
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

JANA ŘEZNÍČKOVÁ

Ústav matematiky
Fakulta aplikované informatiky
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně

Zlín, 2015

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Jana Řezníčková

Ústav matematiky
FAI UTB ve Zlíně

reznickova@fai.utb.cz

Obsah

I	OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE	5
1	Úvod	7
1.1	Motivace	8
1.2	Základní pojmy	11
2	ODR 1. řádu	15
2.1	Základní vlastnosti ODR 1. řádu	15
2.2	ODR přímo integrovatelné	18
2.3	ODR se separovanými proměnnými	19
2.4	Homogenní ODR 1. řádu	23
2.5	Lineární ODR 1. řádu	27
2.6	Bernoulliova rovnice	29
2.7	Exaktní DR. Integrační faktor	31
3	ODR vyšších řádů	37
3.1	Speciální typy ODR vyšších řádů	37
3.2	Lineární ODR vyšších řádů	41
3.2.1	Homogenní LODR vyšších řádů	41
3.2.2	Homogenní LODR vyšších řádů s konstantními koeficienty . .	47
3.2.3	Nehomogenní LODR vyšších řádů s konstantními koeficienty	51
4	Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu	59
4.1	Základní pojmy	60
4.2	Soustava dvou lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty . .	61
II	NEKONEČNÉ ŘADY	63
1	Číselné řady	65
1.1	Motivace	65
1.2	Posloupnosti	66
1.3	Základní pojmy	68
1.4	Základní vlastnosti číselných řad	75
1.5	Řady s nezápornými členy	77
1.6	Řady s libovolnými členy	84
1.6.1	Alternující řady	84
1.6.2	Řady absolutně a neabsolutně konvergentní	85

2	Mocninné řady	89
2.1	Funkční řady	89
2.2	Základní pojmy a vlastnosti mocninné řady. Obor konvergence . . .	90
2.3	Taylorova a Maclaurinova řada	98
3	Fourierovy řady	105
3.1	Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\varphi_n(x)\}$	106
3.2	Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$	108
3.3	Konvergence Fourierovy řady	111

Část I

**OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE**

Kapitola 1

Úvod

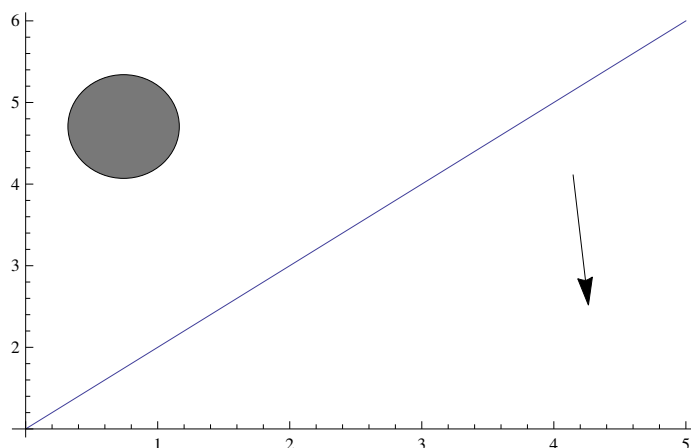
Při popisu zákonitostí v přírodních a společenských vědách se často setkáváme s otázkou, jak rychle se nějaká veličina mění v čase. Tuto rychlost změny vyjadřujeme pomocí derivace. Souvislost mezi derivací neznámé veličiny s ostatními veličinami pak popisujeme pomocí rovnic, které nazýváme **diferenciální rovnice**. Mezi nejčastější metody užívané při jejich řešení patří analytické a numerické metody. Analytické metody jsou takové, pomocí kterých získáme přímo funkční předpis pro neznámou funkci. Takových rovnic, které se v praxi dají řešit analyticky, však není příliš mnoho a navíc, zpravidla jde jen o speciální typy rovnic. Proto se většina úloh musí řešit numericky. V tomto kurzu se budeme zabývat analytickými metodami řešení diferenciálních rovnic.

Diferenciální rovnice se začaly objevovat v poslední čtvrtině 17. století v pracích pojednávajících o diferenciálním a integrálním počtu, zejména v dílech Nizozemce CH. HUYGENSE (1629 - 1695), Němce G. W. LEIBNIZE (1646 - 1716) a Angličana I. NEWTONA (1642-1727). Newton například pomocí diferenciálních rovnic zkoumal pohyby planet sluneční soustavy. Název **diferenciální rovnice** poprvé použil Leibniz v dopise Newtonovi v roce 1676. Základy klasifikace obyčejných diferenciálních rovnic a jejich řešení integrováním položili Leibniz se švýcarskými bratry JACOBEM (1654-1705) a JOHANNEM (1667-1748) BERNOULLIOVÝMI, kdy společně zavedli **metodu separace proměnných**. V roce 1693 pak Leibniz vyřešil **homogenní diferenciální rovnici** a v roce 1696 opět společně s bratry Bernoulliovými vyřešili tzv. **Bernoulliovu rovnici**.

Další rozvoj teorie DR probíhal v souvislosti s řešením různých fyzikálních úloh, např. řešení pohybových rovnic, formulace zákonů zachování, řešení elektrických obvodů apod.

V průběhu 18. století se o další rozvoj teorie DR nejvíce zasloužil L. EULER (1707-1783), který ve své práci z roku 1743 popsal metodu řešení **lineární DR n -tého řádu s konstantními koeficienty**. V této práci mimo jiné zavedl také pojmy **partikulární řešení** a **obecné řešení**. V roce 1775 popsal další významný matematik J. L. LAGRANGE (1736-1813) (nar. v Itálii, zemřel ve Francii) **metodu variace konstant**. Do konce 18. století byly nalezeny téměř všechny dnes známé typy a metody řešení DR.

Plot[$x + 1, \{x, 0, 5\}$]



1.1 Motivace

Diferenciální rovnice je rovnice, v níž se vyskytuje derivace neznámé funkce, řešení se pak hledá integrací. Už jen samotné hledání primitivní funkce k dané funkci se tedy dá považovat za řešení diferenciální rovnice.

Nechť na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je dána spojitá funkce $f(x)$. Najděte funkci $y = y(x)$, pro kterou na intervalu I platí pro každé $x \in I$ vztah

$$y'(x) = f(x).$$

Řešením této rovnice je

$$y(x) = \int f(x) dx + C,$$

kde $\int f(x) dx$ je libovolná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I a C je integrační konstanta.

Úloha nalezení primitivní funkce k dané funkci má tedy nekonečně mnoho řešení, které závisí na jedné reálné konstantě. V praxi je ovšem většinou potřeba ze všech těchto řešení vybrat takové (nazýváme ho partikulární), které splňuje dodatečnou podmínku (tzv. počáteční podmínku).

PŘÍKLAD 1.1.1

Uvažujme auto jedoucí po přímé silnici. Předpokládejme, že v každém časovém okamžiku t je okamžitá rychlost auta rovna $v(t) = 2t$. Najděte funkci $s(t)$ popisující polohu auta v závislosti na čase t , víte-li, že v čase $t = 1s$ auto urazilo dráhu 2 metry.

Řešení: Z fyziky je známo, že okamžitá rychlost $v(t)$ tělesa je rovna změně dráhy za jednotku času. Rychlost této změny dráhy v čase matematicky vyjadřujeme pomocí derivace, tj.

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = v(t).$$

Vidíme tedy, že hledaná funkce s vystupuje v rovnici ve své derivaci. Takové rovnici říkáme **diferenciální rovnice**.

Abychom zjistili závislost dráhy s na čase t , zintegrujeme předchozí vztah podle času t :

$$s(t) = \int v(t) dt = t^2 + C,$$

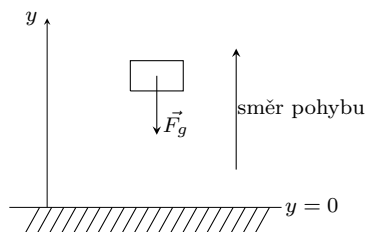
kde C je integrační konstanta. Dosazením podmínky $s(1) = 2$ do posledního vztahu obdržíme $C = 1$, takže závislost polohy auta na čase vyjadřuje funkce

$$s(t) = t^2 + 1.$$

PŘÍKLAD 1.1.2

Těleso je vrženo svisle vzhůru v tíhovém poli Země. V čase $t = 0s$ se nachází ve výšce y_0 s rychlostí v_0 . Najděte závislost polohy tělesa na čase. Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení: Situaci znázorníme na následujícím obrázku:



Podle 2. Newtonova pohybového zákona platí:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ -mg &= m \frac{d^2y(t)}{dt^2}.\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g.$$

Integrací této rovnice podle času dostaneme závislost rychlosti v na čase t :

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \int -g dt = -gt + C_1.$$

Dosazením podmínky $v(0) = v_0$ dostáváme

$$v_0 = -g \cdot 0 + C_1,$$

z čehož plyne $C_1 = v_0$, takže závislost rychlosti tělesa na čase bude

$$v(t) = -gt + v_0.$$

Následnou integrací posledního vztahu dostaneme vztah pro polohu tělesa v závislosti na čase:

$$y(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2.$$

Konstantu C_2 vypočteme z podmínky $y(0) = y_0$:

$$y_0 = -\frac{1}{2}g \cdot 0 + v_0 \cdot 0 + C_2,$$

tj. $C_2 = y_0$. Závislost polohy tělesa na čase bude mít tedy tvar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 + v_0t.$$

Předchozí dva příklady jsme dokázali vyřešit i bez znalostí z teorie diferenciálních rovnic. U následujících příkladů už rovnice, které daný problém popisují, nelze vyřešit přímým integrováním, tak jako to šlo u předchozího příkladu, ale je třeba zvolit vhodnou metodu řešení. Z toho důvodu uvedeme pouze příslušnou diferenciální rovnici a k jejímu vyřešení se pak vrátíme až po probrání dané metody v průběhu kurzu.

PŘÍKLAD 1.1.3

Spojité úročení.

Částka 1000 Kč se úročí 10 %. Na konci roku je pak na účtu částka 1100 Kč. Jestliže se úroky připisují půlročně, úročí se od poloviny roku částka 1050 Kč a na konci roku je na účtu částka 1102,50 Kč. Výpočet lze teoreticky stále zužovat: úročení probíhá čtvrtletně, měsíčně, týdně, denně atd. Kolik činí výše částky na účtu po roce spojitého úročení (tj. za předpokladu, že částka je úročena nepřetržitě)?

Řešení:

Nechť $y(t)$ vyjadřuje výši částky (v korunách) v čase t , přičemž hodnota nezávisle proměnné t je udávána v rocích. Lze ukázat, že hledaná funkce y musí vyhovovat rovnici

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(t)}{10}, \quad t \geq 0,$$

přičemž v čase $t = 0$ je $y(t) = y(0) = 1000$. Tato rovnice je rovnicí, v níž jako neznámá vystupuje funkce $y(t)$ a obsahuje derivaci funkce $y(t)$, jedná se tedy o rovnici diferenciální. Budeme ji zapisovat ve tvaru

$$y'(t) = \frac{y(t)}{10}.$$

Později uvidíme, že jediným řešením této rovnice splňující podmínku $y(0) = 1000$ je funkce

$$y(t) = 1000e^{\frac{t}{10}}.$$

Odtud tedy plyne, že výše částky (v korunách) po roce spojitého úročení činí $y(1) = 1105,17$ Kč. Uvedená diferenciální rovnice je příkladem tzv. **Malthusovy rovnice** $y' = ky$, kde $k \neq 0$ je reálná konstanta. Rovnici obecně sestavíme takto: Nechť $y = y(t)$ vyjadřuje množství dané veličiny v čase t . Za předpokladu, že okamžitá změna y je v každém okamžiku přímo úměrná hodnotě y , pak dostáváme Malthusovu rovnici.

PŘÍKLAD 1.1.4**Poločas rozpadu.**

Rychlost rozpadu prvku rádia je přímo úměrná jeho hmotnosti. Určete, kolik procent hmotnosti m_0 rádia se rozpadne za t let, je-li poločas rozpadu rádia (tj. doba, za kterou se rozpadne přesně polovina jeho původní hmotnosti) $T = 1590$ let.

Řešení: Označme m hmotnost rádia v čase t let a $k > 0$ konstantu úměrnosti. Pro časovou změnu hmotnosti pak platí

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

(záporné znaménko na pravé straně je z toho důvodu, že hmotnost nerozpadlých částic ubývá). Později ukážeme, že hmotnost částic za t let je dána vztahem

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Po dosazení podmínky dostaneme

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{t \ln 2}{1590}}.$$

1.2 Základní pojmy

DEFINICE 1.2.1

Diferenciální rovnice (DR) je rovnice, v níž neznámou je funkce a v níž se vyskytují derivace této funkce.

Obyčejnou diferenciální rovnici (ODR) nazýváme rovnici, ve které neznámou je funkce jedné proměnné a ve které se vyskytuje aspoň jedna derivace této funkce.

Parciální diferenciální rovnici (PDR) nazýváme rovnici, ve které neznámou je funkce více proměnných a ve které se vyskytují parciální derivace této funkce.

Řádem DR nazýváme řád nejvyšší derivace hledané funkce vyskytující se v dané rovnici.

Diferenciální rovnici (ODR či PDR) nazýváme **lineární**, je-li tato rovnice lineární vzhledem ke hledané funkci i její derivaci, případně derivacím.

DEFINICE 1.2.2

Obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu (nerozřešenou vzhledem k derivaci) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.1)$$

kde F je reálná funkce tří proměnných, x nezávisle proměnná, y funkce jedné reálné proměnné x a y' derivace funkce y .

Lze-li z rovnice (1.1) explicitně vyjádřit derivaci y' , pak dostáváme **obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu (rozřešenou vzhledem k derivaci)** ve tvaru

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných.

DEFINICE 1.2.3

Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu (nerozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci) rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných, x nezávisle proměnná, y je funkce jedné reálné proměnné x a $y', y'', \dots, y^{(n)}$ její derivace.

Lze-li z rovnice (1.3) explicitně vyjádřit nejvyšší derivaci, pak dostáváme **obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci** ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.4)$$

kde f je reálná funkce $n+1$ proměnných.

PŘÍKLAD 1.2.1

Příklady diferenciálních rovnic

- $y' = xy$ ODR 1. řádu,
- $x^3 y'' - y'^4 + \cos x = x - y$ ODR 2. řádu,
- $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \sin(xy)$ PDR 3. řádu pro neznámou funkci $z(x, y)$,
- $y^{(4)} \cdot y'' + \cos(xy') = 0$ ODR 4. řádu.

DEFINICE 1.2.4

Řešením (nebo též **integrálem**) **ODR** n -tého řádu (1.3), resp. (1.4), nazýváme každou funkci $y = y(x)$, která má na uvažovaném intervalu I derivace až do n -tého řádu včetně a vyhovuje dané rovnici, tj. po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost.

Křivku, která znázorňuje některé řešení dané ODR, nazýváme **integrální křivkou** této DR.

Pokud definiční obor řešení dané rovnice nebude dopředu stanoven, budeme obvykle hledat řešení definovaná na maximálním možném intervalu. Tato řešení se nazývají **maximální**. V dalším textu budeme tento přívlastek vynechávat.

Rovnici považujeme za vyřešenou, známe-li všechna její řešení. Rozlišujeme následující druhy řešení ODR:

DEFINICE 1.2.5

Řešení rovnice (1.3), resp. (1.4), nazýváme

- **obecné řešení**, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

kde $C_1, \dots, C_n$ jsou konstanty,

- **partikulární řešení**, lze-li jej získat z obecného řešení pro konkrétní hodnoty konstant $C_1, \dots, C_n$, které vypočteme nebo zvolíme,
- **vyjímecné řešení**, nelze-li jej získat z obecného řešení pro žádnou volbu hodnot $C_1, \dots, C_n$.

DEFINICE 1.2.6

Nechť $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou konstanty. Úloha najít řešení rovnice (1.3), resp. (1.4), které vyhovuje **počátečním podmínkám**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá **počáteční úloha** (nebo také **Cauchyova úloha**, **počáteční problém**).

