.2 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	51
11 BERNOULLIOVA ROVNICE	52
11.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	52
11.2 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	57
12 EXAKTNÍ DR A INTEGRAČNÍ FAKTOR	58
12.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY	58
12.2 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY	63

13	HOMOGENNÍ LODR n- TÉHO ŘÁDU	64
13.1	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	64
13.2	NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	66
14	NEHOMOGENNÍ LODR n- TÉHO ŘÁDU SE SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU.....	67
14.1	ŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	67
14.2	NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY.....	71
15	APLIKACE S POUŽITÍM DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC.....	72
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	79
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	81
	SEZNAM OBRÁZKŮ	82

ÚVOD

Diferenciální rovnice patří dnes k nejpropracovanějším disciplínám matematiky. Pomocí nich můžeme popsat celou řadu fyzikálních zákonů, používají se při řešení problémů technických, přírodovědných i ekonomických. Příkladem mohou být volný pád, populační růst, přímočarý pohyb apod. První zmínky o diferenciálních rovnicích se objevily na přelomu 16. a 17. století v dílech J. Napiera při výpočtů logaritmů čísel. Další zmínka je datována do poslední čtvrtiny 17. století v pracích anglického matematika I. Newtona a německého matematika G. W. Leibnize a trvá až do konce 18. století, kdy byly nalezeny všechny dodnes známé metody řešení. Počátkem 18. století se pomocí diferenciálních rovnic začala popisovat většina fyzikálních a jiných dějů. Další rozvoj tedy probíhá v souvislosti s řešením různých fyzikálních úloh řešení pohybových rovnic, řešení elektrických obvodů apod. V průběhu 18. století se o rozvoj diferenciálních rovnic nejvíce zasloužil L. Euler, který popsal metodu řešení lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu s konstantními koeficienty. V této práci mimo jiné zavedl pojmy partikulární řešení a obecné řešení.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V teoretické části bakalářské práce je uveden stručný přehled základních pojmů a typů diferenciálních rovnic (zejména separovatelná DR, homogenní DR, lineární DR 1. řádu, lineární DR vyšších řádů s konstantními koeficienty) s metodami jejich řešení. Praktická část obsahuje jak řešené příklady s podrobným vysvětlením postupu řešení, tak neřešené příklady s výsledky. Poslední část bakalářské práce je také věnována některým aplikacím diferenciálních rovnic v praxi. Kapitoly v teoretické i praktické části jsou nazvány stejně pro snazší orientaci v případě nejasností ve výpočtu.

Pro pochopení problematiky, kterou se tato bakalářská práce zabývá, se předpokládají základní znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkcí na úrovni prvních dvou semestrů matematiky na fakultě aplikované informatiky UTB ve Zlíně.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ZÁKLADNÍ POJMY

Diferenciální rovnice (DR) je rovnice, v níž neznámou je funkce a v níž se vyskytují derivace této funkce.

Obyčejnou diferenciální rovnici (ODR) nazýváme rovnici, ve které neznámou je funkce jedné proměnné a ve které se vyskytuje aspoň jedna derivace této funkce.

Parciální diferenciální rovnici (PDR) nazýváme rovnici, ve které neznámou je funkce více proměnných a ve které se vyskytují parciální derivace této funkce.

Řádem DR nazýváme řád nejvyšší derivace hledané funkce vyskytující se v dané rovnici.

Diferenciální rovnici (ODR či PDR) nazýváme **lineární**, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci, případně derivacím.

1.1 ODR 1. řádu

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

kde F je reálná funkce tří proměnných, x nezávisle proměnná, y funkce jedné reálné proměnné x a y' derivace funkce y .

Lze-li z rovnice (1) explicitně vyjádřit derivaci y' , tj.

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných, pak rovnici (2) nazýváme **ODR prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci**.

Řešením (též **integrálem**) rovnice (2) na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která je diferencovatelná na I a splňuje zde identicky rovnici (2).

Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (2), které splňuje zadanou **počáteční podmínku**

$$y(x_0) = y_0, \quad (3)$$

se nazývá **počáteční úloha (Cauchyova úloha, počáteční problém)**. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (3) a je řešením rovnice (2) na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 .

1.2 ODR n -tého řádu

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných, x nezávisle proměnná, y je funkce jedné reálné proměnné x a $y', y'', \dots, y^{(n)}$ její derivace.

Lze-li z rovnice (4) explicitně vyjádřit nejvyšší derivaci funkce y , tj.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5)$$

kde f je reálná funkce $n+1$ proměnných, říkáme, že rovnice (5) je **rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci**.

Řešením (nebo též **integrálem**) **ODR n -tého řádu** (5) nazýváme každou funkci $y = y(x)$, která má na uvažovaném intervalu I derivace až do n -tého řádu včetně a vyhovuje dané rovnici, tj. po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost.

Nechť $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou konstanty. Úloha najít řešení rovnice (5), které vyhovuje **počátečním podmínkám**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá **počáteční úloha** (nebo také **Cauchyova úloha, počáteční problém**).

Řešení rovnice (5) nazýváme

- **obecné řešení**, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

kde $C_1, \dots, C_n$ jsou konstanty,

- **partikulární řešení**, lze-li jej získat z obecného řešení pro konkrétní hodnoty konstant $C_1, \dots, C_n$, které vypočteme nebo zvolíme,
- **vyjímecné řešení**, nelze-li jej získat z obecného řešení pro žádnou volbu hodnot $C_1, \dots, C_n$. Existuje pouze u některých typů DR.

2 ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

ODR tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (6)$$

kde f, g jsou spojité funkce na otevřených intervalech, nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými**.

Postup řešení rovnice (6): Řešíme metodou

SEPARACE PROMĚNNÝCH:

1. Předpokládejme nejprve, že $g(y) \neq 0$ na uvažovaném intervalu.

- Derivaci y' formálně nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

- Se zlomkem $\frac{dy}{dx}$ pracujeme normálně jako s podílem dvou výrazů. Násobením a dělením převedeme rovnici na tvar, který obsahuje na každé straně pouze jednu proměnnou (tj. odseparujeme proměnné):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

- Obě strany získané rovnosti zintegrujeme, pravou stranu podle proměnné x , levou podle proměnné y , a na jednu ze stran rovnice přidáme integrační konstantu:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Obdržená rovnice implicitně určuje **obecné řešení** rovnice (6).

- Pokud je to možné, převedeme řešení do explicitního tvaru (tj. vyjádříme y).
- Pokud je zadána počáteční podmínka, dosadíme ji do obecného řešení a určíme hodnotu konstanty C . Tu pak dosadíme do obecného řešení a získáme tak řešení **partikulární**.

2. Má-li rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y = k_1, y = k_2, y = k_3, \dots, y = k_n$ řešeními rovnice (6). Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do obecného.

3 HOMOGENNÍ ODR

ODR tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (7)$$

kde f je spojitá funkce na nějakém otevřeném intervalu, se nazývá **homogenní obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu**.

Postup řešení homogenní rovnice (7):

1. Zavedeme substituci

$$u = \frac{y}{x}.$$

Odtud

$$y = ux \implies y' = u'x + u, \quad \text{kde} \quad u' = \frac{du}{dx}.$$

2. Dosadíme do původní rovnice a dostaneme

$$u'x + u = f(u) \implies u' = \frac{1}{x}(f(u) - u),$$

což je rovnice se **separovanými proměnnými** x, u . Najdeme její řešení $u(x)$.

3. Obecné řešení původní rovnice (7) pak dostaneme užitím vztahu $y(x) = xu(x)$.

4 LINEÁRNÍ ODR 1. ŘÁDU

ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (8)$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce na otevřených intervalech, nazýváme **lineární obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu**.

Je-li $b(x) \equiv 0$, nazýváme rovnici (8) **homogenní lineární ODR 1. řádu**, v opačném případě mluvíme o **nehomogenní lineární ODR 1. řádu**.

Postup řešení lineární rovnice (8): Obecné řešení hledáme metodou

VARIACE KONSTANTY.

Probíhá ve dvou krocích:

1. Nejprve rovnici zhomogenizujeme, tj. položíme $b(x) = 0$. Dostaneme **homogenní lineární ODR příslušnou** (nebo též **přidruženou**) k rovnici (8) ve tvaru

$$y' = a(x)y, \quad (9)$$

v níž můžeme za předpokladu $y \neq 0$ separovat proměnné. Metodou separace proměnných nalezneme **obecné řešení** y_h homogenní rovnice (9) ve tvaru

$$y_h = Ce^{\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (10)$$

(volba $C = 0$ zahrnuje případ $y = 0$, který je rovněž řešením (9)).

2. Hledáme obecné řešení původní nehomogenní rovnice (8). Toto řešení je také tvaru (10), ale s tím rozdílem, že C již není konstanta, ale jistá funkce proměnné x . Má tedy tvar

$$y = C(x)e^{\int a(x) dx}. \quad (11)$$

Funkci $C(x)$ nalezneme tak, že vztah (11) i s jeho derivací (derivujeme jako součin)

$$y' = C'(x)e^{\int a(x) dx} + C(x)a(x)e^{\int a(x) dx}$$

dosadíme do původní nehomogenní rovnice (8). Po dosazení (členy obsahující $C(x)$ se musí vždy odečíst, jinak jsme při počítání udělali chybu) vyjde

$$C'(x)e^{\int a(x) dx} = b(x),$$

neboli

$$C'(x) = b(x)e^{-\int a(x) dx}.$$

Integrací dostaneme

$$C(x) = \int b(x)e^{-\int a(x) dx} dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením této funkce $C(x)$ do vztahu (11) dostáváme **obecné řešení nehomogenní lineární ODR** (8).

5 BERNOULLIOVA ROVNICE

ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad (12)$$

kde $r \in \mathbb{R}, r \neq 0, r \neq 1$ a funkce $a(x), b(x)$ jsou spojité na uvažovaných otevřených intervalech, se nazývá **Bernoulliova rovnice**.

Poznámka: Pro $r = 0$, resp. $r = 1$ bychom dostali lineární rovnici typu (8), resp. (6).

Postup řešení Bernoulliový rovnice (12): Zavedeme substituci

$$z = y^{1-r}.$$

Potom

$$\begin{aligned} z' &= (1-r) y^{1-r-1} y' \\ &= (1-r) y^{-r} [a(x)y + b(x)y^r] \\ &= \underbrace{(1-r) a(x)}_{p(x)} y^{1-r} + \underbrace{(1-r) b(x)}_{q(x)} \\ &= p(x)z + q(x), \end{aligned}$$

což je lineární ODR 1. řádu v proměnných x, z . Tuto rovnici vyřešíme metodou variace konstanty a z obecného řešení pak prostřednictvím dané substituce získáme obecné řešení původní rovnice (12).

Kromě řešení, která takto získáme, má rovnice (12) pro $r > 0$ také řešení $y(x) = 0$.

6 EXAKTNÍ DR A INTEGRAČNÍ FAKTOR

Nechť $P(x, y), Q(x, y)$ jsou funkce dvou proměnných, které mají spojité parciální derivace na množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že diferenciální rovnice tvaru

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (13)$$

se nazývá **exaktní**, jestliže výraz

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (14)$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$, která se nazývá **kmenová funkce**.

Má-li být výraz (14) totálním diferenciálem funkce F , musí platit

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).} \quad (15)$$

Platí:

Rovnice (13) je exaktní právě tehdy, když

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (16)$$

Je-li $F(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Postup řešení exaktní rovnice (13):

1. Nejprve ověříme, že výraz (14) je totálním diferenciálem, tj. že platí (16).
2. Nalezneme kmenovou funkci $F(x, y)$ tímto způsobem: Má-li být funkce $F(x, y)$ kmenovou funkcí totálního diferenciálu, musí platit vztahy (15). Vezmeme například první z těchto vztahů

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$$

a zintegrujeme ho podle proměnné x . Dostaneme

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y), \quad (18)$$

kde při integrování podle proměnné x považujeme y za konstantu (podobně jako při výpočtu parciální derivace) a $C(y)$ je integrační konstanta. Tato konstanta nezávisí na proměnné x , může to být ovšem funkce proměnné y . Abychom tuto veličinu zjistili, zderivujeme obdržanou rovnost podle y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y),$$

kde $C'(y)$ je obyčejná derivace funkce jedné proměnné. Vzhledem ke druhému vztahu v (15)

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

platí

$$\boxed{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y) = Q(x, y).}$$

Z rovnosti v rámečku vyjádříme $C'(y)$ a integrací (podle proměnné y) nalezneme hledanou funkci $C(y)$. (Dá se ukázat, že při úpravách vychází pro $C'(y)$ rovnice, která neobsahuje proměnnou x). Získanou funkci $C(y)$ dosadíme do (18) a tím jsme našli kmenovou funkci.

3. Zapišeme **obecné řešení exaktní rovnice** ve tvaru

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + D(x)$$

a pokračovat určením funkce $D(x)$, která tentokrát nezávisí na proměnné y , může však být funkcí proměnné x .

Pokud rovnice (13) není exaktní, tj. není splněna podmínka (16), pak hledáme takovou funkci $m(x, y) \neq 0$, aby rovnice

$$m(x, y) [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = m(x, y)P(x, y) dx + m(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

byla exaktní, tj. aby platilo

$$\frac{\partial(mP)}{\partial y} = \frac{\partial(mQ)}{\partial x}. \quad (19)$$

Funkce $m(x, y)$ se nazývá **integrační faktor** rovnice (13).

Uvedeme dva případy:

1. Je-li splněna podmínka

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \alpha(x),$$

pak integrační faktor bude pouze funkcí proměnné x , tj. $m = m(x)$ a vypočteme ho ze vztahu

$$m(x) = e^{\int \alpha(x) dx}.$$

2. Je-li splněna podmínka

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \beta(y),$$

pak integrační faktor bude pouze funkcí proměnné y , tj. $m = m(y)$ a vypočteme ho ze vztahu

$$m(y) = e^{\int \beta(y) dy}.$$

7 LODR VYŠŠÍCH ŘÁDŮ S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

7.1 Základní pojmy

ODR tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (20)$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$, $f(x)$ je funkce spojitá a definovaná na intervalu I , se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty** (zkráceně **LODR 2. řádu s konstantními koeficienty**).

Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, tj. je-li rovnice tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

mluvíme o **homogenní LODR 2. řádu**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro některé $x \in I$, mluvíme o **nehomogenní LODR 2. řádu**.

Řešením rovnice (20) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojitě derivace do 2. řádu na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (20) na I .

Úloha nalézt řešení rovnice (20) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad (21)$$

kde y_0, y_1 jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční úloha (Cauchyova úloha)**. Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (20).

ODR tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (22)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ a $f(x)$ je funkce spojitá a definovaná na intervalu I , se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty** (zkráceně **LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty**).

Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, tj. je-li rovnice tvaru

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

mluvíme o **homogenní LODR n -tého řádu**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro některé $x \in I$, mluvíme o **nehomogenní LODR n -tého řádu**.

Řešením (nebo též **integrálem**) rovnice (22) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojitě derivace do n -tého řádu na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (22) na I .

Úloha nalézt řešení rovnice (22) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (23)$$

kde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční úloha (Cauchyova úloha)**. Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (22).

7.2 Homogenní LODR 2. řádu

ODR tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (24)$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$, se nazývá **homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty**.