Kapitola 2

ODR 1. řádu

V této kapitole se budeme věnovat obyčejným diferenciálním rovnicím prvního řádu. Nejdříve zavedeme základní pojmy a uvedeme základní vlastnosti těchto rovnic.

2.1 Základní vlastnosti ODR 1. řádu

DEFINICE 2.1.1

Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu s neznámou funkcí y rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.1)$$

případně

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

Řešením (integrálem) rovnice na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která je diferencovatelná na I a vyhovuje rovnici (2.1), resp. (2.2). Necht x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice (2.1), resp. (2.2), které splňuje zadanou **počáteční podmínku**

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.3)$$

se nazývá **počáteční úloha (Cauchyova úloha, počáteční problém)**. Jejím řešením rozumíme funkci, která splňuje podmínku (2.3) a je řešením rovnice (2.1), resp. (2.2), na nějakém intervalu obsahujícím bod x_0 . Řešení Cauchyovy úlohy je partikulárním řešením rovnice (2.1), resp. (2.2). Graf partikulárního řešení se nazývá **integrální křivka**.

POZNÁMKA 2.1.1

Rovnici (2.2) někdy uvádíme v ekvivalentním tvaru

$$dy = f(x, y) dx,$$

který získáme nahrazením derivace y' podílem diferenciálů dy/dx a formálním vynásobením rovnice (2.2) diferenciálem dx .

V souvislosti s diferenciálními rovnicemi nás budou zajímat především následující otázky:

- **EXISTENCE ŘEŠENÍ:** Má daná rovnice (počáteční úloha) nějaké řešení?
- **JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ:** Prochází daným bodem (x_0, y_0) jedna nebo více integrálních křivek?
- **NALEZENÍ ŘEŠENÍ:** Jak najdeme toto řešení? Lze toto řešení nalézt analytickou cestou (užitím integrálního počtu)?

Obecně se samozřejmě může stát, že řešení počáteční úlohy existuje několik nebo že za jistých podmínek nemusí existovat žádné řešení. Ve většině aplikací však požadujeme, aby daná počáteční úloha *měla* řešení a aby toto řešení bylo *jediné*. Toho je možné dosáhnout tehdy, jestliže funkce $f(x, y)$ bude mít určité „pěkné“ vlastnosti. Které to jsou, na to nám odpoví následující dvě věty. První z nich, Peanova věta, nám zaručuje pouze existenci řešení, nikoliv jednoznačnost. Tu nám zaručí další věta - Picardova.

VĚTA 2.1.1 (Peanova - o existenci)

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá v bodě (x_0, y_0) a jeho okolí, pak v tomto okolí *existuje* řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y) \quad (2.4)$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.5)$$

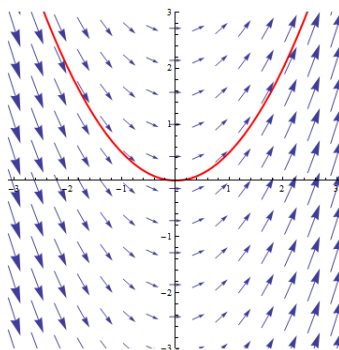
VĚTA 2.1.2 (Picardova - o jednoznačnosti)

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě (x_0, y_0) a jeho okolí. Dále nechť funkce $f(x, y)$ má v tomto okolí ohraničenou parciální derivaci $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Pak v tomto okolí *existuje právě jedno* řešení počáteční úlohy (2.4), (2.5).

POZNÁMKA 2.1.2**Geometrický význam ODR 1. řádu.**

Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ přiřazuje každému bodu (x, y) definičního oboru D_f funkce f právě jednu hodnotu $y'(x)$, kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem (x, y) . Tuto přímku budeme znázorňovat v souřadnicové rovině krátkou úsečkou se středem v bodě (x, y) a nazývat **lineární element**. Množinu všech lineárních elementů budeme nazývat **směrové pole** dané rovnice. Graf řešení y (tj. integrální křivka y) má zřejmě tu vlastnost, že jeho tečna v každém bodě $(x, y(x))$ obsahuje příslušný lineární element, takže lze často ze směrového pole odhadnout tvar integrálních křivek.

Počáteční podmínka (2.5) geometricky znamená, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem (x_0, y_0) . Má-li počáteční úloha (2.4), (2.5) jediné řešení, neprochází bodem (x_0, y_0) žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (s tímto případem se budeme setkávat velmi často), znamená to, že integrální křivky se nikde neprotínají.



Obrázek 2.1.1 Směrové pole

Už tedy víme, kdy a kolik má počáteční úloha (2.4), (2.5) řešení. Zbývá odpovědět, jak toto řešení nalézt. Analyticky umíme rovnici (2.4) řešit jen v případě, kdy funkce $f(x, y)$ má speciální tvar, v ostatních případech musíme použít numerické metody. Těmi se v tomto kurzu zabývat nebudeme.

Než uvedeme některé speciální typy ODR 1. řádu a metody jejich řešení, poznamenejme, že předpokladem úspěšného řešení diferenciálních rovnic je rozpoznání jejich typu, neboť na každý typ rovnice se používá jiná metoda.

2.2 ODR přímo integrovatelné

DEFINICE 2.2.1

ODR tvaru

$$y' = f(x), \quad (2.6)$$

kde f je spojitá funkce na otevřeném intervalu, nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnici přímo integrovatelnou**.

Postup řešení rovnice (2.6): Řešíme přímou integrací. Řešením je funkce

$$y = \int f(x) dx + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Je to **obecné řešení** této rovnice (zahrnuje všechna možná řešení). Libovolné partikulární řešení získáme z obecného řešení vhodnou volbou konstanty C .

PŘÍKLAD 2.2.1

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = 2x.$$

Řešení: $y = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

2.3 ODR se separovanými proměnnými

DEFINICE 2.3.1

ODR tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (2.7)$$

kde f, g jsou spojité funkce na otevřených intervalech, nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými**.

Postup řešení rovnice (2.7): Řešíme metodou

SEPARACE PROMĚNNÝCH:

1. Předpokládejme nejprve, že $g(y) \neq 0$ na uvažovaném intervalu.

- Derivaci y' formálně nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

- Se zlomkem $\frac{dy}{dx}$ pracujeme normálně jako s podílem dvou výrazů. Násobením a dělením převedeme rovnici na tvar, který obsahuje na každé straně pouze jednu proměnnou (tj. odseparujeme proměnné):

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

- Obě strany získané rovnosti zintegrujeme, levou stranu podle proměnné y , pravou podle proměnné x

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

- Odtud dostáváme obecné řešení (2.7) ve tvaru

$$G(y) = F(x) + C,$$

kde $G(y)$ je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

- Pokud je to možné, převedeme řešení do explicitního tvaru (tj. vyjádříme y).
- Pokud je zadána počáteční podmínka, dosadíme ji do obecného řešení a určíme hodnotu konstanty C . Tu pak dosadíme do obecného řešení a získáme tak řešení partikulární.

2. Má-li rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y = k_1, \dots, y = k_n$ řešeními rovnice (2.7). Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do obecného.

PŘÍKLAD 2.3.1

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$xy' - y = 0.$$

Řešení: Nejprve si vyjádříme y' :

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Odtud je vidět, že se jedná o ODR 1. řádu se separovanými proměnnými. Derivaci y' nahradíme podílem $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y.$$

Za předpokladu $x \neq 0$ a $y \neq 0$ odseparujeme proměnné:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Zintegrujeme levou stranu rovnice podle proměnné y , pravou podle x :

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Dostaneme

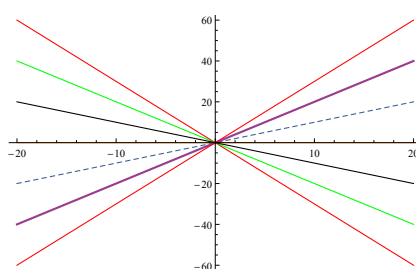
$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Odlogaritmuje a odstraníme absolutní hodnoty:

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Nyní vyřešíme případ $y = 0$. Dosazením této konstantní funkce do dané rovnice zjistíme, že je jejím řešením a že ji ze zahrnout do obecného řešení volbou $C = 0$. Celkově má tedy obecné řešení tvar

$$\underline{\underline{y = Cx, C \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 2.3.1 Integrální křivky rovnice $xy' - y = 0$.

PŘÍKLAD 2.3.2

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$xy' + y = y^2.$$

Řešení: Nejprve si vyjádříme y' :

$$y' = \frac{1}{x} (y^2 - y).$$

Odtud je vidět, že se jedná o ODR 1. řádu se separovanými proměnnými. Za předpokladu $x \neq 0$ a $y^2 - y \neq 0$ (tj. $y \neq 0 \wedge y \neq 1$) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} (y^2 - y) \\ \frac{dy}{y^2 - y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y^2 - y} &= \int \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Integrand na levé straně rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}.$$

Vynásobením výrazem $y^2 - y$ máme

$$1 = A(y-1) + By \implies \underline{A = -1, B = 1}.$$

Dosazením a integrací dostáváme

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = - \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y-1} = -\ln|y| + \ln|y-1| = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|.$$

Integrační konstantu neuvádíme, napíšeme ji až na pravou stranu rovnice. Po integraci obou stran tedy máme

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Odlogaritmuje

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = |Cx|, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0,$$

tj.

$$\frac{y-1}{y} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0,$$

a vyjádříme explicitně neznámou funkci y ve tvaru

$$y = \frac{1}{1 - Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Zbývá vyšetřit případ $y^2 - y = 0$, tj. $y = 0$ nebo $y = 1$. Dosazením těchto konstantních funkcí do zadané rovnice zjistíme, že obě jsou jejími řešeními. Řešení $y = 1$ lze zahrnout do obecného řešení volbou $C = 0$, ale řešení $y = 0$ nelze z obecného řešení získat žádnou volbou konstanty C . Všechna řešení dané rovnice jsou tedy tvaru

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1 - Cx}, C \in \mathbb{R}, y = 0.}}$$

POZNÁMKA 2.3.1

Na separovatelnou rovnici lze pomocí substituce převést rovnici typu

$$y' = f(ax + by + c), \quad (2.8)$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Substituce má tvar

$$z(x) = ax + by + c$$

(nová funkce z je funkcí proměnné x , neboť y závisí na proměnné x , tj. $y = y(x)$). Odtud

$$y = \frac{z - ax - c}{b}.$$

Derivováním tohoto vztahu podle x dostáváme

$$y' = \frac{z' - a}{b}, \quad \text{kde} \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}.$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme postupně

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \implies z' = a + bf(z).$$

Poslední vztah je rovnice se **separovanými proměnnými** z, x , jeho separací dostaneme

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

a dále pokračujeme metodou separace proměnných.

PŘÍKLAD 2.3.3

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - y + 3x = 5.$$

Řešení: Vyjádříme y' :

$$y' = -3x + y + 5.$$

Pravá strana rovnice je tvaru $f(ax + by + c)$, kde $a = -3, b = 1, c = 5$, zavedeme tedy substituci

$$z(x) = -3x + y + 5.$$

Odtud vyjádříme y :

$$y = z + 3x - 5 \implies y' = z' + 3.$$

Po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$z' + 3 = z,$$

tj.

$$z' = z - 3. \quad (2.9)$$

Odtud, za předpokladu $z - 3 \neq 0$, separací proměnných máme

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z-3} &= dx \\ \int \frac{dz}{z-3} &= \int dx \\ \ln|z-3| &= x + \ln|C|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0, \end{aligned}$$

což po odlogaritmování, odstranění absolutních hodnot a následné úpravě dává

$$z = Ce^x + 3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Případ $z - 3 = 0$ dává konstantní funkci $z = 3$, která, jak zjistíme přímým dosazením do (2.9), je jejím řešením. Toto konstantní řešení lze volbou konstanty $C = 0$ zahrnout do obecného řešení rovnice (2.9), tj.

$$z = Ce^x + 3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zbývá dosadit zpátky do substituce, po úpravě dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$\underline{\underline{y = Ce^x + 3x - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.4 Homogenní ODR 1. řádu

DEFINICE 2.4.1

ODR tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.10)$$

kde f je spojitá funkce na nějakém otevřeném intervalu, se nazývá **homogenní obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu**.

POZNÁMKA 2.4.1 (Poznámka)

1. Termínem **homogenní** bývají označovány i rovnice s nulovou pravou stranou, kterými se budeme zabývat později. V tomto odstavci však budeme uvedený název užívat pouze pro výše uvedený typ rovnic. Existují totiž funkce $f(x, y)$, pro které na nějaké oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ platí

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

pro libovolné $t \neq 0$. Funkce s touto vlastností se nazývají **homogenní k -tého stupně** a patří mezi ně například rovnice výše uvedeného typu.

2. Homogenní rovnici (2.10) poznáme podle toho, že proměnné x, y se na pravé straně vyskytují (po příslušné úpravě) pouze ve spojení $\frac{y}{x}$, resp. $\frac{x}{y}$, a nikoli samostatně.

Postup řešení homogenní rovnice (2.10):

1. Zavedeme substituci

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad \text{stručně : } u = \frac{y}{x}.$$

Odtud

$$y = ux \implies y' = u'x + u, \quad \text{kde } u' = \frac{du}{dx}.$$

2. Dosadíme do původní rovnice a dostaneme

$$u'x + u = f(u) \implies u' = \frac{1}{x}(f(u) - u),$$

což je rovnice se **separovanými proměnnými** x, u . Najdeme její řešení $u(x)$.

3. Obecné řešení původní rovnice (2.10) pak dostaneme užitím vztahu
- $y(x) = xu(x)$
- .

PŘÍKLAD 2.4.1

Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right).$$

Řešení: Vyjádříme y' :

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right). \quad (2.11)$$

Na pravé straně rovnice se vyskytují proměnné x, y pouze v podílu $\frac{y}{x}$, lze tedy užít substituci

$$u = \frac{y}{x}.$$

Odtud

$$y = ux, \implies y' = u'x + u.$$

Po dosazení do rovnice (2.11) a následné úpravě dostaneme

$$u' = \frac{1}{x} \cdot u \cdot \ln u, \quad (2.12)$$

což je separovatelná rovnice v proměnných x, u , takže separací proměnných

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

a integrací (integrál na levé straně řešíme substitucí $t = \ln u$) dostaneme

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + \ln |C|, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Odtud odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty je

$$\ln u = Cx, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

dalším odlogaritmováním máme

$$u = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

Je-li $u \ln u = 0$, tj. $u = 0$ nebo $u = 1$, pak pro $u = 0$ rovnice nemá řešení a pro $u = 1$ dostaneme konstantní řešení, které lze do obecného řešení zahrnout volbou $C = 0$. Je tedy obecné řešení rovnice (2.12)

$$u = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

takže obecné řešení původní rovnice dostaneme zpětnou substitucí $y = ux$ ve tvaru

$$\underline{y = xe^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

POZNÁMKA 2.4.2

Na rovnici homogenní lze převést rovnici typu

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right), \quad (2.13)$$

kde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Rovnici nejdříve upravíme na tvar (v čitateli i ve jmenovateli na pravé straně vytkneme x a zkrátíme)

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right),$$

zavedeme substituci $u = \frac{y}{x}$ a dále již řešíme jako **homogenní** rovnici užitím předchozího postupu.

PŘÍKLAD 2.4.2

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{2x + 3y}{2y - 3x}.$$

Řešení: V čitateli i ve jmenovateli na pravé straně vytkneme x :

$$y' = \frac{x(2 + 3\frac{y}{x})}{x(2\frac{y}{x} - 3)}.$$

Po jeho zkrácení dostaneme rovnici ve tvaru

$$y' = \frac{2 + 3\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 3}.$$

Zavedeme substituci

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{2+3u}{2u-3}, \\ u'x &= \frac{2+3u-u(2u-3)}{2u-3}, \\ u'x &= \frac{-2u^2+6u+2}{2u-3}, \\ u' &= \frac{-2}{x} \cdot \frac{u^2-3u-1}{2u-3}, \\ \frac{2u-3}{u^2-3u-1} du &= \frac{-2}{x} dx. \end{aligned}$$

V čitateli zlomku na levé straně máme derivaci jmenovatele, takže můžeme při integraci použít vzorec

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)|. \\ \ln |u^2-3u-1| &= -2 \ln |x| + \ln |C|, \\ \ln |u^2-3u-1| &= \ln \left| \frac{C}{x^2} \right|, \\ u^2-3u-1 &= \frac{C}{x^2}, \\ \left(\frac{y}{x} \right)^2 - 3 \cdot \frac{y}{x} - 1 &= \frac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

Dostáváme obecné řešení zadané homogenní rovnice

$$\underline{\underline{y^2 - 3xy - x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.5 Lineární ODR 1. řádu

DEFINICE 2.5.1

ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{2.14}$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce na otevřených intervalech, nazýváme **lineární obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu**.

Je-li $b(x) \equiv 0$, nazýváme rovnici (2.14) **homogenní lineární ODR 1. řádu**, v opačném případě mluvíme o **nehomogenní lineární ODR 1. řádu**.

POZNÁMKA 2.5.1

Název **homogenní** má zde zcela jiný význam než v odstavci 2.4. Stejná terminologie se však běžně užívá.

VĚTA 2.5.1 (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

Nechť funkce a, b jsou spojité na otevřeném intervalu $I, x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Pak každá počáteční úloha

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

má právě jedno řešení definované na celém I .

Postup řešení lineární rovnice (2.14): Obecné řešení hledáme metodou

VARIACE KONSTANTY.

Probíhá ve dvou krocích:

1. Nejdříve rovnici zhomogenizujeme, tj. položíme $b(x) = 0$. Dostaneme **homogenní lineární ODR příslušnou** (nebo též **přidruženou**) k rovnici (2.14) ve tvaru

$$y' = a(x)y, \quad (2.15)$$

v níž můžeme za předpokladu $y \neq 0$ separovat proměnné. Metodou separace proměnných nalezneme **obecné řešení** y_h homogenní rovnice (2.15) ve tvaru

$$y_h = Ce^{\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (2.16)$$

(volba $C = 0$ zahrnuje případ $y = 0$, který je rovněž řešením (2.15)).

2. Hledáme řešení původní nehomogenní rovnice (2.14). Ukazuje se, že obecné řešení rovnice (2.14) je také tvaru (2.16), ale s tím rozdílem, že C již není konstanta, ale jistá funkce proměnné x . Toto řešení má tedy tvar

$$y = C(x)e^{\int a(x) dx}. \quad (2.17)$$

Funkci $C(x)$ nalezneme tak, že vztah (2.17) i s jeho derivací (derivujeme jako součin)

$$y' = C'(x)e^{\int a(x) dx} + C(x)a(x)e^{\int a(x) dx}$$

dosadíme do původní nehomogenní rovnice (2.14). Po dosazení (členy obsahující $C(x)$ se musí vždy odečíst, jinak jsme při počítání udělali chybu) vyjde

$$C'(x)e^{\int a(x) dx} = b(x),$$

neboli

$$C'(x) = b(x)e^{-\int a(x) dx}.$$

Integrací dostaneme

$$C(x) = \int b(x)e^{-\int a(x) dx} dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením této funkce $C(x)$ do vztahu (2.17) dostáváme **obecné řešení nehomogenní lineární ODR** (2.14).

POZNÁMKA 2.5.2

Odvozený vzorec pro funkci $C(x)$ platí sice univerzálně pro všechny lineární rovnice, ale v praxi se doporučuje postupovat v jednotlivých krocích, jimiž byl odvozen. Výpočet je přehlednější a lze se snáze vyvarovat chyb.

PŘÍKLAD 2.5.1

Najděte obecné řešení rovnice

$$xy' - y = 2x^3.$$

Řešení: Rovnici upravíme na tvar

$$y' = \frac{1}{x}y + 2x^2 \quad (2.18)$$

a vidíme, že se jedná o lineární rovnici, ve které $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 2x^2$. Postupujeme následovně:

1. Rovnici zhomogenizujeme, tj. položíme $b(x) = 0$. Dostaneme rovnici

$$y' = \frac{1}{x}y,$$

kterou vyřešíme buď užitím vzorce (2.16) anebo metodou separace proměnných. Dostaneme tak obecné řešení y_h příslušné homogenní rovnice ve tvaru

$$y_h = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Konstantní řešení $y = 0$ je zahrnuto v y_h pro $C = 0$).

2. Metodou variace konstanty najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice, které hledáme ve tvaru

$$y = C(x) \cdot x. \quad (2.19)$$

Vypočítáme derivaci

$$y' = C'(x) \cdot x + C(x).$$

Po dosazení y, y' do nehomogenní rovnice (2.18) (lze samozřejmě dosadit i do původního tvaru zadané rovnice) máme

$$C'(x) \cdot x + C(x) = \frac{1}{x} \cdot C(x) \cdot x + 2x^2.$$

Odtud

$$C'(x) = 2x \implies C(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nalezenou funkci $C(x)$ dosadíme do (2.19) a dostaneme obecné řešení původní rovnice ve tvaru

$$\underline{\underline{y = (x^2 + C) \cdot x = x^3 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

2.6 Bernoulliiova rovnice

DEFINICE 2.6.1

ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad (2.20)$$

kde $r \in \mathbb{R}, r \neq 0, r \neq 1$ a funkce $a(x), b(x)$ jsou spojité na uvažovaných otevřených intervalech, se nazývá **Bernoulliiova rovnice**.

POZNÁMKA 2.6.1

Pro $r = 0$, resp. $r = 1$ bychom dostali lineární rovnici typu (2.14), resp. (2.15), a proto je neuvažujeme.

Postup řešení Bernoulliiovy rovnice (2.20): Ukážeme, že rovnici (2.20) lze substitucí $z(x) = y^{1-r}(x)$ (stručně: $z = y^{1-r}$) převést na **lineární ODR 1. řádu**. Položme tedy (za předpokladu $y \neq 0$)

$$z = y^{1-r}.$$

Potom

$$\begin{aligned} z' &= (1-r)y^{1-r-1}y' \\ &= (1-r)y^{-r}[a(x)y + b(x)y^r] \\ &= \underbrace{(1-r)a(x)}_{p(x)}y^{1-r} + \underbrace{(1-r)b(x)}_{q(x)} \\ &= p(x)z + q(x), \end{aligned}$$

což je lineární ODR 1. řádu v proměnných x, z . Tuto rovnici vyřešíme postupem uvedeným v odstavci 2.5 a z jejího obecného řešení pak prostřednictvím dané substituce získáme obecné řešení původní rovnice (2.20).

Kromě řešení, která takto získáme, má rovnice (2.20) pro $r > 0$ také řešení $y(x) = 0$.

PŘÍKLAD 2.6.1

Najděte obecné řešení rovnice

$$xyy' = y^2 + x.$$

Řešení: Rovnici upravíme na tvar

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{y}, \quad \text{tj.} \quad y' = \frac{1}{x}y + y^{-1}.$$

Je vidět, že jde o Bernoulliiovu rovnici, v níž $a(x) = \frac{1}{x}, b(x) = 1, r = -1$, zavedeme tedy substituci

$$z = y^{1-r} = y^2.$$

Odtud

$$z' = 2yy' = 2y \left(\frac{1}{x}y + \frac{1}{y} \right) = \frac{2}{x} \cdot z + 2.$$

Dostali jsme lineární nehomogenní rovnici 1. řádu ve tvaru

$$z' = \frac{2}{x} \cdot z + 2, \quad (2.21)$$

kterou vyřešíme metodou variace konstanty. Vyjde obecné řešení rovnice (2.21) ve tvaru

$$z = Cx^2 - 2x, \quad C \in \mathbb{R},$$

takže obecné řešení Bernoulliovy rovnice bude (užijeme substituci $z = y^2$) mít implicitní tvar

$$\underline{\underline{y^2 = Cx^2 - 2x, \quad C \in \mathbb{R}}}$$

2.7 Exaktní DR. Integrační faktor

V tomto odstavci se budeme zabývat diferenciální rovnicí ve tvaru

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (2.22)$$

kde $P(x, y), Q(x, y)$ jsou spojité funkce na nějaké oblasti¹ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a mají zde spojité parciální derivace prvního řádu a $Q(x, y) \neq 0$ na Ω . Rovnice (2.22) se častěji uvádí ve tvaru pomocí diferenciálu

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

DEFINICE 2.7.1

Nechť $P(x, y), Q(x, y)$ jsou funkce dvou proměnných, které mají spojité parciální derivace na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že diferenciální rovnice tvaru

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.23)$$

je **exaktní**, jestliže výraz

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (2.24)$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x, y)$, která se nazývá **kmenová funkce**.

Z diferenciálního počtu funkce více proměnných víme, že totální diferenciál funkce $F(x, y)$ dvou proměnných x, y má tvar

$$dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy.$$

Aby tedy výraz (2.24) byl totálním diferenciálem funkce $F(x, y)$, musí být

$$dx(x, y) = F'_x dx + F'_y dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

¹oblast=otevřená souvislá množina

tj. musí platit

$$\boxed{F'_x = P(x, y) \quad \text{a} \quad F'_y = Q(x, y)}. \quad (2.25)$$

Odtud plyne pro parciální derivace funkcí $P(x, y), Q(x, y)$:

$$P'_y = F''_{xy}, \quad Q'_x = F''_{yx}.$$

Protože jsou obě parciální derivace P'_y, Q'_x spojité, jsou smíšené parciální derivace na pravých stranách stejné (plyne ze Schwarzovy věty o záměnnosti spojitých smíšených parciálních derivací), tj. platí

$$F''_{xy} = F''_{yx} \implies P'_y = Q'_x.$$

Odtud plyne následující tvrzení:

VĚTA 2.7.1

Nechť funkce $P(x, y), Q(x, y)$ mají spojité parciální derivace na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Rovnice (2.23) je exaktní právě tehdy, když

$$P'_y = Q'_x. \quad (2.26)$$

Je-li $F(x, y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Postup řešení exaktní rovnice (2.23):

1. Nejdříve ověříme, že výraz (2.24) je totálním diferenciálem, tj. že platí (2.26).
2. Nalezneme kmenovou funkci $F(x, y)$ tímto způsobem: Má-li být funkce $F(x, y)$ kmenovou funkcí totálního diferenciálu, musí platit vztahy (2.25). Vezmeme například první z těchto vztahů

$$F'_x = P(x, y)$$

a zintegrujeme ho podle proměnné x . Dostaneme

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y), \quad (2.28)$$

kde při integrování podle proměnné x považujeme y za konstantu (podobně jako při výpočtu parciální derivace) a $C(y)$ je integrační konstanta. Tato konstanta nezávisí na proměnné x , může to být ovšem veličina, která závisí na proměnné y . Abychom tuto veličinu zjistili, zderivujeme obdrženou rovnost podle y

$$F'_y = \left(\int P(x, y) dx \right)'_y + C'(y),$$

kde $C'(y)$ je obyčejná derivace funkce jedné proměnné. Vzhledem ke druhému vztahu v (2.25)

$$F'_y = Q(x, y)$$

platí

$$F'_y = \left(\int P(x, y) dx \right)'_y + C'(y) = Q(x, y).$$

Z rovnosti v rámečku vyjádříme $C'(y)$ a integraci (podle proměnné y) nalezneme hledanou funkci $C(y)$. (Dá se ukázat, že při úpravách vychází pro $C'(y)$ rovnice, která neobsahuje proměnnou x). Získanou funkci $C(y)$ dosadíme do (2.28) a tím jsme našli kmenovou funkci.

3. Zapišeme **obecné řešení exaktní rovnice** ve tvaru

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 2.7.1

Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + D(x)$$

a pokračovat určením funkce $D(x)$, která tentokrát nezávisí na proměnné y , může však být funkcí proměnné x .

PŘÍKLAD 2.7.1

Určete obecné řešení rovnice $(x^2 - y^2) dx + (y^3 - 2xy) dy = 0$.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, že rovnice je exaktní, tj. že platí (2.26):

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) = x^2 - y^2 &\implies P'_y = -2y \\ Q(x, y) = y^3 - 2xy &\implies Q'_x = -2y \end{aligned} \right\} \implies P'_y = Q'_x,$$

rovnice je tedy exaktní.

2. Nalezneme kmenovou funkci, například užitím (2.28):

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx = \int (x^2 - y^2) dx = \frac{x^3}{3} - xy^2 + C(y). \quad (2.29)$$

Obdrženou funkci zderivujeme podle y a položíme ji rovnu funkci $Q(x, y)$:

$$F'_y = -2xy + C'(y) = y^3 - 2xy.$$

Odtud

$$C'(y) = y^3 \implies C(y) = \frac{y^4}{4}.$$

Dosadíme do (2.29):

$$F(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^4}{4}.$$

3. Zapišeme obecné řešení exaktní rovnice

$$\underline{\underline{\frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^4}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

Pokud rovnice (2.23) není exaktní, tj. není splněna podmínka (2.26) z předchozí věty, pak hledáme takovou funkci $m(x, y) \neq 0$, aby rovnice (vzniklá z původní rovnice vynásobením funkcí $m(x, y)$)

$$m(x, y) [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = m(x, y)P(x, y) dx + m(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

byla exaktní, tj. aby platilo

$$\frac{\partial(mP)}{\partial y} = \frac{\partial(mQ)}{\partial x}. \quad (2.30)$$

Funkce $m(x, y)$ se nazývá **integrační faktor** rovnice (2.23). Dá se ukázat, že pokud funkce $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ mají spojitě parciální derivace a nejsou současně rovny nule, pak integrační faktor existuje, nicméně jeho nalezení je obecně obtížné. Často lze však najít integrační faktor m jen jako funkci proměnné x nebo jako funkci proměnné y . Odvodíme jeho nalezení.

Nechť m je integrační faktor rovnice (2.23), tj. rovnice

$$mP dx + mQ dy = 0$$

je exaktní. To tedy znamená, že platí (2.30). Derivací součinu dostáváme

$$\frac{\partial(mP)}{\partial y} = P \cdot \frac{\partial m}{\partial y} + m \cdot \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(mQ)}{\partial x} = Q \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + m \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Z rovnosti těchto parciálních derivací plyne po úpravě

$$m \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \cdot \frac{\partial m}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial m}{\partial y}.$$

1. Je-li nyní $m = m(x)$ (tj. $\frac{\partial m}{\partial y} = 0$), dostáváme

$$m \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \cdot \frac{dm}{dx}$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx,$$

takže má-li být m pouze funkcí proměnné x , musí být výraz

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

pouze funkcí proměnné x .

Integrační faktor $m(x)$ pak vypočteme ze vztahu

$$m(x) = e^{\int \alpha(x) dx}, \quad \text{kde} \quad \alpha(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

2. Je-li $m = m(y)$ (tj. $\frac{\partial m}{\partial x} = 0$), dostáváme

$$m \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -P \cdot \frac{dm}{dy}$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} dy,$$

takže má-li být m pouze funkcí proměnné y , musí být výraz

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}$$

pouze funkcí proměnné y .