Dvojice řešení $y_1(x), y_2(x)$ homogenní rovnice (24), která jsou lineárně nezávislá na intervalu I , se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (24).

Tvoří-li funkce $y_1(x), y_2(x)$ fundamentální systém řešení rovnice (24), pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (25)$$

kde C_1, C_2 jsou vhodné (reálné) konstanty. Vztah (25) tedy vyjadřuje **obecné řešení** rovnice (24) na intervalu I .

Postup řešení: K dané rovnici sestavíme tzv. **charakteristickou rovnici**

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

kde λ je konstanta, a najdeme její kořeny.

Mohou nastat tyto případy:

1. *Charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 .* Potom má diferenciální rovnice (24) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen λ .* Potom má diferenciální rovnice (24) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b \neq 0$.* Potom má diferenciální rovnice (24) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

7.3 Homogenní LODR n -tého řádu

Jde o rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (26)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Systém řešení homogenní rovnice (26) $y_1(x), \dots, y_n(x)$, která jsou lineárně nezávislá na intervalu I , se nazývá **fundamentální systém řešení** této rovnice.

Tvoří-li funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentální systém řešení rovnice (26), pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (27)$$

kde $C_1, \dots, C_n$ jsou vhodné (reálné) konstanty. Vztah (27) vyjadřuje **obecné řešení** rovnice (26) na intervalu I .

Postup řešení: K dané rovnici sestavíme **charakteristickou rovnici**

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (28)$$

kde λ je konstanta, a najdeme její kořeny.

Fundamentální systém řešení rovnice (26) získáme takto:

1. Ke každému k -násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice (28) přísluší právě k lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (26) tvaru

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

2. Ke každému k -násobnému komplexnímu kořenu $\lambda = a + ib$ (a zároveň k jeho komplexně sdruženému kořenu $\bar{\lambda} = a - ib$) přísluší právě $2k$ lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (26) tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{ax} \cos bx, y_2 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_{k+1} &= e^{ax} \sin bx, y_{k+2} = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

7.4 Nehomogenní LODR vyšších řádů s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (29)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ je funkce definovaná, spojitá a nenulová na intervalu I .

Obecné řešení nehomogenní rovnice (29) lze psát ve tvaru

$$y = y_H + y_p, \quad (30)$$

kde y_H je obecné řešení tzv. **přidružené rovnice**, tj. homogenní rovnice příslušné k rovnici (29), tj. obecné řešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (31)$$

a y_p je libovolné partikulární řešení rovnice (29).

Existuje několik metod k nalezení partikulárního řešení, uvedeme pouze tzv. **metodu neurčitých koeficientů**. Touto metodou se hledá partikulární řešení y_p nehomogenní

LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (32)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ je nenulová spojitá funkce některého z dále uvedených typů. Někdy se těmito rovnicím říká **nehomogenní LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou**.

Uvedeme některé případy speciální pravé strany:

1. Pravá strana má tvar

$$f(x) = P_m(x),$$

tj. na pravé straně je polynom m -tého stupně.

Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot Q_m(x),$$

kde k je násobnost čísla 0 jako kořene charakteristické rovnice (pokud 0 není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.

Polynomy s neurčitými koeficienty vypadají následovně:

Polynom 0. stupně: $Q_0(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$ (tj. konstanta),

polynom 1. stupně: $Q_1(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$,

polynom 2. stupně: $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$,

polynom 3. stupně: $Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, atd.

2. Pravá strana má tvar

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{ax},$$

kde $P_m(x)$ je polynom m -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{ax},$$

kde k je násobnost čísla a jako kořene charakteristické rovnice (pokud a není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.

3. Pravá strana má tvar

$$f(x) = e^{ax} \cdot [P_m(x) \cdot \cos bx + Q_n(x) \cdot \sin bx], \quad (33)$$

kde $P_m(x)$, resp. $Q_n(x)$ jsou polynomy m -tého, resp. n -tého stupně.

Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot e^{ax} \cdot [R_r(x) \cdot \cos bx + S_r(x) \cdot \sin bx],$$

kde k je násobnost čísla $a \pm ib$ jako kořene charakteristické rovnice (pokud $a \pm ib$ není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $R_r(x), S_r(x)$ jsou polynomy s neurčitými koeficienty téhož stupně $r = \max\{m, n\}$.

Poznámka: Je-li pravá strana $f(x) = f_1(x) + \dots + f_t(x)$, kde funkce $f_1(x), \dots, f_t(x)$ jsou funkce tvaru (33), potom partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (29) je rovno

součtu partikulárních řešení $y_{p_1}, \dots, y_{p_t}$, která určíme vždy jednotlivě. Tedy

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_t}.$$

Tomuto zobecnění říkáme **princip superpozice**.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

8 ROVNICE SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI

8.1 Řešené příklady

Příklad 8.1 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Řešení: Jedná se o ODR 1. řádu se separovanými proměnnými. Derivaci y' nahradíme podílem diferenciálů $y' = \frac{dy}{dx}$ a za předpokladu $y \neq 0$ odseparujeme proměnné. Dostaneme tak postupně

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot y, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Obě strany rovnice zintegrujeme, pravou stranu podle proměnné x , levou stranu podle proměnné y a přidáme integrační konstantu.

Integrací dostaneme

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0.$$

Výslednou rovnici odlogaritmuje a odstraníme absolutní hodnoty.

Dostáváme řešení

$$\underline{y = Cx, \quad C \neq 0.}$$

Zbývá vyšetřit případ $y = 0$. Dosazením této konstantní funkce a její derivace $y' = 0$ do zadané rovnice zjistíme, že je jejím řešením, a to pro volbu $C = 0$. Můžeme ji tedy zahrnout do řešení. Obecné řešení dané rovnice je tedy tvaru

$$\underline{y = C \cdot x, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Příklad 8.2 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Řešení:

$$y' = -x \cdot \frac{1}{y}.$$

Opět se jedná o ODR 1. řádu se separovanými proměnnými. Derivaci y' nahradíme podílem diferenciálů $y' = \frac{dy}{dx}$, odseparujeme proměnné a zintegrujeme

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}, \\ \int y \, dy &= \int -x \, dx.\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Po úpravě získáme obecné řešení ve tvaru

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = C, \quad C \geq 0.}}$$

Příklad 8.3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y' = 4y.$$

Řešení: Za předpokladu, že $y \neq 0$ odseparujeme proměnné

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 4y, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int 4 dx.\end{aligned}$$

Obě strany rovnice zintegrujeme, pravou stranu podle x , levou stranu podle y .

Dostáváme

$$\ln |y| = 4x + C_1.$$

Odlogaritmuje

$$\begin{aligned}|y| &= e^{4x+C_1}, \\ |y| &= Ce^{4x}, \quad C = e^{C_1}, \quad C > 0.\end{aligned}$$

Odstraníme absolutní hodnotu

$$\underline{\underline{y = Ce^{4x}, \quad C \neq 0.}} \quad (34)$$

Zbývá vyšetřit případ $y = 0$. Po dosazení je vidět, že je tato konstantní funkce řešením dané rovnice. Je také vidět, že toto řešení lze zahrnout do (34) pro $C = 0$. OŘ lze tedy zapsat ve tvaru

$$\underline{\underline{y = Ce^{4x}, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 8.4 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$xy' = y^2 - y.$$

Řešení: Nejprve si vyjádříme y'

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y^2 - y}{x}, \\ y' &= \frac{y \cdot (y - 1)}{x}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y \cdot (y - 1)}{x}.\end{aligned}$$

Za předpokladu $y \neq 0 \wedge y \neq 1$ dostáváme postupně

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Integrand na levé straně rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y-1)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} \Rightarrow 1 = A(y-1) + By. \\ y=1 &: B=1 \\ y=0 &: A=-1 \end{aligned}$$

Dosadíme a integrací dostáváme

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \ln|y-1| - \ln|y| = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|.$$

Integrační konstantu uvedeme až na pravé straně v rovnici. Po integraci obou stran dostaneme

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Odlogaritmuje

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{y} &= Cx, \\ y-1 &= Cxy, \\ y &= 1 - Cxy, \\ y(1+Cx) &= 1. \end{aligned}$$

Funkce $y = 0$, $y = 1$ jsou také řešení dané rovnice, přičemž $y = 1$ lze zahrnout do obecného řešení pro $C = 0$. Dostáváme OŘ rce

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1+Cx}, y=0, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 8.5 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y + (1-x^2)y' = 0.$$

Řešení: Nejprve vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{1-x^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Za předpokladu $y \neq 0$ dostáváme postupně

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{1}{1-x^2} \right) dx.$$

Integrand na pravé straně rozložíme na parciální zlomky

$$-\frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1+x)}.$$

Vynásobením výrazem $1-x^2$ máme

$$-1 = A(1+x) + B(1-x) \implies \underline{A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}}.$$

Dosazením a integrací dostáváme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{(1+x)} \right) dx &= -\frac{1}{2} \cdot (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|. \end{aligned}$$

Po integraci obou stran máme

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0.$$

Vynásobíme dvěma

$$2 \ln|y| = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + \ln|C|, \quad C = 2C_1, \quad C \neq 0.$$

Odlogaritmuje a odstraníme absolutní hodnoty

$$|y|^2 = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \cdot |C|,$$

tj.

$$y^2 = C \cdot \frac{1-x}{1+x}, \quad C \neq 0. \quad (35)$$

Po dosazení konstantní fce $y = 0$ a její derivace do dané rce zjistíme, že je řešením a že ji lze zahrnout do (35) pro $C = 0$, takže OŘ je ve tvaru

$$\underline{\underline{y^2 = C \cdot \frac{1-x}{1+x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8.6 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y' \cdot \sin x = y \cdot \cos x.$$

Řešení: Nejprve si vyjádříme y'

$$y' = \frac{y \cdot \cos x}{\sin x}.$$

Za předpokladu $y \neq 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y \cdot \cos x}{\sin x}, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

Integrál na pravé straně rovnice řešíme substitucí

$$\begin{aligned}\sin x &= u, \\ \cos x \, dx &= du.\end{aligned}$$

Dosadíme

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{u} du.$$

Zintegrujeme, pravou stranu podle proměnné u , levou stranu podle proměnné y .

Dosadíme zpátky ze substituce

$$\begin{aligned}\ln |y| &= \ln |u| + \ln |C|, \quad C \neq 0, \\ \ln |y| &= \ln |\sin x| + \ln |C|, \quad C \neq 0.\end{aligned}$$

Po odlogaritmování a odstranění absolutních hodnot máme OŘ

$$\underline{\underline{y = C \cdot \sin x, \quad C \in \mathbb{R},}}$$

ve kterém je také zahrnuto řešení $y = 0$ pro $C = 0$.

Příklad 8.7 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$x^2 y' - y^2 = 1.$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \frac{1 + y^2}{x^2}.$$

Dále postupujeme stejně jako v předchozích příkladech

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1 + y^2}{x^2}, \\ \int \frac{dy}{1 + y^2} &= \int \frac{dx}{x^2}.\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

OŘ je ve tvaru

$$\underline{\underline{y = \operatorname{tg} \left(C - \frac{1}{x} \right), \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 8.8 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$2xyy' = x + 2.$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$\begin{aligned}y' &= \frac{x+2}{2xy}, \\y' &= \left(\frac{x+2}{2x}\right) \cdot \frac{1}{y}, \\y' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Postupujeme obdobně jako u předchozích příkladů

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{y}, \\y \, dy &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) dx, \\\int y \, dy &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) dx.\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}x + \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Výslednou rovnici vynásobíme dvěma a vyjádříme y^2 .

Dostáváme OŘ rovnice

$$\underline{\underline{y^2 = x + 2 \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 8.9 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$x^2y' = (2x - 1) \cdot y.$$

Řešení: Po úpravě dostáváme

$$y' = \frac{(2x - 1) \cdot y}{x^2}.$$

Za předpokladu $y \neq 0$ odseparujeme proměnné

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(2x-1) \cdot y}{x^2}, \\ \frac{1}{y} dy &= \frac{2x-1}{x^2} dx, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2x-1}{x^2}, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx.\end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned}\ln |y| &= 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ |y| &= e^{2 \ln x + \frac{1}{x} + C_1}, \\ |y| &= e^{\ln x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{C_1}, \\ |y| &= x^2 e^{\frac{1}{x}} C, \quad C = e^{C_1}, \quad C > 0.\end{aligned}$$

Dostáváme OŘ rce

$$\underline{\underline{y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}, C \neq 0.}}$$

Funkce $y = 0$ je rovněž řešením a lze ji zahrnout do předešlého vyjádření pro $C = 0$, takže OŘ je ve tvaru

$$\underline{\underline{y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 8.10 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y' (x^2 y + xy) = xy^2 + 2y^2 + x + 2.$$

Řešení: Vyjádříme y' a upravíme

$$\begin{aligned}y' &= \frac{xy^2 + 2y^2 + x + 2}{x^2 y + xy}, \\ y' &= \frac{(y^2 + 1)(x + 2)}{xy(x + 1)}, \\ y' &= \frac{x + 2}{x(x + 1)} \cdot \frac{y^2 + 1}{y}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x + 2}{x(x + 1)} \cdot \frac{y^2 + 1}{y}, \\ \int \frac{y}{y^2 + 1} dy &= \int \frac{x + 2}{x(x + 1)} dx.\end{aligned}$$

Vypočítáme integrál na pravé straně

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1)} dx &= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \right) dx = \left| \begin{array}{lcl} x+2 & = & A(x+1) + Bx \\ x=0 & : & A=2 \\ x=-1 & : & 1 = -B \Rightarrow B = -1 \end{array} \right| = \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C_1| = \\ &= \ln \left| \frac{C_1 x^2}{x+1} \right|, \quad C_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Integrál na levé straně bude

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{y^2+1} dy &= \left| \begin{array}{lcl} \text{substituce :} & & \\ y^2+1 & = & t \\ 2y dy & = & dt \\ y dy & = & \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln|y^2+1|. \end{aligned}$$

Po integraci tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln|y^2+1| &= \ln \left| \frac{C_1 x^2}{x+1} \right|, \\ \ln|y^2+1| &= \ln \left| \frac{C x^4}{(x+1)^2} \right|, \quad C = C_1^2, \quad C > 0. \end{aligned}$$

Dostáváme OŘ rovnice

$$\begin{aligned} y^2+1 &= \frac{C \cdot x^4}{(x+1)^2}, \quad C > 0, \\ y^2 &= \frac{C \cdot x^4}{(x+1)^2} - 1, \quad C > 0. \end{aligned}$$

Příklad 8.11 Najděte řešení splňující počáteční podmínku:

$$x^2 y' + y^2 = 0, \quad y(-1) = 1.$$

Řešení: Budeme postupovat tak, že nejdříve najdeme OŘ dané rce a poté dosadíme za x a y počáteční hodnoty. Tím získáme hodnotu konstanty C , kterou pak dosadíme do OŘ. Dostaneme tak partikulární řešení dané rce.