Integrační faktor $m(y)$ pak vypočteme ze vztahu

$$m(y) = e^{\int \beta(y) dy}, \quad \text{kde} \quad \beta(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}.$$

PŘÍKLAD 2.7.2

Řešte rovnici

$$2xy^2 dx + (3x^2y + 4) dy = 0.$$

Řešení: Ověříme podmínku (2.26):

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = 2xy^2 \implies P'_y = 4xy \\ Q(x, y) = 3x^2y + 4 \implies Q'_x = 6xy \end{array} \right\} \implies \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

tedy rovnice není exaktní. Hledejme integrační faktor $m = m(x)$ nebo $m = m(y)$. Protože

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{1}{y} = \beta(y),$$

bude integrační faktor ve tvaru

$$m(y) = e^{\int \beta(y) dy} = y.$$

Původní rovnici tedy vynásobíme výrazem y a dostaneme rovnici

$$2xy^3 dx + (3x^2y^2 + 4y) dy, \quad (2.31)$$

která, jak se můžeme snadno přesvědčit, už je exaktní. Dále již řešíme rovnici (2.31) postupem užívaným u exaktních rovnic. Obecné řešení vyjde ve tvaru

$$\underline{\underline{x^2y^3 + 2y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Kapitola 3

ODR vyšších řádů

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálními rovnicemi, v nichž se neznámá funkce y vyskytuje ve druhé či vyšší, obecně n -té, derivaci. Jsou to rovnice tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1)$$

resp.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (3.2)$$

Základní pojmy pro tyto rovnice byly nadefinovány v úvodní kapitole. Budeme se zabývat zejména takovými rovnicemi, které se v technické praxi vyskytují nejčastěji - jsou to tzv. **lineární ODR n -tého řádu**. Využijeme přitom dřívějších poznatků o lineární ODR 1. řádu (Odstavec 2.5). Nejdříve si ale uvedeme dva speciální typy ODR vyšších řádů, které se řeší zvláštními postupy.

3.1 Speciální typy ODR vyšších řádů

1. Rovnice typu

$$\boxed{y^{(n)} = f(x)}. \quad (3.3)$$

Jde o rovnici, ve které se neznámá funkce y vyskytuje pouze v n -té derivaci, $n \geq 2$.

Postup řešení rovnice (3.3): Řešíme postupnou integrací takto:

Je-li funkce f integrovatelná, lze rovnici zintegrovat a dostaneme

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta. Dalším integrováním obdržíme

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2,$$

kde C_2 je další integrační konstanta, obecně různá od C_1 .

Opakujeme-li tento postup celkem n -krát, dostaneme vyjádření řešení y pomocí n integračních konstant $C_1, \dots, C_n$ a nazveme ho **obecné řešení rovnice (3.3)**. Má tvar

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n\text{-krát}} f(x) dx \cdots dx + \frac{1}{n-1} C_1 x^{n-1} + \cdots + C_{n-1} x + C_n.$$

Připomeňme, že máme-li za úkol najít řešení partikulární, je třeba určit hodnoty celkem n integračních konstant. Aby tedy byla Cauchyova úloha formulována korektně, je potřeba zadat celkem n počátečních podmínek

$$\boxed{y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}}, \quad (3.4)$$

kde $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou reálná čísla. Je-li funkce f spojitá na intervalu I obsahujícím bod x_0 , má každá počáteční úloha (3.3), (3.4) právě jedno řešení definované na intervalu I (viz Picardova věta o jednoznačnosti; ohraničenost parciální derivace funkce f podle proměnné y je splněna automaticky).

PŘÍKLAD 3.1.1

Najděte obecné řešení rovnice $y^{(4)} = \sin x$.

Řešení: Neznámá funkce y se v rovnici vyskytuje pouze ve 4. derivaci, takže 4-násobnou integrací najdeme obecné řešení. Postupně dostáváme

$$y^{(3)} = \int \sin x \, dx = -\cos x + C_1,$$

$$y'' = \int (-\cos x + C_1) \, dx = -\sin x + C_1x + C_2,$$

$$y' = \int (-\sin x + C_1x + C_2) \, dx = \cos x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

a poslední integrací dostaneme obecné řešení

$$y = \int \left(\cos x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \right) dx = \underline{\underline{\sin x + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4}},$$

kde $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

2. Rovnice typu

$$\boxed{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0, \quad k \geq 1.} \quad (3.5)$$

V takovéto rovnici se neznámá funkce y vyskytuje až od k -té derivace.

Postup řešení rovnice (3.5): Zavedeme substituci

$$y^{(k)} = u(x).$$

Derivací podle proměnné x obdržíme

$$y^{(k+1)} = u'(x).$$

Pokračujeme až do n -té derivace funkce y

$$y^{(n)} = u^{(n-k)}(x).$$

Tím snížíme řád rovnice (3.5) na rovnici řádu $(n - k)$:

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0.$$

Řešením této rovnice bude funkce tvaru $u(x) = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, kde $C_1, \dots, C_{n-k}$ jsou nezávislé konstanty (jejich počet je $n - k$). Funkci $u(x)$ pak dosadíme do substituce $y^{(k)} = u(x)$. Tím obdržíme rovnici, která je předchozího typu, takže k -násobnou integrací funkce u dostaneme obecné řešení rovnice (3.5).

PŘÍKLAD 3.1.2

Najděte obecné řešení rovnice $xy'' + y' + x = 0$.

Řešení: Neznámá funkce y se v rovnici vyskytuje od 1. derivace, zavedeme proto substituci

$$y' = u(x). \quad (3.6)$$

Zderivujeme podle x

$$y'' = u'(x)$$

a dosadíme y' a y'' do zadané rovnice. Máme tedy

$$xu' + u + x = 0.$$

Vyjádríme u'

$$u' = \frac{-x - u}{x} = -\frac{u}{x} - 1 \quad (3.7)$$

a vidíme, že se jedná o nehomogenní lineární ODR 1. řádu. Řešíme metodou variace konstanty (viz odstavec 2.5): Nejdříve zjistíme obecné řešení u_h příslušné homogenní rovnice

$$u' = -\frac{u}{x},$$

a to buď užitím vzorce (2.16) anebo separací proměnných. Vyjde

$$u_h = \frac{C}{x}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice (3.7) pak hledáme ve tvaru

$$u = \frac{C(x)}{x}.$$

Po zderivování, dosazení u a u' do rovnice (3.7) a úpravě dostáváme

$$C'(x) = -x \implies C(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice (3.7) je tedy tvaru

$$u = \frac{C_1}{x} - \frac{1}{2}x.$$

Funkci u dosadíme do substituce (3.6), tedy

$$y' = u = \frac{C_1}{x} - \frac{1}{2}x.$$

Dostali jsme rovnici přímo integrovatelnou, takže

$$y = \int \left(\frac{C_1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx = \underline{\underline{C_1 \ln |x| - \frac{1}{4}x^2 + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},}}$$

což je obecné řešení zadané rovnice.

3.2 Lineární ODR vyšších řádů

V úvodní kapitole jsme diferenciální rovnici (libovolného řádu) nazvali **lineární**, je-li tato rovnice lineární vzhledem k hledané funkci y a všem jejím derivacím. Nyní zformulujeme přesnou definici lineární ODR n -tého řádu.

DEFINICE 3.2.1

ODR tvaru

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (3.8)$$

kde $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou funkce (proměnné x) definované a spojité na intervalu I , $a_n \neq 0$, se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu** (zkráceně **LODR n -tého řádu**).

Je-li $f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, mluvíme o **homogenní LODR n -tého řádu**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, jedná se o **nehomogenní LODR n -tého řádu**.

Řešením (nebo též **integrálem**) rovnice (3.8) na intervalu I rozumíme funkci, která má na I spojité derivace až do řádu n a po dosazení identicky splňuje rovnost (3.8) na I .

Úloha najít řešení rovnice (3.8) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (3.9)$$

kde $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční (Cauchyova) úloha**. Řešení Cauchyovy úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (3.8).

3.2.1 Homogenní LODR vyšších řádů

Při řešení nehomogenní lineární rovnice 1. řádu jsme postupovali tak, že jsme nejdříve hledali obecné řešení příslušné homogenní rovnice. Analogicky postupujeme v případě LODR vyššího řádu. Uvedeme si tedy nejprve základní vlastnosti a metody řešení homogenní rovnice. Pro názornost začneme homogenní LODR 2. řádu a poté získané výsledky zobecníme na řád n .

A. HOMOGENNÍ LODR 2. ŘÁDU**DEFINICE 3.2.2**

Buďte $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ a $f(x)$ funkce spojité a definované na intervalu I . Diferenciální rovnice

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (3.10)$$

se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu** (zkráceně **LODR 2. řádu**).

Řešením (nebo též **integrálem**) rovnice (3.10) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do 2. řádu na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (3.10) na I .

Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, tj. je-li rovnice tvaru

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (3.11)$$

mluvíme o **homogenní LODR 2. řádu**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro některé $x \in I$, mluvíme o **nehomogenní LODR 2. řádu**.

DEFINICE 3.2.3

Úloha nalézt řešení rovnice (3.10) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad (3.12)$$

kde y_0, y_1 jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční úloha (Cauchyova úloha)**. Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (3.10).

POZNÁMKA 3.2.1

Jsou-li koeficienty $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ spojité funkce, má každá počáteční úloha (3.10), (3.12) právě jedno řešení, které je definováno na celém intervalu I .

Na levou stranu rovnice (3.10) se můžeme dívat také jako na lineární kombinaci funkcí y, y', y'' . S tímto pojmem jste se již setkali u vektorů v souvislosti s vyšetřováním jejich lineární závislosti či nezávislosti. Tyto pojmy hrají důležitou roli také při popisu a charakterizaci řešení LODR, proto si je nyní připomeneme.

DEFINICE 3.2.4

Nechť C_1, C_2 jsou konstanty a $y_1(x), y_2(x)$ funkce. Výraz

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3.13)$$

nazýváme **lineární kombinací** funkcí $y_1(x), y_2(x)$ s koeficienty C_1, C_2 . Řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x)$ jsou na intervalu I **lineárně závislé**, jestliže existují takové konstanty C_1, C_2 , z nichž alespoň jedna je různá od nuly, že platí

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0. \quad (3.14)$$

V opačném případě řekneme, že funkce $y_1(x), y_2(x)$ jsou **lineárně nezávislé** (tj. když rovnost (3.14) je splněna pouze pro $C_1 = C_2 = 0$).

POZNÁMKA 3.2.2

Jinými slovy, funkce $y_1(x), y_2(x)$ jsou na intervalu I lineárně závislé, jestliže jedna z nich je násobkem druhé na I , tj. jestliže existuje reálné číslo $k \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$y_1(x) = k y_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = k y_1(x) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Protože ověřování lineární závislosti či nezávislosti funkcí podle výše uvedené definice může být problém (zejména v případě více funkcí), uvedeme obecnou metodu, která je pro posuzování lineární závislosti či nezávislosti funkcí praktičtější. Nejdříve si zavedeme pojem, který k tomu budeme potřebovat.

DEFINICE 3.2.5

Nechť funkce $y_1(x), y_2(x)$ mají na intervalu I derivace. Potom determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

se nazývá **Wronského determinant (wronskián)** funkcí $y_1(x), y_2(x)$.

Nyní uvedeme ekvivalentní podmínku pro lineární nezávislost řešení homogenní rovnice (3.11).

VĚTA 3.2.1 (Charakterizace lineárně nezávislých řešení)

Nechť $y_1(x), y_2(x)$ jsou dvě řešení homogenní rovnice (3.11) na I . Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když je jejich wronskián různý od nuly na intervalu I , tj.

$$W(x) \neq 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

POZNÁMKA 3.2.3

Dá se dokázat, že podmínku pro *všechna* lze nahradit podmínkou pro *některé* $x \in I$.

DEFINICE 3.2.6

Dvojice řešení $y_1(x), y_2(x)$ homogenní rovnice (3.11), která jsou lineárně nezávislá na intervalu I , se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (3.11).

V následující větě ukážeme, jak vypadá obecné řešení homogenní rovnice (3.11).

VĚTA 3.2.2 (Tvar obecného řešení homogenní LODR 2. řádu)

Nechť funkce $y_1(x), y_2(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní LODR 2. řádu (3.11). Pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.16)$$

kde C_1, C_2 jsou vhodné (reálné) konstanty. Jinak řečeno, vztah (3.16) vyjadřuje **obecné řešení** rovnice (3.11) na intervalu I .

DEFINICE 3.2.9

Systém řešení homogenní rovnice (3.17) $y_1(x), \dots, y_n(x)$, která jsou lineárně nezávislá na intervalu I , se nazývá **fundamentální systém řešení** této rovnice.

VĚTA 3.2.4 (Tvar obecného řešení homogenní LODR n -tého řádu)

Nechť funkce $y_1(x), \dots, y_n(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní LODR n -tého řádu (3.17). Pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (3.21)$$

kde $C_1, \dots, C_n$ jsou vhodné (reálné) konstanty. Jinak řečeno, vztah (3.21) vyjadřuje **obecné řešení** rovnice (3.17) na intervalu I .

3.2.2 Homogenní LODR vyšších řádů s konstantními koeficienty

V konkrétních aplikacích, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi n -tého řádu, vystupují místo funkcí $a_0(x), \dots, a_n(x)$ většinou konstanty (jsou to různé fyzikální nebo jiné parametry jako hmotnost, hustota, frekvence, elektrický odpor aj.). Budeme se nyní takovými rovnicemi zabývat podrobněji, nejdříve rovnicemi 2. řádu a poté provedeme zobecnění pro rovnice n -tého řádu.

A. HOMOGENNÍ LODR 2. ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Budeme studovat rovnici tvaru

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (3.22)$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$. Nejprve si všimněme, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad (3.23)$$

kde λ je zatím blíže nespecifikovaná konstanta. Zderivujeme

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

a dosadíme do původní rovnice. Po vytknutí a vydělení (nenulovým) výrazem $e^{\lambda x}$ dostáváme

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou λ . Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = e^{\lambda x}$ bude řešením rovnice (3.22) právě tehdy, když λ bude řešením příslušné kvadratické rovnice.

DEFINICE 3.2.10

Kvadratickou rovnici

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.24)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (3.22).

K nalezení fundamentálního systému řešení rovnice (3.22) je tedy třeba nejdříve zjistit kořeny charakteristické rovnice. Praktický návod, jak pomocí kořenů charakteristické rovnice najít fundamentální systém, udává následující věta:

VĚTA 3.2.5

Uvažujme homogenní LODR 2. řádu (3.22) s charakteristickou rovnicí (3.24).

1. Charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2 . Potom má diferenciální rovnice (3.22) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen λ . Potom má diferenciální rovnice (3.22) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b \neq 0$. Potom má diferenciální rovnice (3.22) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

a její obecné řešení je tvaru

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 3.2.4

Dokazování je založeno na ověření lineární nezávislosti příslušné dvojice řešení, a to pomocí wronskiánu. Uvedená věta tedy zaručuje, že řešení nalezená v souladu s ní budou vždy lineárně nezávislá, a proto není potřeba v jednotlivých situacích zkoumat, zda je příslušný wronskián nenulový.

Jednotlivé varianty z předchozí věty si nyní ilustrujeme na příkladech.

PŘÍKLAD 3.2.1

Určete obecná řešení následujících rovnic:

a) $y'' - y' - 6y = 0$,

b) $4y'' - 4y' + y = 0$,

c) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení:

a) Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Její kořeny jsou dva různé reálné $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$. Odtud dostáváme, že funkce

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

jsou lineárně nezávislá řešení dané rovnice, tj. tvoří fundamentální systém (FS) řešení této rovnice.

Obecné řešení má tedy tvar

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Charakteristická rovnice je tvaru

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

a má jeden dvojnásobný reálný kořen $\lambda = \frac{1}{2}$. FS tedy tvoří dvojice lineárně nezávislých řešení ve tvaru

$$y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x}, \quad y_2(x) = x e^{\frac{1}{2}x}.$$

Obecné řešení má tvar

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) V tomto případě má charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$. FS je tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$y_1 = e^{3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{3x} \sin 2x.$$

Obecné řešení je

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

B. HOMOGENNÍ LODR n -TÉHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Jde o rovnici

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad (3.25)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$. Analogicky jako v případě $n = 2$ hledáme řešení ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x},$$

kde λ je zatím neurčená konstanta. Dosazením této funkce a jejích derivací (až do řádu n) do rovnice (3.25) a po vytknutí a vydělení nenulovým výrazem $e^{\lambda x}$ dostáváme rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Můžeme tedy zformulovat následující definici:

DEFINICE 3.2.11

Rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.26)$$

nazýváme **charakteristickou rovnici** diferenciální rovnice (3.25).

K určení λ je tedy třeba vyřešit tuto charakteristickou rovnici. Z algebry je známo, že tato rovnice má celkem n komplexních kořenů, přičemž každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost. Zobecněním případu $n = 2$ dostáváme následující větu:

VĚTA 3.2.6

Uvažujme homogenní LODR n -tého řádu (3.25) s charakteristickou rovnicí (3.26). Potom fundamentální systém řešení rovnice (3.25) získáme takto:

1. Ke každému k -násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice (3.26) přísluší právě k lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (3.25) tvaru

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

2. Ke každému k -násobnému komplexnímu kořenu $\lambda = a + ib$ (a zároveň k jeho komplexně sdruženému kořenu $\bar{\lambda} = a - ib$) přísluší právě $2k$ lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (3.25) tvaru

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$y_{k+1} = e^{ax} \sin bx, y_{k+2} = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

PŘÍKLAD 3.2.2

Najděte obecná řešení rovnic:

a) $y''' - 4y'' - 4y' + 16y = 0,$

b) $y^{(4)} + 6y^{(3)} + 9y'' = 0,$

c) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0,$

Obecná řešení vyjdou

a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{4x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$

b) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x} + C_4 x e^{-3x}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R},$

c) $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

3.2.3 Nehomogenní LODR vyšších řádů s konstantními koeficienty

Nyní se budeme zabývat rovnicí tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (3.27)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ je funkce definovaná, spojitá a nenulová na intervalu I .

VĚTA 3.2.7 (Tvar obecného řešení nehomogenní LODR n -tého řádu)

Obecné řešení nehomogenní rovnice (3.27) lze psát ve tvaru

$$y = y_h + y_p, \quad (3.28)$$

kde y_h je obecné řešení homogenní LODR n -tého řádu příslušné k rovnici (3.27), tj. obecné řešení rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad (3.29)$$

a y_p je libovolné partikulární řešení rovnice (3.27).

POZNÁMKA 3.2.5

K určení obecného řešení nehomogenní rovnice (3.27) tedy podle předchozí věty stačí znát obecné řešení příslušné homogenní rovnice a jedno libovolné partikulární řešení původní nehomogenní rovnice.

Ukážeme si dvě metody k nalezení partikulárního řešení – metodu variace konstant a metodu neurčitých koeficientů.

METODA VARIACE KONSTANT

Tato metoda je univerzálnější, lze ji použít obecně pro každou spojitou funkci $f(x)$, je ovšem pracná. Princip metody je stejný jako v případě lineární ODR 1. řádu. Popíšme ho pro případ nehomogenní LODR 2. řádu s konstantními koeficienty, pro LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty jej pak zobecníme.

Uvažujme tedy rovnici

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (3.30)$$

kde a_0, a_1, a_2 jsou konstanty a $f(x)$ je nenulová funkce proměnné x spojitá na nějakém intervalu I . Předpokládejme, že jsme našli obecné řešení y_h příslušné homogenní rovnice

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (3.31)$$

Zapišme toto řešení ve tvaru

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (3.32)$$

Podobně jako v případě LODR 1. řádu hledejme obecné řešení nehomogenní rovnice (3.30) ve tvaru

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \quad (3.33)$$

kde $C_1(x), C_2(x)$ jsou neznámé funkce.

První derivace vztahu (3.33) je

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Volba dvojice nových funkcí dovoluje stanovit vhodnou doplňující podmínku pro jejich vzájemný vztah. Nejvýhodnější pro další postup je požadavek, aby

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Po dosazení tohoto požadavku do vypočtené první derivace $y'(x)$ bude tedy

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x).$$

Druhá derivace pak bude

$$y''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

Dosazením $y'(x)$ a $y''(x)$ do (3.30) je (vynecháme argument x)

$$C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(C_1' y_1' + C_2' y_2') = f.$$

Výrazy v prvních dvou závorkách jsou rovny nule, protože y_1 i y_2 jsou řešením příslušné homogenní rovnice (3.31). Zůstává rovnost

$$a_2(C_1' y_1' + C_2' y_2') = f.$$

Celkově tedy pro dvě neznámé funkce $C_1'(x), C_2'(x)$ máme dvě podmínky

$$\begin{aligned} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) &= \frac{f(x)}{a_2}. \end{aligned}$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých funkcích $C_1'(x), C_2'(x)$. Determinant této soustavy je wronskián $W(x)$, který je vzhledem k lineární nezávislosti funkcí $y_1(x), y_2(x)$ různý od nuly pro všechna $x \in I$. Soustava má tedy právě jedno řešení na celém intervalu I a lze ji vyřešit např. pomocí Gaussovy eliminační metody nebo užitím Cramerova pravidla. Integrací funkcí $C_1'(x), C_2'(x)$ pak obdržíme vyjádření pro $C_1(x), C_2(x)$ (s obecnými integračními konstantami C_1, C_2), jejichž dosazením do (3.33) získáme obecné řešení (3.30).

Zobecnění tohoto postupu pro nehomogenní LODR n -tého řádu není obtížné. Uvažujme nehomogenní LODR (3.27) a předpokládejme, že jsme našli obecné řešení y_h příslušné homogenní rovnice (3.29)

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Potom **obecné řešení nehomogenní rovnice** (3.27) hledáme ve tvaru

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x), \quad (3.34)$$

přičemž derivace funkcí $C_1(x), \dots, C_n(x)$ získáme řešením soustavy n rovnic o n neznámých funkcích $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ ve tvaru

$C_1'(x) y_1(x)$	+	$\dots$	+	$C_n'(x) y_n(x)$	=	0
$C_1'(x) y_1'(x)$	+	$\dots$	+	$C_n'(x) y_n'(x)$	=	0
.....						
$C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x)$	+	$\dots$	+	$C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x)$	=	$\frac{f(x)}{a_n}$

METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ

Touto metodou se hledá partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (3.35)$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou konstanty, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ je nenulová spojitá funkce některého z dále uvedených typů. Někdy se těmito rovnicím říká **nehomogenní LODR n -tého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou**.

Z výkladu o homogenních LODR n -tého řádu je vidět, že ve fundamentálním systému řešení těchto rovnic se mohou vyskytnout pouze polynomy, exponenciální funkce nebo goniometrické funkce sinus či kosinus, případně jejich součty či součiny. Je také zřejmé, že i derivace těchto funkcí budou stejného typu.

Je-li pravá strana $f(x)$ polynomická, exponenciální nebo goniometrická funkce (sinus nebo kosinus), lze partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice nalézt jednodušším způsobem než je metoda variace konstant. Obecně postupujeme tak, že partikulární řešení zvolíme předem, a to téhož typu, jako je pravá strana rovnice, avšak s obecnými (neurčitými) koeficienty. Ty určíme po dosazení partikulárního řešení do rovnice porovnáním obou jejích stran. Probereme si některé případy.

1. Pravá strana má tvar

$$f(x) = P_m(x),$$

tj. na pravé straně je polynom m -tého stupně.
Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot Q_m(x),$$

kde k je násobnost čísla 0 jako kořene charakteristické rovnice (pokud 0 není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.

Polynomy s neurčitými koeficienty vypadají následovně:

Polynom 0. stupně: $Q_0(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$ (tj. konstanta),

polynom 1. stupně: $Q_1(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$,

polynom 2. stupně: $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$,

polynom 3. stupně: $Q_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, atd.)

PŘÍKLAD 3.2.3

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 6y' + 5y = 10x^2 + 4x.$$

Řešení: Při řešení postupujeme ve třech krocích:

1. Nejprve najdeme obecné řešení y_h příslušné zhomogenizované rovnice

$$y'' + 6y' + 5y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, její kořeny jsou $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$.

Fundamentální systém je tedy tvořen dvojicí lineárně nezávislých řešení

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-5x}.$$

Obecné řešení y_h homogenní rovnice potom bude ve tvaru

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Hledáme **partikulární řešení** y_p původní (tj. nehomogenní) rovnice.

Protože pravá strana $f(x) = 10x^2 + 4x$ je polynom druhého stupně $P_2(x)$, bude $Q_2(x)$ také polynom druhého stupně, ale s neurčitými koeficienty, tj. $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Dále, protože číslo 0 není kořen charakteristické rovnice, bude $k = 0$. Partikulární řešení tedy budeme hledat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p &= x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C, \\ y_p' &= 2Ax + B, \\ y_p'' &= 2A. \end{aligned}$$

Partikulární řešení i s jeho derivacemi dosadíme do zadané rovnice:

$$\begin{aligned} 2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) &= 10x^2 + 4x, \\ 2A + 12Ax + 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C &= 10x^2 + 4x, \\ 5Ax^2 + 12Ax + 5Bx + 2A + 6B + 5C &= 10x^2 + 4x. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin na levé a pravé straně:

$$\begin{aligned} x^2 : \quad 5A &= 10 \Rightarrow A = 2, \\ x^1 : \quad 12A + 5B &= 4 \Rightarrow 5B = -20 \Rightarrow B = -4, \\ x^0 : \quad 2A + 6B + 5C &= 0 \Rightarrow 5C = 20 \Rightarrow C = 4. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$y_p = 2x^2 - 4x + 4.$$

3. Zapišeme obecné řešení $y = y_h + y_p$:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + 2x^2 - 4x + 4, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Pravá strana má tvar

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{ax},$$

kde $P_m(x)$ je polynom m -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{ax},$$

kde k je násobnost čísla a jako kořene charakteristické rovnice (pokud a není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.

PŘÍKLAD 3.2.4

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' + y'' - 6y' = 3e^{-4x}.$$

Řešení: Opět postupujeme ve třech krocích:

1. Najdeme obecné řešení y_h zhomogenizované rovnice

$$y''' + y'' - 6y' = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar $\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0$, její kořeny jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 2$.

Fundamentální systém je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-3x}, \quad y_3 = e^{2x}.$$

Obecné řešení y_h homogenní rovnice potom bude ve tvaru

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Hledáme **partikulární řešení** y_p zadané nehomogenní rovnice.

Pravá strana je $f(x) = 3e^{-4x}$, takže dle výše zavedeného značení je $P_m(x) = P_0(x) = 3$, tj. polynom nultého stupně. Bude tedy $Q_m(x) = Q_0(x) = A$ (konstanta).

Dále je $a = -4$. Toto číslo není kořenem charakteristické rovnice, proto bude $k = 0$. Partikulární řešení bude ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p &= x^0 \cdot A \cdot e^{-4x} = Ae^{-4x}, \\ y_p' &= -4Ae^{-4x}, \\ y_p'' &= 16Ae^{-4x}, \\ y_p''' &= -64Ae^{-4x}. \end{aligned}$$

Partikulární řešení i s jeho derivacemi dosadíme do zadané rovnice:

$$\begin{aligned} -64Ae^{-4x} + 16Ae^{-4x} - 6 \cdot (-4Ae^{-4x}) &= 3e^{-4x}, \\ -24Ae^{-4x} &= 3e^{-4x}. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u e^{-4x} na obou stranách dostaneme $A = -\frac{1}{8}$. Takže

$$\underline{y_p = -\frac{1}{8}e^{-4x}.$$

3. Zapišeme obecné řešení $y = y_h + y_p$:

$$\underline{\underline{y = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-4x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Pravá strana má tvar

$$f(x) = e^{ax} \cdot [P_m(x) \cdot \cos bx + Q_n(x) \cdot \sin bx], \quad (3.36)$$

kde $P_m(x)$, resp. $Q_n(x)$ jsou polynomy m -tého, resp. n -tého stupně. Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$y_p = x^k \cdot e^{ax} \cdot [R_r(x) \cdot \cos bx + S_r(x) \cdot \sin bx],$$

kde k je násobnost čísla $a \pm ib$ jako kořene charakteristické rovnice (pokud $a \pm ib$ není kořenem charakteristické rovnice, bude $k = 0$) a $R_r(x), S_r(x)$ jsou polynomy s neurčitými koeficienty téhož stupně $r = \max\{m, n\}$.

PŘÍKLAD 3.2.5

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$3y'' - 7y' - 6y = 30 \cos 3x.$$

Řešení: Opět postupujeme ve třech krocích:

1. Najdeme obecné řešení y_h homogenní rovnice

$$3y'' - 7y' - 6y = 0.$$

Charakteristická rovnice: $3\lambda^2 - 7\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -\frac{2}{3}$.

Fundamentální systém:

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-\frac{2}{3}x}.$$

Obecné řešení y_h homogenní rovnice:

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Partikulární řešení** y_p nehomogenní rovnice.

Pravá strana $f(x) = 30 \cos 3x$, takže $P_m(x) = P_0(x) = 30$ (polynom nultého stupně, $m = 0$), $Q_n(x) = Q_0(x) = 0$ (nulový polynom, $n = 0$). Bude tedy $r = 0$, tj. $R_0(x) = A, S_0(x) = B$.

Dále je $a = 0, b = 3$, z čehož plyne $k = 0$, neboť komplexní číslo $\pm 3i$ není kořenem charakteristické rovnice.

Partikulární řešení y_p má potom tvar

$$\begin{aligned} y_p &= x^0 \cdot e^{0x} \cdot (A \cos 3x + B \sin 3x) = A \cos 3x + B \sin 3x, \\ y_p' &= -3A \sin 3x + 3B \cos 3x, \\ y_p'' &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x. \end{aligned}$$

Dosadíme do dané rovnice:

$$\begin{aligned} 3(-9A \cos 3x - 9B \sin 3x) - 7(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) - 6(A \cos 3x + B \sin 3x) &= 30 \cos 3x, \\ -33A \cos 3x - 33B \sin 3x + 21A \sin 3x - 21B \cos 3x &= 30 \cos 3x. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u goniometrických funkcí $\cos 3x$ a $\sin 3x$ na levé a pravé straně rovnice:

$$\left. \begin{array}{l} \cos 3x : \quad -33A - 21B = 30 \\ \sin 3x : \quad 21A - 33B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{11}{17}, \quad B = -\frac{7}{17}.$$

Partikulární řešení bude

$$y_p = -\frac{11}{17} \cos 3x - \frac{7}{17} \sin 3x.$$

3. Obecné řešení $y = y_h + y_p$:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{11}{17} \cos 3x - \frac{7}{17} \sin 3x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 3.2.6

Je-li pravá strana $f(x) = f_1(x) + \dots + f_t(x)$, kde funkce $f_1(x), \dots, f_t(x)$ jsou funkce tvaru (3.36), potom partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice (3.27) je rovno součtu partikulárních řešení $y_{p_1}, \dots, y_{p_t}$, která určíme vždy jednotlivě. Tedy

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_t}.$$

Tomuto zobecnění říkáme **princip superpozice**.

Kapitola 4

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

V inženýrské praxi se setkáváme se soustavami diferenciálních rovnic zejména v mechanice, například máme-li popsat dráhu hmotného bodu pohybujícího se v prostoru vlivem působení dané síly, přičemž je známa počáteční poloha a počáteční rychlost tohoto bodu. Nejdříve uvedeme základní pojmy, které budeme potřebovat.

4.1 Základní pojmy

DEFINICE 4.1.1

Soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde funkce $f_i, i = 1, \dots, n$, jsou definovány na $(n + 1)$ –rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme **soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu**.

Řešením soustavy (4.1) nazýváme každou skupinu n funkcí tvaru

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \tag{4.2}$$

které jsou diferencovatelné na nějakém intervalu I a pro všechny body $x \in I$ vyhovují soustavě (4.1).

Úloha určit řešení soustavy (4.1), které vyhovuje n **počátečním podmínkám**

$$y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n, \tag{4.3}$$

kde $(x_0, b_1, \dots, b_n) \in \Omega$ je libovolný, ale pevně daný bod, se nazývá **počáteční úloha (počáteční problém)**.

Obecným řešením soustavy (4.1) rozumíme skupinu n funkcí závislých na n parametrech $C_1, \dots, C_n$ takových, že vhodnou (přípustnou) volbou těchto konstant obdržíme řešení každé počáteční úlohy (4.1), (4.3).

Partikulárním řešením soustavy (4.1) nazýváme takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1, \dots, C_n$.

POZNÁMKA 4.1.1

Budeme se výhradně zabývat soustavami ODR 1. řádu, neboť všechny soustavy ODR (i vyšších řádů), které se v technické praxi vyskytují, se dají na tvar (4.1) převést.