Nejprve vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y^2}{x^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y^2}{x^2}, \\ \int \frac{dy}{y^2} &= -\int \frac{1}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C_1.$$

Z výsledné rovnice vyjádříme y

$$\frac{1}{y} = C - \frac{1}{x} = \frac{Cx - 1}{x} \quad C = -C_1.$$

Dostaneme OŘ

$$\underline{y = \frac{x}{Cx - 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením hodnoty -1 za x a 1 za y do tohoto řešení dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-1}{C \cdot (-1) - 1}, \\ -C - 1 &= -1, \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Vypočtenou konstantu $C = 0$ dosadíme do obecného řešení $y = \frac{x}{Cx-1}$, čímž dostaneme tzv. **partikulární řešení** dané rovnice

$$\underline{\underline{y_p = -x.}}$$

Příklad 8.12 Najděte řešení splňující počáteční podmínku:

$$y' = y \cos x, \quad y(\pi) = 1.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} y' &= y \cos x, \\ \frac{dy}{dx} &= y \cos x, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Integrací dostáváme

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \sin x + C_1, \\ |y| &= e^{\sin x + C_1}, \quad e^{C_1} = C > 0, \\ |y| &= C e^{\sin x}, \quad C > 0, \\ y &= C e^{\sin x}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Získáváme OŘ rce

$$\underline{y = C e^{\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením hodnoty π za x a 1 za y dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= C e^{\sin \pi}, \\ 1 &= C e^0, \\ 1 &= C, \\ C &= 1. \end{aligned}$$

Po dosazení $C = 1$ do OŘ dostaneme partikulární řešení

$$\underline{\underline{y_p = e^{\sin x}.$$

8.2 Neřešené příklady

- | | |
|--|---|
| 1. $y' + xy = y$ | $[y = C \cdot e^{x - \frac{x^2}{2}}]$ |
| 2. $2y'\sqrt{x} = y$ | $[y = C \cdot e^{\sqrt{x}}]$ |
| 3. $y' = \frac{x+2}{x^3-2x^2}$ | $[y = \frac{1}{x} + \ln C \cdot \frac{x-2}{x}]$ |
| 4. $y' \cos^2 x = (1 + \cos^2 x)$ | $[y = x + \operatorname{tg} x + C]$ |
| 5. $y' + y = 2x + 3$ | $[y = C \cdot e^{-x} + 2x + 1]$ |
| 6. $xy^2y' + y = xy' - x^3y$ | $[\ln \frac{y}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C]$ |
| 7. $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2} \cdot y' = 0$ | $[y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}]$ |
| 8. $y' = (2y + 1) \cotg x, y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ | $[y = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sin^2 x - 1)]$ |
| 9. $\sin y \cdot \cos x dy = \cos y \cdot \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}$ | $[\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x]$ |
| 10. $(1 + e^x) \cdot \frac{y'}{y} + e^x = 0, y(0) = 1$ | $[y = 2 \cdot (1 + e^x)^{-1}]$ |
| 11. $y' = 2 \cdot \sqrt{y} \cdot \ln x, y(e) = 1$ | $[y = (x \cdot (\ln x - 1) + 1)^2]$ |
| 12. $y' = \frac{1-2x}{y^2}, y(0) = 1$ | $[y = \sqrt[3]{3 \cdot (x - x^2) + 1}]$ |

9 HOMOGENNÍ ODR

9.1 Řešené příklady

Příklad 9.1 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$y' = \frac{2y + x}{x}. \quad (36)$$

Řešení:

$$y' = \frac{2y}{x} + 1$$

Zavedeme substituci

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u x \Rightarrow y' = u' x + u.$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} u' x + u &= 2u + 1, \\ u' x &= 2u + 1 - u, \\ u' x &= u + 1, \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici se separovanými proměnnými x, u , pak u' nahradíme podílem

$$u' = \frac{du}{dx}$$

$$u' = \frac{1}{x} (u + 1). \quad (37)$$

a za předpokladu $u + 1 \neq 0$ (tj. $u \neq -1$) obě strany rovnice zintegrujeme, pravou stranu podle proměnné x levou stranu podle proměnné u

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} (u + 1), \\ \frac{1}{u + 1} du &= \frac{1}{x} dx, \\ \int \frac{du}{u + 1} &= \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Integrací dostaneme

$$\ln |u + 1| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0.$$

Výslednou rovnici odlogaritmuje a odstraníme absolutní hodnoty

$$u + 1 = C x, \quad C \neq 0.$$

Dostáváme obecné řešení separovatelné rovnice (37)

$$u = C x - 1, \quad C \neq 0. \quad (38)$$

Vyšetříme případ $u + 1 = 0 \Rightarrow u = -1$. Tuto konstantní funkci zderivujeme, tj. $u' = 0$, a dosadíme do rovnice (37), abychom ověřili, zda je jejím řešením. Po dosazení do

rovnice (37) dostaneme identitu, protože

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{x} \cdot (-1 + 1), \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

tedy $u = -1$ je řešením rovnice (37) můžeme ji přidat k obecnému řešení. Je ovšem vidět, že pro hodnotu konstanty $C = 0$ je to řešení zahrnuto v obecném řešení rovnice (38), celkově lze tedy obecné řešení rovnice (37) zapsat ve tvaru

$$\underline{u = Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Dosadíme zpátky ze substituce

$$\frac{y}{x} = Cx - 1.$$

Dostáváme OŘ zadané homogenní rovnice (36)

$$\underline{\underline{y = Cx^2 - x, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 9.2 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$y^2 y' = x^2 y' + 2xy. \quad (39)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} y^2 y' - x^2 y' &= 2xy, \\ y' \cdot (y^2 - x^2) &= 2xy, \\ y' &= \frac{2xy}{y^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Na pravé straně vytkneme v čitateli i ve jmenovateli x^2

$$y' = \frac{x^2 \left(2 \cdot \frac{y}{x} \right)}{x^2 \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right)}.$$

Zkrátíme x^2

$$y' = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1}.$$

Zavedeme substituci

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u x \Rightarrow y' = u' x + u.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}
 u'x + u &= \frac{2u}{u^2 - 1}, \\
 u'x &= \frac{2u}{u^2 - 1} - u, \\
 u'x &= \frac{2u - u(u^2 - 1)}{u^2 - 1}, \\
 u'x &= \frac{2u - u^3 + u}{u^2 - 1}, \\
 u'x &= \frac{3u - u^3}{u^2 - 1}, \\
 u' &= \frac{1}{x} \cdot \frac{3u - u^3}{u^2 - 1}, \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{3u - u^3}{u^2 - 1}, \\
 \frac{u^2 - 1}{3u - u^3} du &= \frac{1}{x} dx.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Integrál na levé straně řešíme substitucí $3u - u^3 = t$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{u^2 - 1}{3u - u^3} du &= \left| \begin{array}{rcl} 3u - u^3 & = & t \\ (3 - 3u^2)du & = & dt \\ -3 \cdot (1 - u^2)du & = & dt \\ (u^2 - 1)du & = & -\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{3}}{t} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t} = \\
 &= -\frac{1}{3} \ln |t| = -\frac{1}{3} \ln |3u - u^3|.
 \end{aligned}$$

Po integraci dostáváme

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3} \ln |3u - u^3| &= \ln |x| + \ln |C_1|, \quad C_1 \neq 0, \\
 \ln |3u - u^3| &= -3 \ln |x| + \ln |C|, \quad C = \frac{1}{C_1^3}, \quad C \neq 0, \\
 \ln |3u - u^3| &= \ln \left| \frac{C}{x^3} \right|.
 \end{aligned}$$

Obecné řešení rce (40) v implicitním tvaru je

$$3u - u^3 = \frac{C}{x^3}.$$

Zpětným dosazením ze substituce a upravením do co nejjednoduššího tvaru dostáváme obecné řešení homogenní rovnice (39)

$$\begin{aligned}
 3 \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x} \right)^3 &= \frac{C}{x^3}, \\
 \underline{\underline{3x^2y - y^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.}}
 \end{aligned}$$

Příklad 9.3 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$(x^2 - xy) \cdot y' + y^2 = 0. \quad (41)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-y^2}{x^2 - xy}, \\ y' &= \frac{x^2 \left(-\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{y}{x}\right)}, \\ y' &= \frac{-\frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y}{x}}. \end{aligned}$$

Zavedeme substituci

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u x \Rightarrow y' = u' x + u.$$

Dostaneme po dosazení

$$\begin{aligned} u' x + u &= \frac{-u^2}{1 - u}, \\ u' x &= \frac{-u^2}{1 - u} - u, \\ u' x &= \frac{-u^2 - u \cdot (1 - u)}{1 - u}, \\ u' x &= \frac{-u^2 - u + u^2}{1 - u}, \\ u' x &= \frac{-u}{1 - u}, \\ u' &= \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-u}{1 - u}\right), \\ \frac{\frac{-u}{1 - u}}{\frac{1 - u}{-u}} &= \frac{1}{x} dx, \\ \frac{1 - u}{-u} du &= \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Integrací a následným odlogaritmováním a odstraněním absolutních hodnot postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - u}{-u} du &= \int \frac{1}{x} dx, \\ \int \left(-\frac{1}{u} + 1\right) du &= \int \frac{1}{x} dx, \\ -\ln |u| + u &= \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0, \\ -\ln |u| + \ln e^u &= \ln |x| + \ln |C|, \quad C \neq 0, \\ \frac{e^u}{u} &= Cx. \end{aligned} \quad (42)$$

Do OŘ (42) v implicitním tvaru dosadíme substituci

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{y}{x}}}{\frac{y}{x}} &= Cx, \\ e^{\frac{y}{x}} &= Cy, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dostáváme OŘ zadané homogenní rovnice (41) v implicitním tvaru

$$\underline{\underline{y = Ce^{\frac{y}{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 9.4 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$x^2 y' = x^2 + xy + y^2. \quad (43)$$

Řešení:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}.$$

Zavedeme substituci $\frac{y}{x} = u$.

Při řešení zadané rovnice postupujeme obdobným způsobem jako u předchozích příkladů

$$\begin{aligned} u'x + u &= 1 + u + u^2, \\ u'x &= 1 + u^2, \\ u'x &= \frac{1 + u^2}{x}, \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1 + u^2}{x}, \\ \int \frac{du}{1 + u^2} &= \int \frac{dx}{x}, \\ \operatorname{arctg} u &= \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ u &= \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \\ \frac{y}{x} &= \operatorname{tg} (\ln |x| + C). \end{aligned}$$

Dostáváme OŘ zadané homogenní rovnice (43)

$$\underline{\underline{y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 9.5 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$y' = \frac{x + 4y}{y - 4x}. \quad (44)$$

Řešení: V čitateli i ve jmenovateli na pravé straně vytkneme x

$$y' = \frac{x \left(1 + 4\frac{y}{x}\right)}{x \left(\frac{y}{x} - 4\right)}$$

a po jeho zkrácení dostaneme rovnici ve tvaru

$$y' = \frac{1 + 4\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 4}.$$

Zavedeme substituci $\frac{y}{x} = u$

a postupujeme obdobným způsobem jako u předchozích příkladů

$$\begin{aligned}
 u'x + u &= \frac{1 + 4u}{u - 4}, \\
 u'x &= \frac{1 + 4u - u(u - 4)}{u - 4}, \\
 u'x &= \frac{1 + 4u - u^2 + 4u}{u - 4}, \\
 u'x &= \frac{-u^2 + 8u + 1}{u - 4}, \\
 u' &= \frac{-u^2 + 8u + 1}{u - 4} \cdot \frac{1}{x}, \\
 \frac{du}{dx} &= \frac{-u^2 + 8u + 1}{u - 4} \cdot \frac{1}{x}, \\
 \int \frac{(u - 4)}{-u^2 + 8u + 1} du &= \int \frac{dx}{x}.
 \end{aligned}$$

Vynásobíme-li čitatele na levé straně číslem (-2) , dostaneme v něm derivaci jmenovatele, a můžeme tak použít integrační vzorec

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

Aby ovšem zůstala rovnice zachována, musíme vynásobit číslem (-2) i pravou stranu

$$\begin{aligned}
 \int \frac{-2 \cdot (u - 4)}{-u^2 + 8u + 1} du &= -2 \int \frac{dx}{x}, \\
 \ln |-u^2 + 8u + 1| &= -2 \ln |x| + \ln |C|, \\
 \ln |-u^2 + 8u + 1| &= -\ln |x^2| + \ln |C|, \\
 \ln |-u^2 + 8u + 1| &= \ln \left| \frac{C}{x^2} \right|, \\
 -u^2 + 8u + 1 &= \frac{C}{x^2}, \\
 -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 8 \cdot \frac{y}{x} + 1 &= \frac{C}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Dostáváme OŘ zadané homogenní rovnice (44)

$$\underline{\underline{-y^2 + 8xy + x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 9.6 Řešte homogenní diferenciální rovnici:

$$(xy' - y) \cdot \cos \frac{y}{x} - x = 0. \quad (45)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (xy' - y) &= \frac{x}{\cos \frac{y}{x}}, \\ xy' &= \frac{x}{\cos \frac{y}{x}} + y, \\ y' &= \frac{x}{\cos \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{x}, \\ y' &= \frac{1}{\cos \frac{y}{x}} + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Po stejné substituci $\frac{y}{x} = u$ máme

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{1}{\cos u} + u, \\ u'x &= \frac{1}{\cos u}, \\ u' &= \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{x}, \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\cos u} \cdot \frac{1}{x}, \\ \int \cos u \, du &= \int \frac{1}{x} \, dx, \\ \sin u &= \ln |x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ u &= \arcsin(\ln |x| + C), \\ \frac{y}{x} &= \arcsin(\ln |x| + C). \end{aligned}$$

Dostáváme OŘ zadané homogenní rovnice (45)

$$\underline{\underline{y = x \arcsin(\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

9.2 Neřešené příklady

1. $2xy' = 3y + x$	$[C \cdot x^3 = (x + y)^2]$
2. $x^2 + y^2 = 2xy \cdot y'$	$[x^2 - y^2 = C \cdot x]$
3. $yy' = 2y - x$	$[e^{\frac{x}{y-x}} = C \cdot (y - x)]$
4. $x^2y' = y^2 - 2x^2$	$[\frac{y-2x}{y+x} = C \cdot x^3]$
5. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$	$[y = x \sin(\ln x + C)]$
6. $xy' \cdot \sin \frac{y}{x} = y \cdot \sin \frac{y}{x} - x$	$[x = C \cdot e^{\cos \frac{y}{x}}]$
7. $xy' - y = y \cdot \ln \frac{y}{x}$	$[y = x \cdot e^{C \cdot x}]$
8. $xy' = y \cdot \cos \ln \frac{y}{x}$	$[\ln C \cdot x = \cotg(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x})]$
9. $y^2 - xy + x^2y' = 0$	$[x = C \cdot e^{\frac{x}{y}}, y = 0]$
10. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$	$[y^2 = x^2 \ln(Cx^2), x \neq 0, C > 0]$

10 LINEÁRNÍ ODR 1. ŘÁDU

10.1 Řešené příklady

Příklad 10.1 Řešte lineární diferenciální rovnici 1. řádu:

$$y' + 3y - 5x = 0. \quad (46)$$

Řešení: Nejprve si vyjádříme y'

$$y' = \underbrace{-3}_{a(x)} y + \underbrace{5x}_{b(x)}. \quad (47)$$

Máme $a(x) = -3$, $b(x) = 5x$. Dále řešíme ve dvou krocích:

1. V prvním kroku zhomogenizujeme rovnici

$$y' = -3y.$$

a nalezneme její obecné řešení

$$y_H = Ce^{\int a(x) dx} = Ce^{\int (-3) dx} = Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Ve druhém kroku najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice (47) metodou variace konstanty

$$y = C(x)e^{-3x}. \quad (48)$$

Řešení zderivujeme (jako součin)

$$y' = C'(x)e^{-3x} + C(x)e^{-3x} \cdot (-3).$$

Dosadíme y a y' do rovnice (47)

$$C'(x)e^{-3x} + C(x)e^{-3x} \cdot (-3) = -3C(x)e^{-3x} + 5x.$$

Pozn. Po dosazení y a y' do rovnice (46) by měly vždy vypadnout členy obsahující $C(x)$.

Dostaneme

$$C'(x) = 5xe^{3x}. \quad (49)$$

Funkci $C(x)$ najdeme integrací, pro výpočet použijeme metodu per partes

$$\begin{aligned} C(x) &= \int 5xe^{3x} dx = 5 \int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{3x} & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = \\ &= 5 \left(x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int 1 \cdot e^{3x} dx \right) = 5 \left(x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{9} e^{3x} + C \right) = \\ &= \frac{5}{3} x e^{3x} - \frac{5}{9} e^{3x} + C = \left(\frac{5}{3} x - \frac{5}{9} \right) e^{3x} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosazením $C(x)$ do (48) dostaneme obecné řešení rovnice (46), resp. (47)

$$\begin{aligned} y &= \left[\left(\frac{5}{3} x - \frac{5}{9} \right) e^{3x} + C \right] e^{-3x}, \\ y &= \frac{5}{3} x - \frac{5}{9} + C e^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.2 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$y' - 4y = e^{-2x}. \quad (50)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \underbrace{4}_{a(x)} y + \underbrace{e^{-2x}}_{b(x)}. \quad (51)$$

Máme $a(x) = 4$, $b(x) = e^{-2x}$. Při řešení opět postupujeme ve dvou krocích:

1. V tomto kroku zhomogenizujeme rovnici a najdeme její OŘ

$$\begin{aligned} y' &= 4y \\ y_H &= Ce^{4x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (52)$$

2. V dalším kroku najdeme OŘ nehomogení rovnice (51) metodou variace konstanty

$$y = C(x)e^{4x}. \quad (53)$$

Zintegrujeme (jako součin)

$$y' = C'(x)e^{4x} + C(x)e^{4x} \cdot 4.$$

Dosadíme y a y' do rovnice (51)

$$\begin{aligned} C'(x)e^{4x} + C(x)e^{4x} \cdot 4 &= 4C(x)e^{4x} + e^{-2x}, \\ C'(x)e^{4x} &= e^{-2x}, \\ C'(x) &= e^{-2x} \cdot e^{-4x}, \\ C'(x) &= e^{-6x}. \end{aligned}$$

(54)

Zintegrujeme a dostaneme

$$C(x) = \int e^{-6x} dx = \frac{e^{-6x}}{-6} + C.$$

Dosazením $C(x)$ do (53) dostaneme OŘ rovnice (50)

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{6} e^{-6x} + C \right) \cdot e^{4x}, \\ y &= Ce^{4x} - \frac{1}{6} e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.3 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$y' + y = \cos x. \quad (55)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \underbrace{-1}_{a(x)} y + \underbrace{\cos x}_{b(x)}. \quad (56)$$

Máme $a(x) = -1$, $b(x) = \cos x$. Řešíme ve dvou krocích:

1. Zhomogenizujeme rovnici

$$y' = -y.$$

a najdeme její OŘ

$$y_H = Ce^{\int (-1) dx} = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogenní rovnice (55) metodou variace konstanty

$$y = C(x)e^{-x}. \quad (57)$$

Zderivujeme (jako součin)

$$y' = C'(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} \cdot (-1).$$

Dosadíme y a y' do rce (56)

$$C'(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} \cdot (-1) = \cos x - C(x)e^{-x}.$$

Dostaneme

$$C'(x) = e^x \cos x.$$

Zintegrujeme metodou per partes

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x - \\ &- \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + C_1, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nyní integrál z pravé strany převedeme na levou dostaneme

$$\begin{aligned} 2 \int e^x \cos x dx &= e^x (\sin x + \cos x) + C_1, \\ \int e^x \cos x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C, \quad C = \frac{1}{2} C_1, \\ C(x) &= \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

Dosazením $C(x)$ do (57) dostaneme OŘ rce (55)

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C \right) e^{-x}, \\ y &= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.4 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$y' - 2y = 2 \cos x. \quad (58)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \underbrace{2 \cos x}_{b(x)} + \underbrace{2}_{a(x)} y. \quad (59)$$

Máme $a(x) = 2$, $b(x) = 2 \cos x$.

1. Zhomogenizujeme rovnici

$$y' = 2y.$$

a nalezneme její OŘ

$$y_H = Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogenní rovnice (59) metodou VK

$$y = C(x)e^{2x}. \quad (60)$$

Zderivujeme (jako součin)

$$y' = C'(x)e^{2x} + C(x)e^{2x} \cdot 2.$$

Dosadíme y a y' do rovnice (59)

$$C'(x)e^{2x} + C(x)e^{2x} \cdot 2 = 2 \cos x + C(x)e^{2x} \cdot 2.$$

Dostaneme

$$C'(x) = e^{-2x} \cdot 2 \cos x.$$

$$C(x) = \int e^{-2x} \cdot 2 \cos x = \int 2 \cdot e^{-2x} \cos x \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-2x} & u' = -2 \cdot e^{-2x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= e^{-2x} \sin x - \int (-2e^{-2x}) \cdot \sin x \, dx = \\ &= e^{-2x} \sin x + \int 2e^{-2x} \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2 \cdot e^{-2x} & u' = -4e^{-2x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^{-2x} \sin x + 2 \cdot e^{-2x} \cdot (-\cos x) - \int (-4e^{-2x}) \cdot (-\cos x) \, dx = \\ &= e^{-2x} \sin x - 2 \cdot e^{-2x} \cos x - 4 \int e^{-2x} \cos x \, dx + C_1, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme tedy rovnici

$$\int e^{-2x} \cos x \, dx = e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) - 4 \int e^{-2x} \cos x \, dx + C_1.$$

K oběma stranám rovnice přičteme $4 \int e^{-2x} \cos x \, dx$, dostaneme

$$5 \int e^{-2x} \cos x \, dx = e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) + C_1,$$

$$\int e^{-2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) + C, \quad C = \frac{1}{5} C_1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$C(x) = 2 \int e^{-2x} \cos x \, dx = 2 \left[\frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) + C \right] = e^{-2x} \left(\frac{2}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) + C.$$

Dosazením $C(x)$ do (60) dostaneme OŘ rce (58)

$$\begin{aligned} y &= \left[e^{-2x} \left(\frac{2}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) + C \right] e^{2x}, \\ y &= \frac{2}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.5 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$2xy' + x^2 - 6y = 0. \quad (61)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= \frac{6y - x^2}{2x}, \\ y' &= \frac{3y}{x} - \frac{x}{2}, \\ y' &= \underbrace{-\frac{x}{2}}_{b(x)} + \underbrace{\frac{3}{x}}_{a(x)} y. \end{aligned} \quad (62)$$

Řešíme ve dvou krocích

1. Zhomogenizujeme rovnici

$$y' = \frac{3}{x}y.$$

a nalezneme její OŘ

$$y_H = Ce^{\int \frac{3}{x} dx} = Ce^{\frac{1}{3} \ln |x|} = Ce^{\ln |x|^{\frac{1}{3}}} = Cx^{\frac{1}{3}}, C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogenní rovnice (62) metodou VK

$$y = C(x)x^3. \quad (63)$$

Zderivujeme

$$y' = C'(x)x^3 + C(x)3x^2.$$

Dosadíme y a y' do rovnice (62)

$$\begin{aligned} C'(x)x^3 + C(x)3x^2 &= \frac{3}{x}C(x)x^3 - \frac{x}{2}, \\ C'(x)x^3 + C(x)3x^2 &= C(x)3x^2 - \frac{x}{2}, \\ C'(x) &= -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^3}, \\ C'(x) &= -\frac{1}{2x^2}, \\ C(x) &= \int -\frac{1}{2x^2} dx, \\ C(x) &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} dx, \\ C(x) &= \frac{1}{2x} + C, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosazením $C(x)$ do (62) dostaneme OŘ rce (61)

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2x} + C \right) x^3, \\ y &= \left(\frac{x^2}{2} + Cx^3 \right), C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.6 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}. \quad (64)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \underbrace{xe^{-x^2}}_{b(x)} - \underbrace{2x}_{a(x)} y. \quad (65)$$

1. Zhomogenizujeme

$$y' = -2xy$$

a nalezneme OŘ této rovnice

$$y_H = Ce^{\int (-2x) dx} = Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogení rovnice (65) metodou VK

$$y = C(x)e^{-x^2}. \quad (66)$$

Zderivujeme

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Dosadíme y a y' do rovnice (65)

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x) = xe^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

$$C'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{e^{-x^2}},$$

$$C'(x) = x.$$

Zintegrujeme a dostaneme

$$C(x) = \int x dx,$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme $C(x)$ do (66) a dostaneme OŘ rovnice (64)

$$\underline{\underline{y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 10.7 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$y' = y \operatorname{tg} x + \cos x. \quad (67)$$

Řešení: Řešení najdeme opět stejným postupem:

1. Zhomogenizujeme

$$y' = y \operatorname{tg} x.$$

a nalezneme OŘ

$$y_H = Ce^{\int \operatorname{tg} x dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exponent upravíme

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| = \ln \frac{1}{|\cos x|}$$

a dostaneme

$$y_H = C e^{\ln \frac{1}{|\cos x|}} = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogéní rovnice (67) metodou VK

$$\begin{aligned} y &= \frac{C(x)}{\cos x}, \\ y' &= \frac{C'(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}, \\ y' &= \frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x}. \end{aligned} \quad (68)$$

Dosadíme y a y' do (67)

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} &= \frac{C(x)}{\cos x} \cdot \operatorname{tg} x + \cos x, \\ \frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} &= \frac{C(x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} + \cos x, \\ \frac{C'(x)}{\cos x} &= \cos x, \\ C'(x) &= \cos^2 x. \end{aligned}$$

Zintegrujeme

$$C(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením $C(x)$ do (68) dostaneme OŘ rce (67)

$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C}{\cos x}, \\ y &= \frac{\frac{x}{2} + \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{4} + C}{\cos x}, \\ y &= \frac{x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 10.8 Řešte lineární diferenciální rovnici:

$$(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2. \quad (69)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$\begin{aligned} (1 + x^2) y' &= (1 + x^2)^2 + 2xy, \\ y' &= \frac{(1 + x^2)^2 + 2xy}{1 + x^2}, \\ y' &= \underbrace{\frac{2x}{1 + x^2}}_{a(x)} y + \underbrace{(1 + x^2)}_{b(x)}. \end{aligned} \quad (70)$$

Postupujeme analogicky:

1. Zhomogenizujeme rovnici

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} y.$$

Její OŘ je

$$y_H = C e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = C e^{\ln|1+x^2|} = C(1+x^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Najdeme OŘ nehomogení rovnice (70) metodou VK

$$y = C(x)(1+x^2). \quad (71)$$

Zderivujeme (jako součin)

$$y' = C'(x) \cdot (1+x^2) + C(x) \cdot 2x.$$

Dosadíme y a y' do rovnice (70)

$$C'(x) \cdot (1+x^2) + C(x) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2} \cdot C(x) \cdot (1+x^2) + 1+x^2.$$

Pozn. Platí stejné pravidlo jako v předchozím příkladu

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot (1+x^2) &= 1+x^2, \\ C'(x) &= 1. \end{aligned} \quad (72)$$

Integrací dostaneme

$$C(x) = \int 1 dx = x + C.$$

Po dosazení $C(x)$ do (71) dostaneme OŘ (69)

$$\underline{\underline{y = (x + C) \cdot (1 + x^2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 10.9 Řešte lineární diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y' = -\frac{y}{x} + 3x, \quad y(1) = -3. \quad (73)$$

Řešení: Nejprve najdeme OŘ rovnice (73) analogicky jako ve všech předchozích příkladech:

$$y' = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{3x}_{b(x)}.$$

1. Zhomogenizujeme

$$y' = -\frac{1}{x} y.$$

a nalezneme její OŘ

$$y_H = C e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C e^{-\ln|x|} = C \frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. OŘ hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cdot \frac{1}{x}. \quad (74)$$

Zderivujeme

$$y' = C'(x) \cdot \frac{1}{x} + C(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2}.$$

Dosadíme y a y' do rce (10.9)

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot \frac{1}{x} + C(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} &= -\frac{1}{x} \cdot C(x) \cdot \frac{1}{x} + 3x, \\ C'(x) &= 3x^2, \\ C(x) &= \int 3x^2 dx = x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosazením $C(x)$ do rce (74) dostaneme OŘ rovnice (73)

$$y = (x^3 + C) \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (75)$$

Nyní vyřešíme počáteční úlohu dosazením hodnoty 1 za x a -3 za y do tohoto řešení.