Řešit soustavu ODR (4.1) s větším počtem neznámých, a tedy i rovnic, vyžaduje hlubší znalosti zejména z teorie matic. Proto se v dalším omezíme pouze na nejjednodušší typ soustavy ODR 1. řádu, a to na **homogenní soustavu dvou lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty**. Ukážeme si, jak lze takovou soustavu řešit i bez použití složitého matematického aparátu.

4.2 Soustava dvou lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

DEFINICE 4.2.1

Soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde $a_{ij}, i, j = 1, 2$ jsou reálná čísla, $b_1(x), b_2(x)$ funkce definované a spojitě na nějakém intervalu I a y_1, y_2 neznámé funkce, nazýváme **homogenní soustavou dvou lineárních ODR s konstantními koeficienty**.

Je-li $b_1(x) = b_2(x) = 0$, mluvíme o **homogenní soustavě dvou lineárních ODR 1. řádu**.

Je-li $b_1(x) \neq 0$ nebo $b_2(x) \neq 0$, mluvíme o **nehomogenní soustavě dvou lineárních ODR 1. řádu**.

Uvedeme si jednu z nejužívanějších metod řešení soustavy (4.4), tzv. **eliminační metodu**. Princip této metody spočívá v převedení soustavy (4.4) na jednu LODR 2. řádu pro jednu z neznámých funkcí, takže můžeme využít dřívějších poznatků o této rovnici.

Princip metody vysvětlíme na příkladech.

PŘÍKLAD 4.2.1

Najděte obecné řešení homogenní soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2. \end{aligned}$$

Řešení: Přistoupíme k eliminaci např. funkce y_2 a její derivace. Z rovnice neobsahující y_2' (tedy z první rovnice) dostáváme

$$y_2 = y_1' - 2y_1. \quad (4.5)$$

Odtud derivováním máme

$$y_2' = y_1'' - 2y_1'.$$

Poslední dva obdržené vztahy dosadíme do druhé rovnice soustavy a upravíme. Dostaneme

$$y_1'' - 6y_1' + 5y_1 = 0, \quad (4.6)$$

což je homogenní LODR 2. řádu s konstantními koeficienty s neznámou funkcí y_1 . Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$, takže obecné řešení rovnice (4.6) je tvaru

$$\underline{\underline{y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}} \quad (4.7)$$

Funkci y_2 zjistíme dosazením vypočtené funkce y_1 a její derivace do vztahu (4.5). Dostaneme

$$\underline{\underline{y_2 = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}} \quad (4.8)$$

Obecné řešení zadané soustavy tvoří vztahy (4.7), (4.8).

PŘÍKLAD 4.2.2

Řešte počáteční úlohu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2, \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 2. \end{aligned}$$

Řešení: Postupem, který jsme použili v předchozím příkladě, najdeme obecné řešení soustavy ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \\ y_2 &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_2 x e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá určit z počátečních podmínek konstanty C_1, C_2 . Dosadíme-li do pravých stran v obecném řešení $x = 0$ a do levých zadané hodnoty, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých C_1, C_2 ve tvaru

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + 0, \\ 2 &= C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou hodnoty $C_1 = C_2 = 1$, takže hledané řešení počáteční úlohy je ve tvaru

$$\underline{\underline{y_1 = (1 + x)e^{3x},}} \\ \underline{\underline{y_2 = (2 + x)e^{3x}.}}$$

Část II

NEKONEČNÉ ŘADY

Kapitola 1

Číselné řady

1.1 Motivace

První zmínky o nekonečných řadách se objevují daleko v minulosti, kdy se problémem nekonečna zabývali zejména filozofové. Patřil mezi ně například řecký filozof **Zenon z Eleje** (490–430 př.n.l.), který sestavil několik logických paradoxů, tzv. aporií, jimiž chtěl dokázat především nemožnost pohybu. Nejznámějším jeho paradoxem je paradox **Achilles a želva**, podle kterého rychlonohý Achilles nikdy nedožene želvu, jestliže se želva nachází v nějaké vzdálenosti před ním. V okamžiku, kdy totiž doběhne na původní místo želvy, se želva posunula o kousek dál. Když Achilles uběhne tento kousek, želva už je zase o další kousek před ním. A tak to pokračuje až do nekonečna. Náskok želvy se sice stále zmenšuje, ale želva pořád vede, a tedy Achilles nemůže nikdy želvu předběhnout, protože by musel uběhnout nekonečně mnoho stále se zkracujících úseků cesty. Zenon totiž považoval za nemožné, aby součet nekonečně mnoha kladných čísel byl konečné číslo.

Ve 3. století př. n. l. poprvé použil součet nekonečné geometrické řady **Archimedes**. První negeometrickou řadu dokázal sečíst až Richard **Swineshead** kolem roku 1350.

Teorie nekonečných řad se začala rozvíjet v druhé polovině 17. století, současně s teorií infinitezimálního počtu.

V průběhu celého vývoje teorie nekonečných řad se matematikové snažili zodpovědět dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

- *Jak sečíst nekonečnou množinu čísel?*
- *Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?*

Na obě otázky odpovíme v následujících kapitolách. Ještě předtím ovšem uvedeme definici a základní vlastnosti posloupnosti, pomocí níž se nekonečná řada definuje.

1.2 Posloupnosti

DEFINICE 1.2.1

Posloupnost je funkce, která každému přirozenému číslu n přiřazuje nějaké reálné číslo, místo obvyklého $f(n)$ jej značíme a_n . Toto reálné číslo pak nazýváme **n -tým členem posloupnosti**. Celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}$, příp. (a_n) .

POZNÁMKA 1.2.1

Posloupnost můžeme zadat několika způsoby, například:

- **výčtem členů**, tj. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$,
- **rekurentně**, např. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 3$,
- **vzorcem pro n -tý člen**, např. $a_n = 2n + 1$.

PŘÍKLAD 1.2.1

Příklady posloupností:

1. **Aritmetická.** Platí pro ni $a_n = a_1 + (n - 1)d$, kde a_1 je první člen a d je difference, $d = a_{n+1} - a_n$.
2. **Geometrická.** Pro její n -tý člen platí $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, kde a_1 je první člen a q je kvocient, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

VĚTA 1.2.1 (Vlastnosti posloupnosti)

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

- **rostoucí**, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **klesající**, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **nerostoucí**, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **neklesající**, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **shora ohraničená**, jestliže existuje $H \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq H$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **zdola ohraničená**, jestliže existuje $D \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq D$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- **ohraničená**, jestliže je ohraničená shora i zdola.

DEFINICE 1.2.2

Je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** L , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ **vlastní** limitu, říkáme, že **konverguje** a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \text{příp.} \quad a_n \rightarrow L \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $+\infty$, jestliže ke každému $A \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > A$. Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $-\infty$, jestliže ke každému $B \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n < B$. Píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ **nevlastní** limitu $\pm\infty$, říkáme, že **diverguje**. Pokud posloupnost nemá limitu, říkáme, že **osciluje**.

VĚTA 1.2.2 (Věty o limitách posloupností)

Platí:

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Každá konvergentní posloupnost je ohraničená (opak neplatí, např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je ohraničená, ale není konvergentní).
3. Každá monotonní ohraničená posloupnost je konvergentní, přičemž:
 - a) každá neklesající shora ohraničená posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\},$$

- b) každá nerostoucí zdola ohraničená posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní a platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_1, b_2, \dots\}.$$

1.3 Základní pojmy

V této kapitole zavedeme pojem součet řady, uvedeme základní operace s číselnými řadami a ukážeme příklady některých jednoduchých řad.

DEFINICE 1.3.1

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1.1)$$

nazýváme **nekonečnou číselnou řadou**.

Jednotlivá čísla $a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ se nazývají **členy řady** (1.1), n se nazývá **sčítací index**.

Nyní zavedeme pojem součtu nekonečné číselné řady. Ten se definuje pomocí posloupnosti částečných součtů. Intuitivně je zřejmé, že danou nekonečnou řadu sčítáme postupným přičítáním následujícího sčítance k součtu všech předcházejících členů. Takto dostáváme posloupnost hodnot, které se k hledanému součtu blíží, a součet lze tedy stanovit jako limitu posloupnosti těchto hodnot.

DEFINICE 1.3.2

Uvažujme řadu (1.1). Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ &\dots, \end{aligned}$$

nazýváme **posloupnost částečných součtů** řady (1.1).

Součet $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ se nazývá **n -tý částečný součet** řady (1.1).

DEFINICE 1.3.3

Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí posloupnost částečných součtů řady (1.1).

1. Jestliže existuje vlastní (tj. konečná) limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

potom řekneme, že řada (1.1) **konverguje** a má součet s .

Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

2. Jestliže neexistuje vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ (tj. existuje buď nevlastní limita $\pm\infty$ a nebo limita neexistuje), potom říkáme, že řada (1.1) **diverguje**.

Přitom rozlišujeme tyto případy:

- Pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty,$$

potom říkáme, že řada (1.1) **diverguje k** $\pm\infty$ a má součet $\pm\infty$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

- Pokud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ neexistuje,}$$

pak říkáme, že řada (1.1) **osciluje** a nemá součet.

Některé známé řady:

1. **Aritmetická řada.** Je to řada ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = a_1 + (n-1)d$; první člen je číslo a_1 a číslo d se nazývá **diference**. Její n -tý částečný součet je $s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$. Aritmetická řada **diverguje**.

2. **Grandiho řada.** Jedná se o řadu

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1},$$

která **diverguje (osciluje)**, protože nemá součet. Je totiž $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, \dots$, tj.

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ 1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} s_n$ tedy neexistuje.

3. **Harmonická řada.** Tato řada má tvar

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Harmonická řada **diverguje** (ukážeme později), což poprvé v historii dokázal francouzský matematik **NICOLE ORESME (1323 – 1382)**. Byla to vůbec první řada, u které byla ukázána divergence řady.

PŘÍKLAD 1.3.1

Určete součet řady:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení: Nejprve rozložíme n -tý člen $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ na parciální zlomky, abychom se v zápisu n -tého částečného součtu s_n zbavili smybolu “ $\cdots$ ”:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Nyní vytvoříme posloupnost částečných součtů s_n dané řady:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right), \\ s_2 &= a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Součet s dané řady vypočteme jako limitu posloupnosti částečných součtů s_n :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Daná řada **konverguje**.

DEFINICE 1.3.4

Řada

$$a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \quad a_1, q \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0, q \neq 0,$$

se nazývá **geometrická řada s kvocientem q** .

POZNÁMKA 1.3.1

Z definice geometrické řady plyne, že řada je geometrická, je-li každý její následující člen konstantním násobkem (q -násobkem) členu předcházejícího.

Z toho plyne tzv. **kritérium geometričnosti** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

Je-li podíl $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstanta pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ geometrická s kvocientem q .

PŘÍKLAD 1.3.2

Zjistěte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 4^n$ je geometrická.

Řešení: Platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^n \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1} \cdot 4^n} = \frac{2 \cdot 3^n \cdot 4^n \cdot 4}{2 \cdot 3^n \cdot 3^{-1} \cdot 4^n} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Daná řada je tedy geometrická s kvocientem $q = 12$.

Nyní vyšetříme konvergenci geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$.

1. Je-li $q = 1$, dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$.

Potom $s_n = na_1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na_1 = \pm\infty$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ tedy **diverguje**.

2. Je-li $q = -1$, má řada tvar $a_1 + (-a_1) + \dots + (-1)^{n-1}a_1 + \dots$, takže n -tý částečný součet je

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ a_1 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

posloupnost $0, a_1, 0, a_1, \dots$ nemá limitu, takže tato řada **diverguje (osciluje)**.

3. Nechť $q \neq \pm 1$. Platí

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}.$$

Tuto rovnost nyní vynásobíme číslem q :

$$qs_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^n.$$

Odečteme-li druhou nerovnost od první, dostaneme po úpravě

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Uvažme nyní následující případy:

- pro $|q| < 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, proto $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow$ řada **konverguje**,
- pro $q > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, proto $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty \Rightarrow$ řada **diverguje**,
- pro $q < -1$ limita $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ neexistuje $\Rightarrow$ řada **diverguje (osciluje)**.

Předchozí úvahy shrneme do následující věty:

VĚTA 1.3.1

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ konverguje pro $|q| < 1$ a má součet $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

Pro $|q| \geq 1$ geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ diverguje.

PŘÍKLAD 1.3.3

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Řešení: První člen dané řady je roven

$$a_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{5}{3},$$

n -tý člen je

$$a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Kvocient

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1,$$

takže daná geometrická řada **konverguje** a má součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}.$$

Určení součtu řady bývá obecně obtížný úkol, protože ne vždy se nám podaří vyjádřit částečný součet s_n jako tomu bylo např. u geometrické řady. Proto se při vyšetřování řad snažíme alespoň rozhodnout, zda-li je tento součet konečný či nikoliv, tj., zda řada konverguje či diverguje. K tomu existuje několik kritérií, která se ovšem nedají vždy použít na libovolné číselné řady. Důležitým předpokladem při formulaci těchto kritérií je požadavek kladený na znaménka jednotlivých členů těchto řad. Zpravidla se předpokládá, že daná řada obsahuje pouze členy s kladnými znaménky (hovoříme pak o **řadě s kladnými členy**), případně členy, které pravidelně střídají znaménka (v tomto případě mluvíme o **alternující řadě**.) Některá kritéria konvergence pro řady s kladnými členy a pro alternující řady uvedeme v dalších kapitolách.

Dalším problémem je otázka nutné podmínky k tomu, aby daná číselná řada konvergovala. Tato podmínka neobsahuje požadavek na znaménka členů této řady, a má tedy z tohoto hlediska obecnou platnost.

VĚTA 1.3.2 (Nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada (1.1) konverguje, pak limita posloupnosti členů řady je nulová, tj. platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1.2)$$

PŘÍKLAD 1.3.4

Vyšetřete konvergenci řady užitím kritéria nutné podmínky konvergence:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3 + 1},$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}.$$

Řešení:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^3 + 1} = 0 \Rightarrow \text{nelze rozhodnout.}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \neq 0 \Rightarrow \text{řada diverguje.}$$

POZNÁMKA 1.3.2

1. Podmínka (1.2) je nutnou podmínkou konvergence řady, ne však postačující. Jinak řečeno, z podmínky (1.2) ještě neplyne konvergence řady, tj. existují i divergentní řady, pro které je tato podmínka splněna. Příkladem může být výše uvedená harmonická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

pro kterou je sice podmínka (1.2) splněna, avšak tato řada je divergentní.

2. Předchozí věta se dá zformulovat i takto:

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Na závěr tohoto odstavce uvedeme větu, která plyne přímo z definice.

VĚTA 1.3.3

Nechť $p \in \mathbb{N}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

POZNÁMKA 1.3.3

Z předchozí věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.

1.4 Základní vlastnosti číselných řad

V této části budeme zkoumat, zda pro nekonečné číselné řady platí analogické aritmetické zákony jako pro konečné součty, tj. komutativní, asociativní a distributivní zákon.

O tom, že s nekonečnými řadami nelze zacházet jako s konečnými součty, se můžeme přesvědčit na následujícím příkladu z historie. Italský matematik **GUIDO GRANDI (1671 – 1742)** uvažoval řadu

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1},$$

pro kterou jsme ukázali, že je divergentní, neboť nemá součet. Danou řadu můžeme ovšem uzavřít dvojím způsobem:

- $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots$ konverguje, neboť $s_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$;
- $[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \dots$ konverguje, neboť $s_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$.

Máme tedy tři různé řady, z nichž první diverguje a další dvě konvergují, neboli uzavřítím se porušila divergence řady.

Grandi počítal takto:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1, \end{aligned}$$

což si Grandi vysvětlil jako symbol stvoření světa bohem z ničeho. Tento jeho závěr rozpoutal bouřlivé diskuse, které se kromě Grandiho zúčastnili Leibniz, Nicolaus Bernoulli a jiní. V těchto diskusích se upřesňovaly pojmy součet nekonečné číselné řady, konvergence a divergence těchto řad.