Dostaneme

$$\begin{aligned} -3 &= 1 - \frac{C}{1}, \\ -3 &= 1 - C, \\ C &= 4. \end{aligned}$$

Vypočtenou konstantu $C = 4$ dosadíme do OŘ (75), tím dostaneme tzv. **partikulární řešení** dané rovnice ve tvaru

$$\underline{\underline{y_p = x^2 + \frac{4}{x}}}.$$

Příklad 10.10 Řešte lineární diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1. \quad (76)$$

Řešení: Upravíme

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 - y \cdot \sin x}{\cos x}, \\ y' &= \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{b(x)} - y \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{a(x)}. \end{aligned} \quad (77)$$

OŘ najdeme ve dvou krocích

1. Zhomogenizujeme rovnici

$$y' = -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot y.$$

a nalezneme její OŘ

$$\begin{aligned} y_H &= Ce^{\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = Ce^{\int \frac{dt}{t}} = Ce^{\ln|t|} = \\ &= Ce^{\ln|\cos x|} = C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. OŘ rovnice (77) předpokládáme ve tvaru

$$y = C(x) \cos x. \quad (78)$$

Zderivujeme

$$y' = C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot (-\sin x).$$

Dosadíme y a y' do rce (76)

$$\begin{aligned} [C'(x) \cdot \cos x + C(x) \cdot (-\sin x)] \cdot \cos x + C(x) \cdot \cos x \cdot (\sin x) &= 1, \\ C'(x) \cdot \cos^2 x + C(x) \cdot \cos x \cdot (-\sin x) + C(x) \cdot \cos x \cdot (\sin x) &= 1, \\ C'(x) \cdot \cos^2 x &= 1, \\ C'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Zintegrujeme a dostaneme

$$C(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením $C(x)$ do (78) dostaneme OŘ rce (76)

$$\begin{aligned} y &= (\operatorname{tg} x + C) \cos x, \\ y &= \operatorname{tg} x \cos x + C \cos x, \\ y &= \frac{\sin x}{\cos x} \cos x + C \cos x, \\ y &= \sin x + C \cos x. \end{aligned} \tag{79}$$

Dosazením hodnoty 0 za x a 1 za y do tohoto řešení dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 1 \cdot C, \\ C &= 1. \end{aligned}$$

Vypočtenou konstantu $C = 1$ dosadíme do OŘ (79), tím dostaneme tzv. **partikulární řešení** dané rovnice

$$\underline{\underline{y_p = \sin x + \cos x.}}$$

10.2 Neřešené příklady

1. $y' - 7y = e^x$	$[y = C \cdot e^{7x} - \frac{1}{6} \cdot e^x]$
2. $y' + 2y = 4x$	$[y = C \cdot e^{-2x} + 2x - 1]$
3. $y' = 6xy + 4x \cdot e^{3x^2}$	$[y = (2x^2 + C) \cdot e^{3x^2}]$
4. $y' + y = \sin x$	$[y = \frac{1}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + C \cdot e^{-x}]$
5. $y' + \frac{1}{x+1} \cdot y = \sin x$	$[y = \frac{\sin x - (x+1) \cdot \cos x + C}{x+1}]$
6. $y' - 3x^2y = (x+2) \cdot e^{x^3}$	$[y = (\frac{x^2}{2} + 2x + C) \cdot e^{x^3}]$
7. $y' \cdot e^{x^2} + 2xy \cdot e^{x^2} = \cos x$	$[y = (\sin x + C) \cdot e^{-x^2}]$
8. $x^2y' - 2xy = -3, y(-1) = 1$	$[y_p = 2x^2 + \frac{1}{x}]$
9. $y' + x - xy = 0, y(0) = -4$	$[y_p = 1 - 5e^{\frac{x^2}{2}}]$
10. $y' + y = \sin x, y(\pi) = 1$	$[y_p = \frac{1}{2} (e^{\pi-x} + \sin x - \cos x)]$

11 BERNOULLIOVA ROVNICE

11.1 Řešené příklady

Příklad 11.1 Řešte Bernoulliovu diferenciální rovnici:

$$xy' + xy^3 - y = 0. \quad (80)$$

Řešení: Z rovnice si nejdříve vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y - xy^3}{x}, \\ y' &= \frac{1}{x}y - y^3. \end{aligned} \quad (81)$$

Z druhého členu na pravé straně plyne, že $r = 3$, zavedeme tedy substituci

$$z = y^{1-r} = y^{1-3} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}.$$

Derivací dostáváme

$$z' = -2y^{-3} \cdot y'.$$

Za y' dosadíme z (81) a roznásobíme

$$z' = -2y^{-3} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{x}y - y^3 \right]}_{y'} = -\frac{2}{x}y^{-2} + 2.$$

Nyní y^{-2} nahradíme proměnnou z a dostaneme tak lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$z' = -\frac{2}{x}z + 2. \quad (82)$$

V této rovnici označíme $a(x) = -\frac{2}{x}$, $b(x) = 2$.

1. Rovnici zhomogenizujeme

$$z' = -\frac{2}{x} \cdot z$$

a najdeme její obecné řešení, například užitím vztahu

$$z_H = Ce^{\int a(x) dx}.$$

Tedy

$$z_H = Ce^{\int (-\frac{2}{x}) dx} = Ce^{-2 \ln |x|} = Ce^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{C}{x^2}.$$

2. Obecné řešení nehomogenní rovnice (82) hledáme ve tvaru

$$z = \frac{C(x)}{x^2}. \quad (83)$$

Zderivujeme (jako podíl)

$$z' = \frac{C'(x) \cdot x^2 - C(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{C(x) \cdot 2}{x^3}.$$

Dosadíme z a z' do rovnice (82)

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{C(x) \cdot 2}{x^3} = 2 - \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)}{x^2} &= 2, \\ C'(x) &= 2x^2. \end{aligned}$$

$C(x)$ zjistíme integrací

$$C(x) = \int 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} + C.$$

Funkci $C(x)$ dosadíme do hledaného obecného řešení (83)

$$z = \frac{\frac{2x^3}{3} + C}{x^2} = \frac{2x^3 + 3C}{3x^2}.$$

Zbývá nahradit zpátky $\frac{1}{y^2}$ za z

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2x^3 + 3C}{3x^2}.$$

Obecné řešení rovnice (80) je tedy tvaru

$$\underline{\underline{y^2 = \frac{3x^2}{2x^3 + 3C}, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Řešení $y = 0$ jsme k obecnému připsali proto, že je-li $r > 0$, má Bernoulliho rovnice i řešení $y = 0$.

Příklad 11.2 Najděte obecné řešení Bernoulliho diferenciální rovnice:

$$x^2 y^2 y' + x y^3 = 1. \quad (84)$$

Řešení: Z dané rovnice nejprve opět vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 - x y^3}{x^2 y^2}, \\ y' &= \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{x y^3}{x^2 y^2}, \\ y' &= \frac{1}{x^2} y^{-2} - \frac{1}{x} y \quad \Rightarrow \quad r = -2. \end{aligned} \quad (85)$$

Zavedeme substituci

$$z = y^{1-r} = y^{1-(-2)} = y^3,$$

zderivujeme

$$z' = 3y^2 \cdot y',$$

dosadíme za y' ze vztahu (85) a zjednodušíme

$$z' = 3y^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{y}{x} \right]}_{y'},$$

$$z' = \frac{3}{x^2} - \frac{3y^3}{x}.$$

Nyní y^3 nahradíme proměnnou z , čímž opět dostaneme lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$z' = -\frac{3}{x}z + \frac{3}{x^2}. \quad (86)$$

Máme $a(x) = -\frac{3}{x}$, $b(x) = \frac{3}{x^2}$. Řešíme opět ve dvou krocích

1. Rovnici zhomogenizujeme

$$z' = -\frac{3}{x}z$$

a najdeme její obecné řešení

$$z_H = Ce^{\int a(x) dx} = Ce^{\int (-\frac{3}{x}) dx} = Ce^{-3 \ln |x|} = Ce^{\ln |x|^{-3}} = \frac{C}{x^3}.$$

2. Obecné řešení nehomogenní rovnice (86) hledáme ve tvaru

$$z = \frac{C(x)}{x^3}. \quad (87)$$

Zderivujeme (jako podíl)

$$z' = \frac{C'(x) \cdot x^3 - C(x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{C(x) \cdot 3}{x^4}.$$

Dosadíme z a z' do rovnice (86)

$$\frac{C'(x)}{x^3} - \frac{C(x) \cdot 3}{x^4} = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^3}.$$

Zkrátíme a zintegrujeme

$$\frac{C'(x)}{x^3} = \frac{3}{x^2},$$

$$C'(x) = \frac{3x^3}{x^2} = 3x,$$

$$C(x) = \int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + C.$$

Vypočtenou funkci $C(x)$ dosadíme do (87)

$$z = \frac{\frac{3x^2}{2} + C}{x^3} = \frac{3x^2 + 2C}{2x^3}.$$

Dosadíme zpátky y^3 za z a dostaneme obecné řešení dané rovnice (84)

$$\underline{\underline{y^3 = \frac{3x^2 + 2C}{2x^3}, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 11.3 Řešte Bernoulliovu diferenciální rovnici:

$$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}. \quad (88)$$

Řešení: Postupujeme analogicky jako v předchozích příkladech

$$y' = \frac{x^2\sqrt{y} + 4y}{x},$$

$$y' = x\sqrt{y} + \frac{4y}{x} \Rightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Zavedeme substituci

$$z = y^{1-r} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}.$$

Zderivujeme a upravíme

$$z' = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \underbrace{\left[x\sqrt{y} + \frac{4y}{x} \right]}_{y'} = \frac{x}{2} + \frac{4y}{2\sqrt{y}x} = \frac{x}{2} + \frac{2y}{\sqrt{y}x} = \frac{x}{2} + \frac{2\sqrt{y}}{x}.$$

Dostaneme lineární DR 1. řádu ve tvaru

$$z' = \frac{2}{x} z + \frac{x}{2}. \quad (89)$$

Dále řešíme jako lineární rovnici:

1. Rovnici zhomogenizujeme

$$z' = \frac{2}{x} z.$$

Její obecné řešení bude

$$z_H = Ce^{\int \frac{2}{x} dx} = Ce^{2 \ln |x|} = Ce^{\ln x^2} = Cx^2.$$

2. Obecné řešení rovnice (89) hledáme ve tvaru

$$z = C(x)x^2. \quad (90)$$

Zderivujeme

$$z' = C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x.$$

Dosadíme z a z' do rovnice (89)

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x &= \frac{2}{x} \cdot C(x) \cdot x^2 + \frac{x}{2}, \\ C'(x) \cdot x^2 &= \frac{x}{2}, \\ C'(x) &= \frac{1}{2x}, \\ C(x) &= \int \frac{1}{2x} dx, \\ C(x) &= \frac{1}{2} \ln |x| + C. \end{aligned}$$

$C(x)$ dosadíme do (90)

$$z = \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right) \cdot x^2.$$

Vrátíme se zpět ze substituce $z = \sqrt{y}$

$$y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right) \cdot x^2$$

a dostaneme obecné řešení rovnice (88) ve tvaru

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln |x| + C \right)^2 \cdot x^4, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 11.4 Řešte Bernoulliovu diferenciální rovnici:

$$xy' + y - y^3 \ln x = 0. \quad (91)$$

Řešení: Z rovnice vyjádříme y'

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-y + y^3 \ln x}{x}, \\ y' &= -\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} \cdot y^3 \Rightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Zavedeme substituci

$$z = y^{1-r} = y^{1-3} = y^{-2} = \frac{1}{y^2},$$

zderivujeme, dosadíme za y' a upravíme na lineární DR 1. řádu

$$z' = -2y^{-3} \cdot y' = -2y^{-3} \cdot \underbrace{\left[\frac{\ln x}{x} y^3 - \frac{y}{x} \right]}_{y'} = -\frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} y^{-2}$$

$$z' = -\frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} z. \quad (92)$$

1. Zhomogenizovaná rovnice má tvar

$$z' = \frac{2}{x}z,$$

její obecné řešení je

$$z_H = Ce^{\int \frac{2}{x} dx} = Ce^{2 \cdot \ln |x|} = Cx^2.$$

2. Obecné řešení rovnice (92) hledáme ve tvaru

$$z = C(x)x^2. \quad (93)$$

Zderivujeme

$$z' = C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x$$

a dosadíme spolu se z do (92)

$$C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x = -\frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x} \cdot C(x)x^2,$$

$$C'(x)x^2 = -\frac{2 \ln x}{x},$$

$$C'(x) = -\frac{2 \ln x}{x^3},$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int -\frac{2 \ln x}{x^3} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = -\frac{2}{x^3} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{1}{x^2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2x^2} + C. \end{aligned}$$

$C(x)$ dosadíme do (93)

$$z = \left(\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2x^2} + C \right) \cdot x^2 = \ln x + \frac{1}{2} + Cx^2.$$

Dosadíme zpátky ze substituce

$$\frac{1}{y^2} = \ln x + \frac{1}{2} + Cx^2$$

a dostaneme obecné řešení rovnice (91) ve tvaru

$$\underline{\underline{y^2 = \frac{1}{\ln x + \frac{1}{2} + Cx^2}, y = 0, C \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 11.5 Najděte obecné řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

$$3y' + \frac{2}{x}y = \frac{3 \cos 3x}{\sqrt{y}}. \quad (94)$$

Řešení: Vyjádříme y'

$$y' = \frac{\cos 3x}{\sqrt{y}} - \frac{2}{3x} \cdot y,$$

$$y' = \cos 3x \cdot y^{-\frac{1}{2}} - \frac{2y}{3x} \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

Zavedeme substituci

$$z = y^{1-r} = y^{1-(-\frac{1}{2})} = y^{\frac{3}{2}},$$

takže

$$z' = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y' = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left[\cos 3x \cdot y^{-\frac{1}{2}} - \frac{2y}{3x} \right]}_{y'} = \frac{3}{2} \cos 3x - \frac{1}{x}z. \quad (95)$$

1. Rovnici zhomogenizujeme

$$z' = -\frac{1}{x}z,$$

její obecné řešení bude

$$z_H = Ce^{\int(-\frac{1}{x})dx} = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|\frac{1}{x}|} = \frac{C}{x}.$$

2. Hledáme obecné řešení rovnice (95) ve tvaru

$$z = \frac{C(x)}{x}. \quad (96)$$

Zjistíme jeho derivaci

$$z' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

Po dosazení z a z' do (95) bude

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} = \frac{3}{2} \cos 3x - \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x},$$

$$C'(x) = \frac{3}{2}x \cos 3x,$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{3}{2}x \cos 3x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{3}{2}x & v' = \cos 3x \\ u' = \frac{3}{2} & v = \frac{\sin 3x}{3} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2}x \sin 3x - \frac{1}{2} \int \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}x \sin 3x + \frac{1}{6} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

$C(x)$ dosadíme do (96)

$$z = \frac{\frac{1}{2}x \sin 3x + \frac{1}{6} \cos 3x + C}{x} = \frac{3x \sin 3x + \cos 3x + 6C}{6x}.$$

Vrátíme se zpátky ze substituce a dostaneme obecné řešení rovnice (94) ve tvaru

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3x \sin 3x + \cos 3x + 6C}{6x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

neboli

$$\underline{\underline{y^3 = \left(\frac{3x \sin 3x + \cos 3x + 6C}{6x} \right)^2, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

11.2 Neřešené příklady

1. $y - xy' = xy^3$	$[y^2 = \frac{3x^2}{2x^3+3C}, y = 0]$
2. $xy' + y = y^2 \ln x$	$[y = \frac{1}{Cx+\ln x+1}, y = 0]$
3. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$	$[y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln x + C\right)^2, y = 0]$
4. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$	$[y^3 = \frac{C}{x^3} + \frac{3}{2x}]$
5. $3x^2y' + xy = y^{-2}$	$[y^3 = \frac{\ln x +C}{x}]$
6. $y' + y = y^2 \cdot e^x$	$[y = \frac{1}{e^x \cdot (C - x)}, y = 0]$
7. $y' - xy + y^3e^{-x^2} = 0$	$[y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+C}, y = 0]$
8. $y' + xy = 6x\sqrt{y}$	$[y = \left(6 + Ce^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2, y = 0]$

12 EXAKTNÍ DR A INTEGRAČNÍ FAKTOR

12.1 Řešené příklady

Příklad 12.1 Dokažte, že daná diferenciální rovnice je exaktní, a najděte její obecné řešení:

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0. \quad (97)$$

Řešení: Nejprve si označme

$$P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2,$$

$$Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Aby byla daná diferenciální rovnice exaktní, musí být splněna podmínka

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y).$$

Zde máme

$$P'_y(x, y) = 12xy,$$

$$Q'_x(x, y) = 12xy,$$

podmínka je splněna, daná rovnice je tedy exaktní. To znamená, že existuje tzv. **kmenová funkce** $F(x, y)$, jejíž totální diferenciál je výraz na levé straně rovnice (bylo již vysvětleno v teoretické části). Platí tedy

$$F'_x(x, y) = P(x, y) \implies F = \int P(x, y) dx, \quad (98)$$

$$F'_y(x, y) = Q(x, y) \implies F = \int Q(x, y) dy. \quad (99)$$

Kmenovou funkci F nalezneme například využitím (98)

$$F(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2) dx = x^3 + 3x^2y^2 + C(y). \quad (100)$$

Zbývá nalézt funkci $C(y)$. Proto nyní $F(x, y)$ zderivujeme parciálně podle proměnné y a tuto derivaci položíme rovnu funkci $Q(x, y)$. Využijeme tak podmínku (99)

$$F'_y(x, y) = Q(x, y),$$

$$0 + 3x^2 \cdot 2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$6x^2y + C'(y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$C'(y) = 4y^3.$$

Zintegrujeme

$$C(y) = \int 4y^3 dy,$$

$$C(y) = y^4 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$C(y)$ dosadíme do kmenové funkce $F(x, y)$ v (100)

$$F(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1.$$

Obecné řešení je ve tvaru (viz teoretická část)

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 = K, \quad C_1, K \in \mathbb{R}.$$

Ještě můžeme obě konstanty C_1, K zapsat pomocí jediné $C = K - C_1$ a vyjádřit tak

obecné řešení dané rovnice (97) v jednodušším tvaru

$$\underline{\underline{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 12.2 Řešte exaktní diferenciální rovnici:

$$\sin^2 y \, dx + (x \cdot \sin 2y - 2y) \, dy = 0. \quad (101)$$

Řešení: Nejprve dokážeme, že se jedná o exaktní diferenciální rovnici

$$\left. \begin{aligned} P = \sin^2 y &\Rightarrow P'_y = 2 \sin y \cdot \cos y \\ Q = x \cdot \sin 2y - 2y &\Rightarrow Q'_x = \sin 2y = 2 \sin y \cdot \cos y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{parciální derivace jsou stejné,} \\ \text{rovnice je tudíž exaktní.} \end{array}$$

Kmenová funkce tedy existuje, nalezneme ji například užitím vztahu (98), stejně jako v předchozím příkladě

$$F(x, y) = \int P(x, y) \, dx = \int \sin^2 y \, dx = x \cdot \sin^2 y + C(y). \quad (102)$$

Nyní, analogicky jako v předchozím příkladě, nalezenou funkci F zderivujeme parciálně podle proměnné y a položíme ji rovnu funkci Q , abychom našli funkci $C(y)$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= Q(x, y), \\ x \cdot 2 \sin y \cdot \cos y + C'(y) &= x \cdot \sin 2y - 2y, \\ x \cdot \sin 2y + C'(y) &= x \cdot \sin 2y - 2y, \\ C'(y) &= -2y, \\ C(y) &= \int (-2y) \, dy, \\ C(y) &= -y^2 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkci $C(y)$ dosadíme do kmenové funkce $F(x, y)$ v (102):

$$F(x, y) = x \sin^2 y - y^2 + C_1 = K, C_1, K \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení rovnice (101) je tvaru

$$\underline{\underline{x \sin^2 y - y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Poznámka

- Při řešení budeme některé komentáře již vynechávat, zejména tam, kde je postup zřejmý.
- V obecném řešení už budeme konstanty C_1 a K rovnou zapisovat pomocí jediné konstanty C .

Příklad 12.3 Řešte exaktní diferenciální rovnici:

$$(4y^3 e^{-x} + 3x^2 e^y) \, dx + (x^3 e^y - 12y^2 e^{-x} + \sin y) \, dy = 0. \quad (103)$$

Řešení:

$$\left. \begin{aligned} P = 4y^3 e^{-x} + 3x^2 e^y &\Rightarrow P'_y = 12y^2 e^{-x} + 3x^2 e^y \\ Q = x^3 e^y - 12y^2 e^{-x} + \sin y &\Rightarrow Q'_x = 3x^2 e^y - 12y^2 e^{-x} \cdot (-1) = 3x^2 e^y + 12y^2 e^{-x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rovnice je exaktní.

Najdeme kmenovou funkci $F(x, y)$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int P(x, y) dx = \int (4y^3 e^{-x} + 3x^2 e^y) dx = 4y^3 \frac{e^{-x}}{-1} + 3 \frac{x^3}{3} e^y + C(y) = \\ &= -4y^3 e^{-x} + x^3 e^y + C(y). \end{aligned} \quad (104)$$

Nalezneme funkci $C(y)$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= Q(x, y), \\ -12y^2 e^{-x} + x^3 e^y + C'(y) &= x^3 e^y - 12y^2 e^{-x} + \sin y, \\ C'(y) &= \sin y, \\ C(y) &= \int \sin y dy, \\ C(y) &= -\cos y + C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$C(y)$ dosadíme do (104):

$$F(x, y) = -4y^3 e^{-x} + x^3 e^y - \cos y + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení:

$$\underline{\underline{-4y^3 e^{-x} + x^3 e^y - \cos y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 12.4 Řešte exaktní diferenciální rovnici:

$$(e^{2y} \sin x - 2e^{2x} \cos y) dx - (2e^{2y} \cos x - 2e^{2y} - e^{2x} \sin y) dy = 0. \quad (105)$$

Řešení:

$$\begin{aligned} P &= e^{2y} \sin x - 2e^{2x} \cos y, \\ Q &= -(2e^{2y} \cos x - 2e^{2y} - e^{2x} \sin y) = -2e^{2y} \cos x + 2e^{2y} + e^{2x} \sin y. \\ \left. \begin{aligned} P'_y &= e^{2y} \cdot 2 \cdot \sin x - 2e^{2x} \cdot (-\sin y) = 2e^{2y} \sin x + 2e^{2x} \sin y, \\ Q'_x &= -2e^{2y} \cdot (-\sin x) + 0 + e^{2x} \cdot 2 \sin y = 2e^{2y} \sin x + 2e^{2x} \sin y. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rovnice je exaktní.} \end{aligned}$$

Najdeme kmenovou funkci $F(x, y)$, tentokrát například využitím vztahu

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) = Q(x, y) &\implies F(x, y) = \int Q(x, y) dy = \\ F(x, y) &= \int Q(x, y) dy = \int (-2e^{2y} \cos x + 2e^{2y} + e^{2x} \sin y) dy = \\ &= -2 \frac{e^{2y}}{2} \cos x + 2 \frac{e^{2y}}{2} + e^{2x} (-\cos y) + C(x) = \\ &= -e^{2y} \cos x + e^{2y} - e^{2x} \cos y + C(x). \end{aligned} \quad (106)$$

Funkci $C(x)$ zjistíme tak, že nalezenou kmenovou funkci $F(x, y)$ (vztah (106) zderivu-

jeme parciálně podle proměnné x a položíme ji rovnu funkci $P(x, y)$:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= P(x, y), \\ -e^{2y}(-\sin x) + 0 - e^{2x} \cdot 2 \cos y + C'(x) &= e^{2y} \sin x - 2e^{2x} \cos y, \\ C'(x) &= 0, \\ C(x) &= \int 0 dx, \\ C(x) &= C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kmenová funkce bude mít tedy tvar:

$$F(x, y) = -e^{2y} \cos x + e^{2y} - e^{2x} \cos y + C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

takže obecné řešení rovnice (105) bude

$$\underline{\underline{-e^{2y} \cos x + e^{2y} - e^{2x} \cos y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 12.5 Řešte exaktní diferenciální rovnici:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} + 1 \right) dy = 0. \quad (107)$$

Řešení:

$$\left. \begin{aligned} P = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} &\Rightarrow P'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2y) = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ Q = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 &\Rightarrow Q'_x = -y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rovnice je exaktní.

Najdeme kmenovou funkci $F(x, y)$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int P(x, y) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{t} = \\ &= \sqrt{x^2 - y^2} + C(y). \end{aligned} \quad (108)$$

Nalezneme funkci $C(y)$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= Q(x, y), \\ \frac{1}{2}(x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) + C'(y) &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1, \\ C'(y) &= -1, \\ C(y) &= \int (-1) dy, \\ C(y) &= -y + C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nalezenou funkci $C(y)$ dosadíme do (108) a zapíšeme obecné řešení, analogicky jako v předchozích příkladech:

$$\underline{\underline{\sqrt{x^2 - y^2} - y = C, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 12.6 Najděte integrační faktor pro danou rovnici a vyřešte ji:

$$(2y + 4x^2y^2) dx + (x + 2x^3y) dy = 0. \quad (109)$$

Řešení:

$$\left. \begin{array}{l} P = 2y + 4x^2y^2 \Rightarrow P'_y = 2 + 8x^2y \\ Q = x + 2yx^3 \Rightarrow Q'_x = 1 + 6x^2y \end{array} \right\} P'_y \neq Q'_x \Rightarrow \text{rovnice není exaktní.}$$

Potřebujeme proto nejprve najít tzv. **integrační faktor**, tj. takovou funkci, kterou po jejím vynásobení rovnice (109) dostaneme rovnici exaktní. Ověříme, zda platí buď

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \alpha(x), \quad (110)$$

tj., zda je výraz na levé straně v (110) funkcí pouze proměnné x , nebo

$$\frac{P'_y - Q'_x}{-P} = \beta(y), \quad (111)$$

tj., zda výraz na levé straně v (111) je funkcí pouze proměnné y .

Platí

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2 + 8x^2y - 1 - 6x^2y}{x + 2x^3y} = \frac{1 + 2x^2y}{x(1 + 2x^2y)} = \frac{1}{x} = \alpha(x),$$

což je funkce jedné proměnné x , takže integrační faktor m bude také funkcí jedné proměnné x . Najdeme ho takto:

$$m(x) = e^{\int \alpha(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x.$$

Nyní tímto integračním faktorem vynásobíme původní rovnici (109):

$$\begin{aligned} x \cdot [(2y + 4x^2y^2) dx + (x + 2x^3y) dy] &= 0, \\ (2xy + 4x^3y^2) dx + (x^2 + 2x^4y) dy &= 0. \end{aligned} \quad (112)$$

V nové rovnici (112) máme

$$\left. \begin{array}{l} P = 2xy + 4x^3y^2 \Rightarrow P'_y = 2x + 8x^3y \\ Q = x^2 + 2x^4y \Rightarrow Q'_x = 2x + 8x^3y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rovnice (112) je exaktní.}$$

Najdeme kmenovou funkci $F(x, y)$

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = \int (2xy + 4x^3y^2) dx = x^2y + x^4y^2 + C(y). \quad (113)$$

Zjistíme $C(y)$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= Q(x, y), \\ x^2 + 2x^4y + C'(y) &= x^2 + 2x^4y, \\ C'(y) &= 0, \\ C(y) &= C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (112), a tedy i původní rovnice (109), je

$$\underline{\underline{x^2y + x^4y^2 = C, C \in \mathbb{R}.$$

Příklad 12.7 Najděte integrační faktor pro danou rovnici a vyřešte ji:

$$(2xy^2 - y) dx + (x + y^2) dy = 0. \quad (114)$$

Řešení:

$$\left. \begin{array}{l} P = 2xy^2 - y \Rightarrow P'_y = 4xy - 1 \\ Q = x + y^2 \Rightarrow Q'_x = 1 \end{array} \right\} P'_y \neq Q'_x \Rightarrow \text{rovnice není exaktní.}$$

Platí

$$\frac{P'_y - Q'_x}{-P} = \frac{4xy - 1 - 1}{-2xy^2 + y} = \frac{4xy - 2}{-y(2xy - 1)} = -\frac{2}{y} = \beta(y).$$

Integrační faktor bude tentokrát funkce proměnné y

$$m(y) = e^{\int (-\frac{2}{y}) dy} = e^{-2 \ln |y|} = e^{\ln \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}.$$

Integračním faktorem $m(y)$ vynásobíme původní rovnici

$$\frac{1}{y^2} \cdot [(2xy^2 - y) dx + (x + y^2) dy] = 0,$$

$$(2x - \frac{1}{y}) dx + (\frac{x}{y^2} + 1) dy = 0. \quad (115)$$

V nové rovnici (115) máme

$$\left. \begin{array}{l} P = 2x - \frac{1}{y} \Rightarrow P'_y = \frac{1}{y^2} \\ Q = \frac{x}{y^2} + 1 \Rightarrow Q'_x = \frac{1}{y^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rovnice (115) je exaktní}$$

Nalezneme kmenovou funkci $F(x, y)$

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = \int (2x - \frac{1}{y}) dx = x^2 - \frac{x}{y} + C(y). \quad (116)$$

Zjistíme $C(y)$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= Q(x, y), \\ \frac{x}{y^2} + C'(y) &= \frac{x}{y^2} + 1, \\ C'(y) &= 1, \\ C(y) &= y + C_1, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecné řešení rovnice (115), a tedy i původní rovnice (114), je

$$\underline{\underline{x^2 - \frac{x}{y} + y = C, C \in \mathbb{R}.$$

12.2 Neřešené příklady

- | | |
|--|---|
| 1. $(2xy - 2x - 1) dx + (x^2 + 2y + 1) dy = 0$ | $[x^2y - x^2 - x + y^2 + y = C]$ |
| 2. $(2xy^2 - 2y^3) dx - (6y^2x - 4y^3 - 2yx^2) dy$ | $[x^2y^2 - 2xy^3 + y^4 = C]$ |
| 3. $(\cos y + y \cdot \cos x) dx + (\sin x - x \cdot \sin y) dy = 0$ | $[x \cdot \cos y + y \cdot \sin x = C]$ |
| 4. $(1 + x \cdot \cos 2y) dx - (x^2 \cdot \sin 2y) dy = 0$ | $[x + \frac{1}{2}x^2 \cos 2y = C]$ |
| 5. $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ | $[\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C]$ |
| 6. $(\ln(x - y) + \frac{x}{x-y}) dx - \frac{x}{x-y} dy = 0$ | $[x \cdot \ln(x - y) = C]$ |
| 7. $(3x^2y + y^3) dx - (2x^3 + 5y) dy = 0$ | $[\frac{x^3 + y^2x + 5y}{y^2} = C]$ |
| 8. $2xy dx + (y^2 - 3x^2) dz = 0$ | $[\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C]$ |
| 9. $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \cotg y dy = 0$ | $[\frac{x}{\sin y} + x^3 = C]$ |
| 10. $\cos y dx + (e^x + \sin y) dy = 0$ | $[y - e^{-x} \cos y = C]$ |

13 HOMOGENNÍ LODR n - TÉHO ŘÁDU

13.1 Řešené příklady

Příklad 13.1 Řešte homogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. Má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 2$.

Odtud tedy dostáváme, že **fundamentální systém** je ve tvaru

$$y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = e^{2x}.$$

Obecné řešení pak má tvar

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ y &= C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 13.2 Řešte homogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 3$.

Odtud tedy dostáváme, že **fundamentální systém** je ve tvaru

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = x e^{3x}.$$

Obecné řešení je ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ y &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 13.3 Řešte homogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ a má dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. Požadovaná lineárně nezávislá **fundamentální řešení** jsou tedy tvaru

$$y_1 = e^{3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{3x} \sin 2x.$$

Obecné řešení je ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2, \\ y &= C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 13.4 Řešte homogenní diferenciální rovnici čtvrtého řádu:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Řešení: CHR je tvaru $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$, dále řešíme např. zavedením substituce $\lambda^2 = t$. Dostaneme dvojici dvojnásobných komplexně sdružených čísel $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Fundamentální řešení jsou tedy tvaru

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x, \quad y_3 = x \cos x, \quad y_4 = x \sin x.$$

OŘ je ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$

$$\underline{\underline{y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 13.5 Řešte homogenní diferenciální rovnici třetího řádu:

$$y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0.$$

Řešení: CHR je tvaru $\lambda^3 + 7\lambda^2 + 19\lambda + 13 = 0$, vyřešíme ji za pomoci **Hornerova schématu**.