Grandi se dopustil dvou omylů: 1. zkoumaná řada je divergentní, proto nemá konečný součet, 2. při svém výpočtu použil asociativní zákon, který obecně pro nekonečné řady neplatí.

V následujících třech větách uvedeme přehled základních aritmetických operací s **konvergentními** nekonečnými řadami.

První z nich je **součet** dvou konvergentních řad:

VĚTA 1.4.1 (O Součtu řad)

Budte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní řady a necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$.

Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \pm t.$$

Další tvrzení můžeme chápat jako analogii **distributivního zákona** pro konečné součty, platí ovšem pouze pro konvergentní řady.

VĚTA 1.4.2 (O násobku řad)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s , pak pro libovolné $c \in \mathbb{R}$

konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = cs.$$

Další otázkou je uzávorkování, tj. analogie asociativního zákona, který platí pro konečné součty. Z příkladu Grandiho řady je vidět, že změnou uzávorkování členů řady se změní její součet. Řada, která není konvergentní, se uzávorkováním může stát konvergentní řadou. Je-li však příslušná řada konvergentní, můžeme členy této řady libovolně uzávorkovat, aniž se změní její součet. Tuto skutečnost zformulujeme v následující větě, která se nazývá **asociativní zákon** pro nekonečné konvergentní řady.

VĚTA 1.4.3 (Asociativní zákon pro nekonečné řady)

Necht řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

konverguje a necht $\{n_k\}$ je libovolná rostoucí posloupnost přirozených čísel, $k \in \mathbb{N}$. Pak konverguje i řada

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \dots + a_{n_3}) + \dots$$

a má tentýž součet.

PŘÍKLAD 1.4.1

Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}$.

Řešení: n -tý člen dané řady upravíme následovně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(5 \cdot \frac{4^n}{6^n} - 3 \cdot \frac{3^n}{6^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[5 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n \right].$$

Obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ konvergují, jejich součty jsou:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Podle předchozí věty **konverguje** i zadaná řada a její součet je roven

$$s = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Zatím jsme neuvedli analogii komutativního zákona (tj. zákona o záměně členů) pro konvergentní číselné řady. Později ukážeme, že k jeho platnosti je zapotřebí silnější předpoklad, a tím je tzv. **absolutní konvergence** řady.

1.5 Řady s nezápornými členy

Jak jsme již viděli, rozhodnout o konvergenci či divergenci číselné řady pomocí součtu řady lze provést pouze ve speciálních případech. Obecně se tedy snažíme alespoň rozhodnout, zda má daná řada konečný součet (a tedy konverguje). K tomu používáme tzv. **kritéria konvergence**, jejichž použití značně závisí na znaménkách jednotlivých členů. V této kapitole uvedeme přehled kritérií, která se používají k posouzení konvergence, resp. divergence pro řady s **nezápornými (kladnými) členy**.

DEFINICE 1.5.1

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **řada s nezápornými (kladnými) členy**, je-li $a_n \geq 0$ ($a_n > 0$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Řady s nezápornými (kladnými) členy mají některé specifické vlastnosti:

- posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n$,

- je-li posloupnost $\{s_n\}$ navíc shora ohraničená, pak existuje vlastní $\lim s_n$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.
- z předchozích dvou vlastností plyne, že řady s nezápornými členy jsou buď konvergentní nebo divergentní k $+\infty$.

VĚTA 1.5.1 (Limitní odmocninové kritérium - Cauchyovo)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L, \quad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

1. je-li $L < 1$, pak řada konverguje,
2. je-li $L > 1$, pak řada diverguje,
3. je-li $L = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

PŘÍKLAD 1.5.1

Limitním odmocninovým kritériem rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots,$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n} = \operatorname{arctg}^1 1 + \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}^3 \frac{1}{3} + \dots.$$

Řešení: Užijeme limitní odmocninové kritérium:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{řada konverguje.}$$

Při výpočtu jsme využili toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (lze odvodit L'Hospitalovým pravidlem).

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1 \Rightarrow \text{řada konverguje.}$$

VĚTA 1.5.2 (Limitní podílové kritérium - d'Alembertovo)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L, \quad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

1. je-li $L < 1$, pak řada konverguje,
2. je-li $L > 1$, pak řada diverguje,
3. je-li $L = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

PŘÍKLAD 1.5.2

Limitním podílovým kritériem rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^5} = \frac{1}{1^5} + \frac{2!}{2^5} + \frac{3!}{3^5} + \dots,$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = \frac{2 \cdot 1}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots.$$

Řešení: Užijeme limitní podílové kritérium:

a) Zde máme $a_n = \frac{n!}{n^5}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^5}$. Potom

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^5}}{\frac{n!}{n^5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(n+1)^4} = \infty > 1 \Rightarrow \text{řada } \mathbf{diverguje}. \end{aligned}$$

b) V tomto případě je $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Potom

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2^1 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)^1 \cdot 2^n \cdot n!} \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{řada } \mathbf{konverguje}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = e^{-1}$ (lze ověřit L'Hospitalovým pravidlem).

POZNÁMKA 1.5.1

Dá se ukázat, že existuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pak existuje i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ a obě limity jsou si rovny. Jinak řečeno, lze-li o konvergenci či divergenci rozhodnout podle limitního podílového kritéria, pak lze rozhodnout rovněž i pomocí limitního odmocninového kritéria - říkáme, že odmocninové kritérium je silnější než podílové.

VĚTA 1.5.3 (Limitní Raabeovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a necht existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L, \quad L \in \mathbb{R}^*.$$

Pak platí:

1. je-li $L > 1$, pak řada konverguje,
2. je-li $L < 1$, pak řada diverguje,
3. je-li $L = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

PŘÍKLAD 1.5.3

Limitním Raabeovým kritériem rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Řešení: Platí $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Potom

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{n}{n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+3} = 3 > 1 \Rightarrow \text{řada konverguje.} \end{aligned}$$

POZNÁMKA 1.5.2

Lze ukázat, že Raabeovo kritérium je silnější než podílové kritérium, to znamená, jestliže o konvergenci řady lze rozhodnout podílovým kritériem, pak lze rozhodnout i Raabeovým.

Další kritérium je poněkud jiného typu než dosavadní kritéria a ukazuje nám souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály.

VĚTA 1.5.4 (Integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f(n) = a_n$. Pak platí:

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(n) \, dn$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje právě tehdy, když diverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(n) \, dn$.

POZNÁMKA 1.5.3

Připomeňme definici nevlastního integrálu:

Nechť funkce $f(x)$ je definována na intervalu $\langle a, \infty \rangle$ a integrovatelná na $\langle a, t \rangle$ pro každé $t > a, t \in \mathbb{R}$. Pokud existuje vlastní limita $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) \, dx$, pak tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem** funkce $f(x)$ od a do ∞ a značíme jej $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$. Říkáme, že nevlastní integrál **konverguje**. V opačném případě **diverguje**.

Při vyšetřování konvergence řady integrálním kritériem tedy vypočítáme integrál

$$L = \int_1^{\infty} f(n) \, dn,$$

kde $f(n) = a_n$. Pokud vyjde $L < \infty$, pak daná řada **konverguje**, pokud vyjde $L = \infty$, pak řada **diverguje**.

PŘÍKLAD 1.5.4

Integrálním kritériem rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}.$$

Řešení:

- a) Funkce $f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$ je na intervalu $\langle 2, \infty \rangle$ nezáporná. Nyní ověříme, zda je na tomto intervalu nerostoucí. To zjistíme pomocí první derivace této funkce.

Platí $f'(n) = -\frac{2 + \ln n}{n^2 \ln^3 n} < 0$, funkce $f(n)$ je tedy na intervalu $\langle 2, \infty \rangle$ klesající. Zbývá vypočítat nevlastní integrál a rozhodnout, zda konverguje či diverguje:

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{1}{n \ln^2 n} \, dn &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{n \ln^2 n} \, dn = \left| \begin{array}{ll} \ln n &= s \\ \frac{1}{n} \, dn &= ds \end{array} \right|_{\substack{2 \rightarrow \ln 2 \\ t \rightarrow \ln t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{ds}{s^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} \right]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2} < \infty. \end{aligned}$$

Výsledkem nevlastního integrálu je vlastní limita, řada tedy **konverguje**.

b) Funkce $f(n) = \frac{n}{n^2 + 1}$ je na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ nezáporná. To, zda je na tomto intervalu nerostoucí, ověříme opět pomocí první derivace. Bude $f'(n) = \frac{1-n^2}{(n^2+1)^2} < 0$, takže i tato podmínka je splněna. Vypočtěme nevlastní integrál:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{n}{n^2 + 1} \, dn &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{n}{n^2 + 1} \, dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \int_1^t \frac{2n}{n^2 + 1} \, dn = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\ln |n^2 + 1| \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left[\ln |t^2 + 1| - \ln 2 \right] = \infty \Rightarrow \text{řada } \mathbf{diverguje}. \end{aligned}$$

c) Funkce $f(n) = \frac{1}{n^2 + 9}$ je na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Dále je

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{n^2 + 9} \, dn &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{n^2 + 9} \, dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{n}{3} \right]_1^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right] = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \infty \Rightarrow \text{řada } \mathbf{konverguje}. \end{aligned}$$

VĚTA 1.5.5 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

1. konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2. diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

POZNÁMKA 1.5.4

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má odpovídající členy větší než řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, proto se řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazývá **majoranta** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **minoranta** řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Srovnávací kritérium pak můžeme zformulovat takto:

Řada konverguje, jestliže k ní existuje konvergentní majoranta.

Řada diverguje, jestliže k ní existuje divergentní minoranta.

Nevýhodou srovnávacího kritéria je to, že je potřeba mít v zásobě dostatečný počet řad, o kterých již víme, zda konvergují či divergují. To může být obecně problém, a proto tohoto kritéria mnoho nevyužíváme.

1.6 Řady s libovolnými členy

V tomto odstavci se budeme zabývat číselnými řadami s libovolnými členy, tj. kladnými i zápornými. Pokud daná číselná řada obsahuje záporných členů jen konečný počet, tak je při vyšetřování konvergence dané řady můžeme vynechat a uvažovat jen kladné členy (vynechání konečného počtu členů v dané řadě nemá vliv na její konvergenci). Má-li naopak číselná řada všechny členy záporné, lze vyšetřovat konvergenci kladné řady tvaru $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, podobně i v případě, kdy má kladných členů pouze konečný počet. Zbývá tedy jediný případ, a to ten, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nekonečně mnoho kladných členů a současně nekonečně mnoho členů záporných, přičemž budeme také uvažovat existenci nulových členů.

Nejprve se budeme věnovat speciálnímu případu řad s libovolnými členy, jsou to tzv. **alternující řady**. V těchto řadách se pravidelně střídá kladný a záporný člen.

1.6.1 Alternující řady

DEFINICE 1.6.1

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá **alternující**, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Zapisujeme ji ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n,$$

kde $c_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro určování konvergence alternujících řad se užívá tzv. **Leibnizovo**¹ **kritérium**.

¹**Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716), německý filozof a matematik. Nezávisle na Newtonovi formuloval základní pojmy diferenciálního a integrálního počtu.

VĚTA 1.6.1 (Leibnizovo kritérium konvergence)

Nechť je dána alternující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n, \quad (c_n > 0 \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}),$$

která má tyto vlastnosti:

1. posloupnost $\{c_n\}$ je klesající, tj. $c_n \geq c_{n+1}$,
2. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Potom alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ konverguje.

PŘÍKLAD 1.6.1

Leibnizovým kritériem rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{5n-1}.$$

Řešení: Obě zadané řady jsou alternující. Ověříme pro každou zvlášť, zda jsou splněny podmínky Leibnizova kritéria.

- a) 1. posloupnost $\{\frac{1}{n^2}\}$ je klesající, neboť platí $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$,
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, takže daná alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ **konverguje**.

- b) Nejprve ověříme druhou podmínku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{5n-1} = \frac{2}{5} \neq 0, \text{ proto daná alternující řada } \textbf{diverguje}.$$

1.6.2 Řady absolutně a neabsolutně konvergentní

Pro řady s libovolnými členy zavádíme velmi důležitý pojem, kterým je **absolutní konvergence**. Pouhý pojem konvergence totiž nestačí na to, aby pro danou řadu s libovolnými členy platila analogie komutativního zákona. K tomu je zapotřebí, aby daná řada byla absolutně konvergentní. Tento pojem je definovaný pomocí řady s absolutními hodnotami jednotlivých členů. Také odpovíme na otázku, za jakých podmínek lze přerovnávat členy řady, aniž se změní její součet.

Nejprve uvedeme tvrzení, které pro definici absolutní konvergence budeme potřebovat.

VĚTA 1.6.2

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Opačná implikace neplatí, neboť např. Leibnizova řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ je konvergentní, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní harmonická řada. Z toho důvodu má smysl zavést následující pojem.

DEFINICE 1.6.2

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně (relativně)**, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

POZNÁMKA 1.6.1

1. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je také konvergentní.
2. Obsahuje-li daná řada pouze kladné členy, je pojem konvergence totožný s pojmem absolutní konvergence.

PŘÍKLAD 1.6.2

Zjistěte, zda daná řada konverguje absolutně či neabsolutně:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}.$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}.$

Řešení:

- a) Daná řada je alternující, k ověření její konvergence tedy použijeme Leibnizovo kritérium:

1. posloupnost $\left\{ \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \right\}$ je klesající, neboť platí $\frac{2}{\sqrt[3]{n}} > \frac{2}{\sqrt[3]{n+1}},$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, takže daná alternující řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \text{ konverguje.}$$

Nyní zjistíme, zda řada konverguje absolutně nebo neabsolutně. Vezmeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$$

a zjistíme vhodným kritériem pro řady s nezápornými členy, zda konverguje či diverguje. Použijeme například integrální kritérium:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}} dn &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{2}{\sqrt[3]{n}} dn = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[3 \cdot \sqrt[3]{n^2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[3 \cdot \sqrt[3]{t^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{1^2} \right] \\ &= \infty \Rightarrow \text{řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \text{ diverguje.} \end{aligned}$$

Celkově teď dostáváme, že daná alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\sqrt[3]{n}}$ **konverguje neabsolutně**.

b) Opět se jedná o alternující řadu. Leibnizovo kritérium:

1. posloupnost $\left\{ \frac{1}{n \ln^2 n} \right\}$ je klesající, neboť platí $\frac{1}{n \ln^2 n} > \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$,

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = 0.$$

Alternující řada $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}$ tedy **konverguje**.

Nyní uvažujeme řadu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ a zjistíme, zda konverguje či diverguje. Tuto řadu jsme již vyšetřovali v části 1.5 (Řady s nezápornými členy) integrálním kritériem (Příklad 1.5.4 a) a zjistili jsme, že **konverguje**.

Celkově tedy alternující řada $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2 n}$ **konverguje absolutně**.

Pojem **absolutní konvergence** se definuje zejména proto, že hraje klíčovou roli v úlohách o přerovnávání řady. Přerovnat číselnou řadu znamená zaměnit pořadí jednotlivých členů v dané řadě. Nyní si položme tyto otázky: Co se stane s číselnou řadou, když ji přerovnáme? Zůstane konvergentní? Pokud ano, zůstane stejný součet? Na tyto otázky nyní odpovíme.

DEFINICE 1.6.3

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada a $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$ (tj. $\{k_n\}$ je posloupnost, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou). Potom říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

VĚTA 1.6.3 (Komutativní zákon - věta o přerovnání řad)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Potom konverguje absolutně také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (tj. obě řady mají stejný součet).

Jinými slovy, je-li řada absolutně konvergentní, nezmění se její součet žádným jejím přerovnáním. Neabsolutně konvergentní řady jsou naopak velmi labilní k přerovnávání. Stačí přerovnat několik málo členů a konvergentní řada se změní na divergentní. Také se může stát, že z konvergentní řady se po přerovnání stane opět konvergentní řada, ale změní se její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady platí následující tvrzení.