Získáme jeden reálný kořen $\lambda_1 = -1$. Další kořeny najdeme pomocí diskriminantu, vyjdou dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{2,3} = -3 \pm 2i$. Výsledné řešení má tvar

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_3 = e^{-3x} \sin 2x.$$

OŘ je ve tvaru

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + e^{-3x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 13.6 Řešte homogenní diferenciální rovnici třetího řádu:

$$y''' + y'' + y' - 3y = 0.$$

Řešení: CHR je tvaru $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$, pomocí **HS** najdeme

jeden reálný kořen $\lambda_1 = 1$. Další kořeny najdeme pomocí diskriminantu které jsou komplexně sdružené $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}i$. Výsledné řešení jsou

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x} \cos \sqrt{2}x, \quad y_3 = e^{-x} \sin \sqrt{2}x.$$

OŘ tedy je

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.}}$$

13.2 Neřešené příklady

1. $y'' + 6y' + 9y = 0$	$[y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)]$
2. $y'' + 5y' = 0$	$[y = C_1 + C_2e^{-5x}]$
3. $y'' - 16y = 0$	$[y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}]$
4. $y'' + 2y' = 0$	$[y = C_1 + C_2e^{-2x}]$
5. $y'' - 6y' + 13y = 0$	$[y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)]$
6. $y''' - 4y'' - 4y' + 16y = 0$	$[y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{4x}]$
7. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$	$[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}]$
8. $y''' - y'' + y' - y = 0$	$[y = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x]$
9. $y''' + 7y'' + 19y' + 13y = 0$	$[y = C_1e^{-x} + e^{-3x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)]$
10. $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$	$[y = (C_1 + C_2x) \cos \sqrt{5}x + (C_3 + C_4x) \sin \sqrt{5}x]$

14 NEHOMOGENNÍ LODR n - TÉHO ŘÁDU SE SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU

14.1 Řešené příklady

Příklad 14.1 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' - 2y' = 8x.$$

Řešení: Při řešení postupujeme ve dvou krocích. Nejprve řešíme přidruženou homogenní rovnici

$$y'' - 2y' = 0.$$

Charakteristická rovnice je ve tvaru $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ a má dva reálné kořeny $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. Odtud tedy dostáváme, že **fundamentální systém** je ve tvaru

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{2x},$$

tyto funkce jsou lineárně nezávislé. Obecné řešení homogenní rovnice má tvar

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledáme **partikulární řešení** původní rovnice

$$y_p = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx,$$

$$y_p' = 2Ax + B,$$

$$y_p'' = 2A,$$

tyto derivace dosadíme do zadané rovnice

$$2A - 2 \cdot (2Ax + B) = 8x,$$

$$2A - 4Ax - 2B = 8x.$$

$$x^1 : \quad -4A = 8 \Rightarrow A = -2,$$

$$x^0 : \quad 2A - 2B = 0 \Rightarrow B = -2.$$

Odtud tedy dostáváme, že $y_p = -2x^2 - 2x$. Dostaneme obecné řešení nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$, po dosazení

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2 e^{2x} - 2x^2 - 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 14.2 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' + 6y' + 5y = 10x^2 + 4x.$$

Řešení: Při řešení postupujeme ve dvou krocích. Nejprve řešíme přidruženou homogenní rovnici

$$y'' + 6y' + 5y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$. Dostáváme, že **FS** je ve tvaru

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-5x}.$$

Obecné řešení homogenní rovnice je tvaru

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledáme **partikulární řešení** původní rovnice

$$y_p = x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C,$$

$$y'_p = 2Ax + B,$$

$$y''_p = 2A,$$

tyto derivace dosadíme do zadané rovnice

$$2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 10x^2 + 4x,$$

$$2A + 12Ax + 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 10x^2 + 4x,$$

$$5Ax^2 + 12Ax + 5Bx + 2A + 6B + 5C = 10x^2 + 4x,$$

$$x^2 : 5A = 10 \Rightarrow A = 2,$$

$$x^1 : 12A + 5B = 4 \Rightarrow 5B = -20 \Rightarrow B = -4,$$

$$x^0 : 2A + 6B + 5C = 0 \Rightarrow 5C = 20 \Rightarrow C = 4.$$

Dostáváme, že $y_p = 2x^2 - 4x + 4$. OŘ nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$ je

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + 2x^2 - 4x + 4, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 14.3 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$2y'' + y' - y = 9e^{2x}.$$

Řešení: Při řešení postupujeme ve dvou krocích. Řešíme přidruženou homogenní rovnici

$$2y'' + y' - y = 0.$$

CHR je ve tvaru $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$, má dva reálné kořeny $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -1$. Dostáváme

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2 = e^{-x}.$$

Obecné řešení homogenní rovnice má tvar

$$y_H = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledáme **PŘ** původní rovnice

$$y_p = Ae^{2x},$$

$$y'_p = 2Ae^{2x},$$

$$y''_p = 4Ae^{2x}.$$

Tyto derivace dosadíme do zadané rovnice

$$2(4Ae^{2x}) + (2Ae^{2x}) - Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$8Ae^{2x} + 2Ae^{2x} - Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$9Ae^{2x} = 9e^{2x},$$

$$A = 1.$$

Dostáváme, že $y_p = e^{2x}$. OŘ nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$ je

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 14.4 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici třetího řádu:

$$y''' + 6y'' - 16y' = 11e^{3x}.$$

Řešení: Postup řešení je stejný jako u předchozích příkladů. Řešíme homogenní rovnici

$$y''' + 6y'' - 16y' = 0.$$

CHR je $\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda = 0$. Vytkneme λ a vidíme, že má tři reálné kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -8$. Dostáváme

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{2x}, \quad y_3 = e^{-8x}.$$

OŘ homogenní rovnice je

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-8x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Hledáme **PŘ** původní rovnice

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{3x}, \\ y_p' &= 3Ae^{3x}, \\ y_p'' &= 9Ae^{3x}, \\ y_p''' &= 27Ae^{3x}. \end{aligned}$$

Výsledné derivace dosadíme do zadané rovnice

$$\begin{aligned} (27Ae^{3x}) + 6(9Ae^{3x}) - 16(3Ae^{3x}) &= 11e^{3x}, \\ 27Ae^{3x} + 54Ae^{3x} - 48Ae^{3x} &= 11e^{3x}, \\ 33Ae^{3x} &= 11e^{3x}, \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pak dostaneme $y_p = \frac{1}{3}e^{3x}$. OŘ nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$ je po dosazení

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-8x} + \frac{1}{3}e^{3x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 14.5 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' - 2y' + y = -10 \cos 2x.$$

Řešení: Postup řešení je stále stejný. Řešíme homogenní rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

CHR ve tvaru $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$. Dostáváme

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x.$$

OŘ homogenní rovnice je ve tvaru

$$y_H = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledané **PŘ** původní rovnice je

$$\begin{aligned} y_p &= A \cos 2x + B \sin 2x, \\ y_p' &= -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \\ y_p'' &= -4A \cos 2x - 4B \sin 2x. \end{aligned}$$

Derivace dosadíme do zadané rovnice

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x) = -10 \cos 2x,$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = -10 \cos 2x,$$

$$-3A \cos 2x - 4B \cos 2x + 4A \sin 2x - 3B \sin 2x = -10 \cos 2x,$$

$$\cos 2x : \quad -3A - 4B = -10 \Rightarrow -3\frac{3B}{4} - 4B = -10 \Rightarrow B = \frac{8}{5},$$

$$\sin 2x : \quad 4A - 3B = 0 \Rightarrow A = \frac{3B}{4} \Rightarrow A = \frac{6}{5}.$$

Z toho dostáváme, že $y_p = \frac{6}{5} \cos 2x + \frac{8}{5} \sin 2x$. OŘ nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$ je po dosazení

$$\underline{\underline{y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{6}{5} \cos 2x + \frac{8}{5} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}}$$

Příklad 14.6 Řešte nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu:

$$y'' - 4y' + 5y = 13 \sin 2x.$$

Řešení: Postup řešení se opakuje. Počítáme homogenní rovnici

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

CHR tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Dostáváme

$$y_1 = e^{2x} \cos x, \quad y_2 = e^{2x} \sin x.$$

OŘ homogenní rovnice je

$$y_H = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hledáme **PŘ** původní rovnice

$$y_p = A \cos 2x + B \sin 2x,$$

$$y'_p = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$y''_p = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Derivace opět dosadíme do zadané rovnice

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + 5(A \cos 2x + B \sin 2x) = 13 \sin 2x,$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 8A \sin 2x - 8B \cos 2x + 5A \cos 2x + 5B \sin 2x = 13 \sin 2x,$$

$$A \cos 2x - 8B \cos 2x + B \sin 2x + 8A \sin 2x = 13 \sin 2x,$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x : \quad A - 8B = 0 \\ \sin 2x : \quad B + 8A = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{8}{5}, \quad B = \frac{1}{5}.$$

Dostáváme $y_p = \frac{8}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x$. OŘ nehomogenní rovnice $y = y_H + y_p$ po dosazení vypadá

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{8}{5} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}}$$

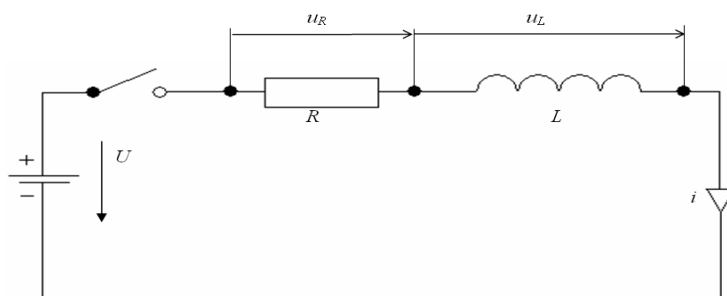
14.2 Neřešené příklady

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $y'' + y' - 2y = 6x^2$ | $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3x^2 - 3x - 4, 5]$ |
| 2. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$ | $[y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12]$ |
| 3. $y'' + 4y' - 5y = 1$ | $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 0, 2]$ |
| 4. $y''' - y' = x$ | $[y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - 0, 5x^2]$ |
| 5. $y'' + 2y' + y = e^{-2x}$ | $[y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + e^{-2x}]$ |
| 6. $y'' - y = e^{-x}$ | $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 0, 5x e^{-x}]$ |
| 7. $y'' - y = \sin x$ | $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 0, 5 \cos x]$ |
| 8. $y'' + y = e^x \cos x$ | $[y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 0, 2e^x \cos x + 0, 4e^x \sin x]$ |

15 APLIKACE S POUŽITÍM DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Příklad 15.1

V elektrickém obvodu o napětí U je zapojena cívka s indukčností L a rezistor s odporem R . Jaký proud bude procházet cívkou v čase t po sepnutí obvodu, jestliže v čase $t = 0$ s má proud hodnotu $i = 0$ A?



Obrázek 1. Obvod

Řešení: Při sepnutí spínače podle 2. Kirchhoffova zákona je součet obvodového napětí na cívce a na rezistoru trvale roven svorkovému napětí na zdroji. Obvodové napětí na cívce je určeno vztahem $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$, napětí na rezistoru je $u_R = Ri$, kde i je proud procházející obvodem. V každém okamžiku platí $u_R + u_L = U$.

Po dosazení dostáváme

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U, \quad i(0) = 0, \quad (117)$$

což je nehomogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu s počáteční podmínkou. Neznámou funkcí je proud i , který závisí na jedné proměnné, tj. na čase t .

Rovnici vyřešíme metodou **variace konstanty**:

1. Nejprve rovnici (117) zhomogenizujeme a najdeme její obecné řešení. Následně provedeme separaci proměnných, zintegrujeme a odlogaritmujeme. Dostaneme

$$i_H = K_1 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

2. Předpokládáme, že $K_1 = K_1(t)$, pak obecné řešení rovnice (117) hledáme ve tvaru

$$i = K_1(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}. \quad (118)$$

Derivujeme i podle času a dosazením do rovnice (117) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= K_1'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - K_1(t) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \\ R \cdot K_1(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + L \cdot \left(K_1'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - K_1(t) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) &= U, \end{aligned}$$

odtud máme

$$K_1'(t) = \frac{U}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}, \quad K_1(t) = \int \frac{U}{L} e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt,$$

zintegrujeme

$$K_1(t) = \frac{U}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení do rovnice (118) dostaneme

$$i = \frac{U}{R} + K_2 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Integrační konstantu K_2 určíme pomocí počátečních podmínek. V čase $t = 0$ je $i = 0$, z toho plyne $K_2 = -\frac{U}{R}$. Naše hledané řešení má tedy tvar

$$\underline{\underline{i = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}}.$$

Příklad 15.2

Kovová kulička o teplotě 100°C je umístěna v místnosti o stálé teplotě 0°C . Po 20 minutách byla teplota kuličky 50°C . Určete

- závislost teploty T kuličky na čase t ,
- za jak dlouho se kulička ochladí na teplotu 25°C ,
- jaká bude teplota kuličky po 10 minutách.

Řešení:

- a) Použijeme rovnici $\frac{dT}{dt} + kT = kT_m$ v níž $T_m = 0$ je teplota v místnosti. Z toho dostáváme,

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0,$$

řešením je funkce

$$T = Ce^{-kt}, C \in \mathbb{R}. \quad (119)$$

Pokud $T = 100^\circ\text{C}$ a $t = 0$ min, z dosazení do rovnice (119) vyplývá, že $100 = ce^{-k \cdot 0}$, tedy $c = 100$. Dosazením této hodnoty do (119) dostáváme

$$T = 100e^{-kt} \quad (120)$$

Po dosazení času $t = 20$ min a teploty $T = 50^\circ\text{C}$ z rovnice (120) vidíme, že

$$50 = 100e^{-kt},$$

z čehož plyne

$$k = \frac{-1}{20} \ln \frac{50}{100} = \frac{-1}{20} (-0,693) = 0,035.$$

Dosazením vypočtené hodnoty k do rovnice (120) zjistíme závislost teploty kuličky na čase t

$$T = 100e^{-0,035t} \quad (121)$$

- b) Chceme-li zjistit čas t , za který se kulička ochladí na teplotu $T = 25^\circ\text{C}$, pak stačí dosadit do rovnice (121) za $T = 25$.

$$\begin{aligned} 25 &= 100e^{-0,035t}, \\ -0,035t &= \ln \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vyřešením rovnice dostáváme, že $t = 39,6$ min.

- c) Teplotu kuličky po 10 minutách zjistíme tak, že dosadíme do rovnice (121) za t hodnotu 10.

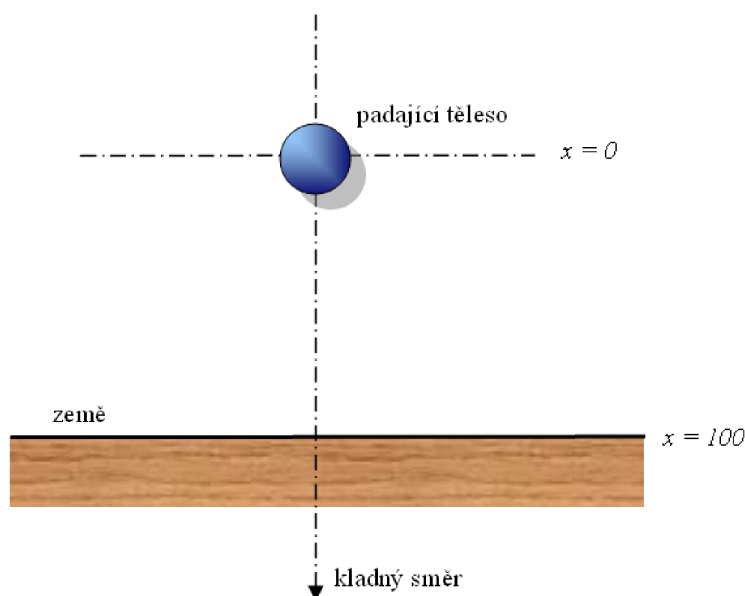
$$T = 100e^{-0,035 \cdot 10} = 100 \cdot (0,705) = 70,5^{\circ}\text{C}$$

Je nutné si uvědomit, že Newtonův zákon platí pouze pro malé teplotní rozdíly, výpočty uvedené výše reprezentují pouze základní přiblížení fyzikální situace.

Příklad 15.3

Těleso je puštěno z výšky 45 metrů s nulovou počáteční rychlostí $v_0 = 0$. Odpor vzduchu neuvažujeme.

- Vyjadřete rychlost tělesa v libovolném čase t ,
- určete polohu tělesa v libovolném čase t ,
- zjistěte, za jak dlouho těleso dopadne na zem.



Obrázek 2. Nákres situace

Řešení:

- a) Zvolíme soustavu souřadnic podle Obr.2. Protože zanedbáváme odpor vzduchu, platí

$$\frac{dv}{dt} = g,$$

což je diferenciální rovnice, jejíž řešení můžeme najít přímou integrací. Obecné řešení bude ve tvaru

$$v = gt + v_0.$$

Protože $v_0 = 0$ a g je gravitační zrychlení, které je přibližně rovno $g = 10 \frac{m}{s^2}$, bude řešení rovnice s počáteční podmínkou ve tvaru

$$v = 10t. \quad (122)$$

- b) Protože rychlost v je změna polohy x za jednotku času, tj. $v = \frac{dx}{dt}$, můžeme rovnici (122) přepsat do tvaru

$$\frac{dx}{dt} = 10t.$$

Tato diferenciální rovnice je přímo integrovatelná, jejím řešením je funkce

$$x(t) = 5t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (123)$$

Protože podle Obr.2 je $x(0) = 0$, dostáváme $0 = 5 \cdot 0^2 + C_1$, tedy $C_1 = 0$. Po dosazení do rovnice (123) máme tedy

$$x(t) = 5t^2. \quad (124)$$

- c) Ze vztahu (124) získáme dosazením za $x = 45$ m, jak dlouho padá kulička.

$$t = \sqrt{\frac{45}{5}} = 3 \text{ s.}$$

Kulička tedy dopadne na zem za 3 sekundy.

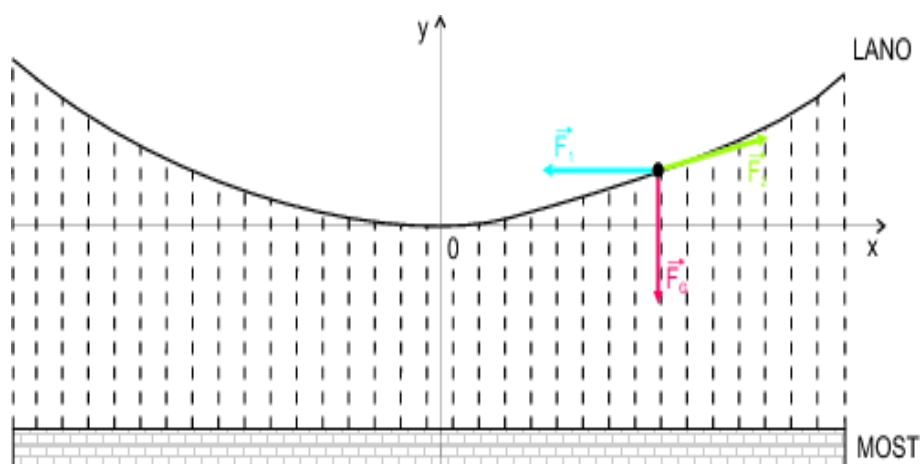
Příklad 15.4

Určete tvar křivky nosného lana závěsného mostu. Jakou délku svislých lan je potřeba volit, aby byla vozovka namáhána co nejméně? Předpokládejte, že zatížení je rovnoměrně rozloženo po celé délce lana ve vodorovné přímce. Hmotnost nosného lana a svislých lan vzhledem k hmotnosti vozovky zanedbejte.



Obrázek 3. Příklad závěsného mostu

Řešení: Zvolíme soustavu souřadnic tak, že počátek umístíme do nejnižší polohy lana. Na část lana mezi tímto nejnižším bodem a bodem $X = [x, f(x)]$ působí tyto síly:

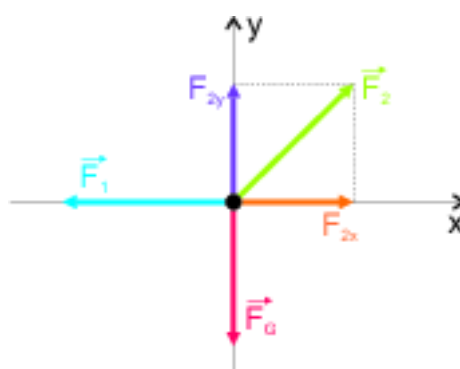


Obrázek 4. Náskres mostu

- tíhová síla $F_G = \frac{m}{l}gx$, kde m je celková hmotnost mostu, l celková délka lana a g tíhové zrychlení,
- tahová síla F_1 , která má vodorovný směr,
- tahová síla F_2 , kde $y = f(x)$ je rovnice hledané křivky. Tato síla má směr tečny k lanu a lze ji rozložit do složek

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha, \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha,$$

kde α je úhel, který svírá lano s vodorovnou rovinou v bodě $[x, f(x)]$.



Obrázek 5. Rozložení sil

Má-li být lano v rovnováze, musí být výslednice sil, které na něj působí, rovna nule. Ve složkách:

$$F_1 = F_{2x}$$

$$F_1 = F_2 \cos \alpha$$

$$F_G = F_{2y}$$

$$\frac{m}{l}gx = F_2 \sin \alpha.$$

Dostáváme tedy, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mg}{lF_1}x.$$

Protože $\operatorname{tg} \alpha$ je směrnice tečny k hledané křivce v bodě $[x, f(x)]$ a směrnice této tečny je derivace funkce $y = f(x)$, tj. platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy(x)}{dx},$$

plyne z toho, že

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{mg}{lF_1}x.$$

Označme $\frac{mg}{lF_1} = k$, což je materiálová konstanta závislá na druhu lana. Dostali jsme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = kx,$$

která se vyřeší přímou integrací, tj.

$$y = \int kx \, dx = k \frac{x^2}{2} + C.$$

Nosné lano bude mít tedy tvar paraboly. Konstantu C určíme z počáteční podmínky, tj. $y(0) = 0$. Pak platí

$$y = \frac{mg}{2lF_1} \cdot x^2.$$

Příklad 15.5

Těleso o hmotnosti m je vrženo svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 . Za předpokladu, že odpor vzduchu je přímo úměrný rychlosti tělesa, určete

- a) pohybovou rovnici tělesa v soustavě souřadnic podle Obr.6,
- b) rychlost tělesa v libovolném čase t ,
- c) čas, ve kterém těleso dosáhne maximální výšky.

a) Na těleso působí dvě síly:

(1) Tíhová síla $F_G = m \cdot g$ směřující svisle dolů,

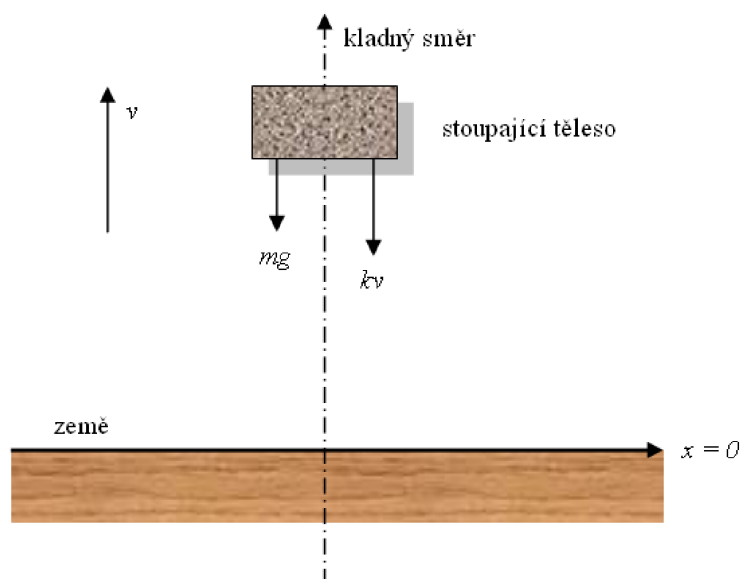
(2) odpor prostředí $F_{odp} = k \cdot v$, působící proti pohybu tělesa. Protože se těleso pohybuje svisle nahoru, směřuje odporová síla svisle dolů.

Výsledná síla působící na těleso bude $F = -F_G - F_{odp} = -mg - kv$. Tato výsledná síla se dá vyjádřit podle 2. Newtonova zákona jako $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, takže dostáváme

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -mg - kv, \quad (125)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = -g, \quad (126)$$

což je pohybová rovnice tělesa.



Obrázek 6. Nákres situace

- b) Rovnice (125) je lineární diferenciální rovnice a jejím řešením je $v = ce^{(k/m)t} - \frac{mg}{k}$. Pokud $t = 0$ a $v = v_0$, pak $v_0 = ce^{-(k/m)0} - (\frac{mg}{k})$ z čehož dostáváme $c = v_0 + (\frac{mg}{k})$, rychlost tělesa v libovolném čase je

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} - \frac{mg}{k} \quad (127)$$

- c) Těleso dosáhne maximální výšky tehdy, když $v = 0$. Z toho plyne, že hledáme takové t , kdy $v = 0$. Dosazení vztahu $v = 0$ do rovnice (127) a jejím vyřešením pro neznámou t , dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} - \frac{mg}{k}, \\ e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} &= \frac{1}{1 + \frac{v_0 k}{mg}}, \\ -\left(\frac{k}{m}\right)t &= \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{v_0 k}{mg}}\right), \\ t &= \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right). \end{aligned}$$

ZÁVĚR

Přestože jsou diferenciální rovnice obor poměrně starý, neubývá na jejich významu ani v současnosti. Proto jsou také nedílnou součástí výuky vysokoškolské matematiky. Práce shrnuje problematiku diferenciálních rovnic ve dvou částech, teoretické a praktické. V teoretické části je stručně vysvětlena teorie k početním příkladům. Praktická část je věnována jak řešeným, tak neřešeným příkladům. U všech řešených příkladů je popsán podrobný postup řešení. Příklady jsou rozděleny do devíti kapitol tak, aby pokryly probíraný rozsah učiva.

Cílem této práce bylo vytvořit studijní pomůcku pro kurz Matematika III, tak aby studenti mohli samostatně danou problematiku studovat a dále prohlubovat. Dalo by se říci, že tento cíl byl splněn. Závěrem bych chtěl všem studentům, kteří budou tuto příručku používat, popřát hodně štěstí při skládání zkoušek nejen z matematiky.

CONCLUSION

However the topic of differential equations is quiet old, they are still significant. Due this differential equations are one of the most important parts of themes taught at universities. The study sums up problem equations in two parts – in theoretical and practical and nine chapters. Solved and unsolved examples are completed with theory. Solved examples are with described process of solution.

The purpose of this study was to create study handbook for Mathematics III course. Students should study the problem alone and deepen their knowledge. This aim was fulfill. In the end I would like to wish many happy returns to users of this book.

Reference

- [1] BOYCE W. E. , DiPRIMA R. C. *Elementary differential equations*. Wiley, New York 1992
- [2] BRAUN M. *Differential Equations and Their Applications*. Springer, Berlin 1978.
- [3] BRONSON, R. *Schaum's Outline of Differential Equations*. McGraw-Hill. ISBN 0070080194.
- [4] DUBČÁK, F. *Cvičení z matematiky*. Brno, VUT, 1987.

- [5] HUŠEK, M. *Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze* [online]. 2000-2009 [cit. 2009-02-12]. Dostupný z WWW: <<http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/16-ode/lekce16-ode-pmin.pdf>>.
- [6] KALAS, J., Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [7] KOPKA, H. *LATEX: podrobný průvodce*. Vyd. 1. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-722-6973-9.
- [8] LOMTATIDZE, Lenka, PLCH, Roman. *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*. Brno : [s.n.], 2003. 122 s. ISBN 80 210 3228 6.
- [9] NAGY, J. *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. SNTL, Praha 1983.
- [10] *Přírodovědecká fakulta MU-Ústav matematiky a statistiky* [online]. c2006 [cit. 2009-03-10]. Dostupný z WWW: <<http://www.math.muni.cz/~pribylova/sbirky/odr.pdf>>.
- [11] RÁB, M. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. Brno, 1998. ISBN 80-210-1818-6.
- [12] REKROTYS, K. *Přehled užití matematiky II*. Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7.
- [13] RYBIČKA, Jiří. *LaTeX pro začátečníky*. 3. vyd. [s.l.] : [s.n.], 2003. 240 s. ISBN 80-7302-049-1 .
- [14] SYSEL, Petr, RAJMÍČ, Pavel. *LATEX: VUT v Brně* [online]. [2008] [cit. 2009-12-02]. Dostupný z WWW: <<http://latex.feec.vutbr.cz/cz/latex/>>.
- [15] TOMICA, R. *Cvičení z matematiky II*. Brno, VUT, 1974.
- [16] VLČEK, Jaroslav. *Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB - TU Ostrava* [online]. 2007-2009 [cit. 2009-03-15]. Dostupný z WWW: <<http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/difrov.html>>.

Při vypracování teorie bylo použito následujících zdrojů [1], [3], [5], [6], [9], [11], [12].

Při výběru příkladů bylo vybíráno z těchto zdrojů [3],[4],[5], [9], [10], [15], [16].

Aplikace byly čerpány z těchto pramenů [2], [3].

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

CHR	Charakteristická rovnice
DR	Diferenciální rovnice
fce	Funkce
FS	Fundamentální systém
HS	Hornerovo schéma
ODR	Obyčejné diferenciální rovnice
OŘ	Obecné řešení
PDR	Parciální diferenciální rovnice
pozn	Poznámka
PP	Perpartés
PŘ	Partikulární řešení
rce	Rovnice
resp	respektive
VK	Variace konstanty

Seznam obrázků

Obr. 1. Obvod.....	72
Obr. 2. Náskres situace.....	74
Obr. 3. Příklad závěsného mostu.....	75
Obr. 4. Náskres mostu.....	76
Obr. 5. Rozložení sil	76
Obr. 6. Náskres situace.....	78