VĚTA 1.6.4 (Riemannova)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Potom lze vhodným přerovnáním této řady docílit toho, aby přerovnaná řada konvergovala k libovolnému předem zvolenému číslu, nebo aby divergovala k $+\infty$ nebo $-\infty$, případně aby oscilovala.

Kapitola 2

Mocninné řady

2.1 Funkční řady

V předcházející kapitole jsme se zabývali řadami, jejichž členy byla reálná čísla. Nyní se budeme věnovat řadám, jejichž členy budou reálné funkce $f(x)$ jedné proměnné. Takové řady nazýváme **funkční řady**. Jejich rozvoj začal v druhé polovině 17. století a zejména pak v 18. století, kdy byly funkce vyjadřovány ve tvaru nekonečných řad.

Nejvýznamnější úlohu v matematice a jejich aplikacích hrají dva případy funkčních řad, jsou to:

- **mocninné řady**, jejichž členy $f_n(x)$ jsou mocninné funkce $f_n(x) = a_n x^n$, používají se k aproximaci funkce v okolí bodu $x = 0$,
- **Fourierovy řady**, které mají členy ve tvaru $f_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx$, jsou vhodné k aproximaci periodických funkcí.

V této kapitole se budeme zabývat mocninnými řadami, Fourierovy řady budou předmětem kapitoly následující. Nejdříve zavedeme obecnou definici funkční řady.

DEFINICE 2.1.1

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaná na intervalu I . Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \quad (2.1)$$

nazýváme **nekonečnou řadou funkcí**.

POZNÁMKA 2.1.1

Dosadíme-li za x určité číslo $x_0 \in I$, obdržíme z funkční řady (2.1) číselnou řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \cdots$$

DEFINICE 2.1.2

Množinu všech čísel x z intervalu I , pro která funkční řada (2.1) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** funkční řady (2.1).

Množinu všech čísel x z intervalu I , pro která funkční řada (2.1) konverguje absolutně, nazýváme **oborem absolutní konvergence** funkční řady (2.1).

2.2 Základní pojmy a vlastnosti mocninné řady. Obor konvergence

Nyní se už budeme věnovat prvnímu speciálnímu případu funkčních řad, kterými jsou **mocninné řady**. Zodpovíme postupně následující otázky:

- Za jakých podmínek je součet mocninné řady spojitá funkce?
- Kdy lze mocninnou řadu derivovat člen po členu (tj. zaměnit pořadí derivace a sumace)?
- Kdy lze mocninnou řadu integrovat člen po členu (tj. zaměnit pořadí integrace a sumace)?

DEFINICE 2.2.1

Mocninnou řadou se středem v bodě x_0 rozumíme řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \quad (2.2)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ jsou konstanty, které nazýváme **koeficienty řady**.

POZNÁMKA 2.2.1

Je-li $x_0 = 0$, dostáváme mocninnou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Naším úkolem bude určit obor konvergence mocninné řady. Stejně jako pro funkční řadu, **obor konvergence** je množina všech x , pro která daná řada konverguje. Podobně **obor absolutní konvergence** bude množina všech x , pro která daná řada konverguje absolutně. Především je zřejmé, že každá mocninná řada konverguje (absolutně) ve svém středu x_0 (o tom se můžeme snadno přesvědčit přímým dosazením čísla x_0 za x do řady).

Následující věta ukazuje, že struktura oboru konvergence mocninné řady je velmi jednoduchá: je to buď jednoprvková množina (obsahující střed řady), nebo interval konečné délky (symetrický kolem středu), nebo celá reálná osa.

VĚTA 2.2.1 (O poloměru konvergence)

Ke každé mocninné řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ existuje právě jedno číslo $r \in \langle 0, \infty \rangle$ takové, že

- řada konverguje absolutně pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$,
- řada diverguje pro všechna $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$ (pokud $r \neq \infty$).

Číslo r nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady (2.2) a interval $(x_0 - r, x_0 + r)$ **interval konvergence** této řady. Značíme jej IK.

POZNÁMKA 2.2.2

1. Hodnota $r = 0$ znamená, že řada konverguje pouze pro $x = x_0$ (tj. pouze ve svém středu) a zápisem $r = +\infty$ rozumíme, že řada konverguje pro všechna reálná x .
2. V krajních bodech $x_0 - r$ a $x_0 + r$ může mocninná řada konvergovat (absolutně nebo neabsolutně), případně divergovat nebo oscilovat. Tyto případy musíme vždy vyšetřit zvlášť.

Poloměr konvergence r budeme hledat pomocí vztahu uvedeného v následující větě.

VĚTA 2.2.2 (Určení poloměru konvergence)

Nechť je dána mocninná řada (2.2) a necht existuje limita (konečná či nekonečná)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \varrho, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho. \quad (2.3)$$

Potom poloměr konvergence r mocninné řady (2.2) určíme jako

$$r = \frac{1}{\varrho}.$$

Přitom rozlišujeme tyto případy:

- Je-li $\varrho = 0$, pak poloměr konvergence definujeme jako $r = +\infty$ a řada (2.2) absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Interval konvergence pak zapisujeme ve tvaru $\text{IK} = (-\infty, +\infty)$.
- Je-li $\varrho = +\infty$, pak poloměr konvergence definujeme jako $r = 0$ a řada (2.2) diverguje pro všechna $x \neq x_0$. Konverguje (absolutně) pouze ve svém středu x_0 . Interval konvergence neexistuje.
- Je-li $0 < \varrho < +\infty$, pak poloměr konvergence vypočteme jako $r = \frac{1}{\varrho}$ a řada (2.2) absolutně konverguje pro všechna x , pro která platí $|x - x_0| < r$ a diverguje pro všechna x , pro něž $|x - x_0| > r$. Interval konvergence je ve tvaru $\text{IK} = (x_0 - r, x_0 + r)$.

DEFINICE 2.2.2

Obor konvergence (OK) mocninné řady je interval, na kterém daná řada konverguje. Je to tedy interval konvergence IK s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada konverguje. Tyto krajní body musíme vždy vyšetřit zvlášť.

Obor absolutní konvergence (OAK) je potom interval, na kterém daná řada absolutně konverguje. Je to tedy interval konvergence IK s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada absolutně konverguje.

POZNÁMKA 2.2.3

Výše uvedené vztahy pro výpočet poloměru konvergence lze použít pouze v případě, že mocniny v řadě rostou po jedné. Pokud tomu tak není (např. u řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$ se mocniny zvyšují po dvou), musíme použít k určení oboru konvergence jiné postupy, které se užívají obecně u funkčních řad.

Postup při hledání poloměru konvergence, OK a OAK mocninné řady:

1. Určíme člen a_n a střed x_0 dané mocninné řady.
2. Vypočteme ϱ užitím jednoho ze vztahů (2.3).
3. Najdeme poloměr konvergence $r = \frac{1}{\varrho}$.
4. Zapišeme interval konvergence $IK = (x_0 - r, x_0 + r)$.
5. Vyšetříme chování mocninné řady v krajních bodech intervalu konvergence.
6. Zapišeme **obor konvergence (OK)** a **obor absolutní konvergence (OAK)** dané mocninné řady.

PŘÍKLAD 2.2.1

Určete poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence dané mocninné řady:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}},$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 3^n}.$
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-4)^n,$

Řešení:

- a) 1. Daná mocninná řada má $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a střed $x_0 = 0$.
2. Určíme ϱ :

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

3. Poloměr konvergence bude $r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{1} = 1$.
4. Interval konvergence: $IK = (x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$. V tomto intervalu řada absolutně konverguje.
5. Nyní vyšetříme chování řady v krajních bodech intervalu konvergence:
- Levý krajní bod $x = -1$ dosadíme do dané mocninné řady za x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Dostali jsme alternující číselnou řadu, jejíž konvergenci vyšetříme Leibnizovým kritériem:

1. posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající, neboť $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje.

Nyní vyšetříme absolutní a neabsolutní konvergenci této řady. Vezmeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ a například integrálním kritériem zjistíme, že diverguje. Celkově tedy alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konverguje neabsolutně. To znamená, že daná mocninná řada v krajním bodě $x = -1$ **konverguje neabsolutně**.

- Pravý krajní bod $x = 1$ dosadíme do dané mocninné řady. Dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

o které jsme v předchozím kroku zjistili, že diverguje. V pravém krajním bodě tedy mocninná řada **diverguje**.

6. **Obor konvergence** dané mocninné řady: **OK** = $\langle -1, 1 \rangle$,
obor absolutní konvergence: **OAK** = $(-1, 1)$.

b) 1. Platí $a_n = \frac{1}{n^2 3^n}$, střed je v bodě $x_0 = -2$.

$$2. \varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}} = \frac{1}{3}.$$

$$3. \text{ Poloměr } r = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$4. \text{ Interval konvergence IK} = (x_0 - r, x_0 + r) = (-5, 1).$$

5. Krajní body:

- Pro $x = -5$ dostáváme číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}.$$

Tato alternující řada **konverguje absolutně** (viz odstavec Alternující řady v kapitole Číselné řady).

- Pro $x = 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Tato řada **konverguje** (např. užitím integrálního kritéria), a to **absolutně** (pro řady s kladnými členy je pojem konvergence totožný s pojmem absolutní konvergence).

$$6. \mathbf{OK} = \mathbf{OAK} = \langle -5, 1 \rangle.$$

c) 1. Zde máme $a_n = \frac{1}{n!}$, střed $x_0 = 0$.

$$2. \varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$$3. \text{ Poloměr } r = \frac{1}{\varrho} = \infty.$$

$$4. \text{ Interval konvergence IK} = (-\infty, \infty).$$

5. Krajní body neřešíme.

$$6. \mathbf{OK} = \mathbf{OAK} = (-\infty, \infty).$$

Řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

d) 1. Tato řada má $a_n = n^n$, $x_0 = 4$.

2. Číslo ϱ nyní vypočítáme např. užitím 2. vztahu z (2.3), tj.

$$\varrho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

$$3. \text{ Poloměr } r = 0.$$

4. Interval konvergence neexistuje.

5. Krajní body nejsou.

6. Daná řada konverguje (absolutně) pouze ve svém středu $x_0 = 4$, tj.

$$\mathbf{OK} = \mathbf{OAK} = \{4\}.$$

VĚTA 2.2.3 (O součtu, derivaci a integraci mocninné řady)

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ má poloměr konvergence $r > 0$ a součet $s(x)$. Potom platí:

1. Součet této řady $s(x)$ je funkce spojitá na intervalu $(x_0 - r, x_0 + r)$. Konverguje-li navíc tato řada v levém (resp. pravém) krajním bodě tohoto intervalu, pak je $s(x)$ v tomto bodě spojitá zprava (resp. zleva).
2. Derivace součtu řady je rovna součtu derivací jednotlivých členů řady pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, tj.

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

3. Integrace součtu řady je rovna součtu integrací jednotlivých členů řady pro libovolný interval $\langle a, b \rangle \subset (x_0 - r, x_0 + r)$

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) dx &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-x_0)^n dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{(b-x_0)^{n+1}}{n+1} - a_n \frac{(a-x_0)^{n+1}}{n+1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b-x_0)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (a-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 2.2.2

Určete obor konvergence a součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Pomocí získaného výsledku určete součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Řešení: Daná mocninná řada má obor konvergence $(-1, 1)$ (ověřte sami).

Při hledání součtu mocninné řady využijeme toho, že $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Na zjištění oboru konvergence potom podle předchozí věty dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'. \quad (2.4)$$

V závorce na pravé straně máme geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = x$ a kvocientem $q = x$, takže její součet je $s(x) = \frac{x}{1-x}$. Tento součet dosadíme do pravé strany v 2.4, čímž dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$.

Dále je vidět, že zadanou číselnou řadu dostaneme z mocninné řady dosazením čísla $x = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$. Hledaný součet číselné řady je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

PŘÍKLAD 2.2.3

Určete obor konvergence a součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Pomocí získaného výsledku určete součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Řešení: Daná mocninná řada má obor konvergence $\langle -1, 1 \rangle$.

Snadno je vidět, že člen $\frac{x^n}{n}$ lze vyjádřit takto:

$$\frac{x^n}{n} = \int x^{n-1} dx.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int x^{n-1} dx \right) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx. \quad (2.5)$$

(Na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ můžeme zaměnit integraci a sumaci)

Mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ lze sečíst jako geometrickou řadu s kvocientem x , kde $|x| < 1$. Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Opíšeme levou stranu rovnosti (2.5) a do pravé dosadíme funkci $\frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln |1-x|.$$

Našli jsme tedy součet dané mocninné řady $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln |1-x|$. Dosadíme-li do zadané řady za x číslo $\frac{1}{2}$ (které patří do oboru konvergence mocninné řady), dostaneme číselnou řadu, jejíž součet máme spočítat. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

2.3 Taylorova a Maclaurinova řada

V předchozím odstavci jsme hledali součet dané mocninné řady, a to buď jejím derivováním nebo integrováním členu po členu. Nyní budeme řešit opačnou úlohu: danou funkci budeme rozvíjet do mocninné řady, mluvíme o tzv. Taylorově řadě.

DEFINICE 2.3.1

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

nazýváme **Taylorovou řadou** funkce f v bodě x_0 .

Je-li $x_0 = 0$, pak je řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a nazývá se **Maclaurinova řada**.

POZNÁMKA 2.3.1

Taylorovu řadu lze napsat vždy, pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivace všech řádů. Vzniká však otázka, zda součet Taylorovy řady funkce f je roven skutečně této funkci. Odpověď nám dává následující věta.

VĚTA 2.3.1

Nechť funkce f má v nějakém bodě $x_0 \in I$ derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2.6)$$

na intervalu I obsahující bod x_0 právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ Taylorových zbytků platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

POZNÁMKA 2.3.2

Taylorův zbytek má tvar

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta), \quad \text{kde } \vartheta \in I, \vartheta \neq x, x_0.$$

PŘÍKLAD 2.3.1

Rozviňte funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v bodě $x_0 = -2$ v Taylorovu řadu.

Řešení: Nejdříve vypočítáme koeficienty Taylorovy řady:

$$f(-2) = -\frac{1}{2},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-2) = -\frac{1}{4},$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(-2) = -\frac{1}{4},$$

atd.

Dosazením koeficientů do Taylorovy řady dostaneme:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1!} (x + 2) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!} (x + 2)^2 + \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}(x + 2) + \frac{1}{2^2}(x + 2)^2 + \dots + \frac{1}{2^n}(x + 2)^n + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x + 2)^n. \end{aligned}$$

MACLAURINOVY ROZVOJE ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ

Ve zbývající části této kapitoly uvedeme Taylorovy řady v bodě $x_0 = 0$ (tj. Maclaurinovy řady) pro elementární funkce e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ a $(1+x)^a$, kde $a \in \mathbb{R}$, a jejich použití v příkladech.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

je **binomický koeficient**.

Tato řada se nazývá **binomická řada**.

PŘÍKLAD 2.3.2

Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

a) $f(x) = \sin x^2$,

b) $f(x) = e^{-x^3}$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení:

a) Použijeme Maclaurinův rozvoj funkce

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Dosazením za $t = x^2$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x^2 &= x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Použijeme Maclaurinův rozvoj funkce

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Dosazením za $t = -x^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x^3} &= 1 + \frac{-x^3}{1!} + \frac{(-x^3)^2}{2!} + \frac{(-x^3)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^3)^n}{n!} + \cdots = \\ &= 1 - x^3 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Funkci přepíšeme do tvaru $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Položíme $-x^2 = t$ a dostaneme funkci $f(t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\begin{aligned} (1+t)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}t + \binom{-\frac{1}{2}}{2}t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}t^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n + \cdots = \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}t^n + \cdots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}t^2 - \frac{15}{2^3 \cdot 3!}t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}t^n + \cdots \end{aligned}$$

pro $t \in (-1, 1)$. Dosazením za $t = -x^2$ dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \cdots + \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

PŘÍKLAD 2.3.3

Vyjádřete funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$ mocninnou řadou.

Řešení: Derivace dané funkce je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Tuto funkci můžeme chápat jako součet geometrické řady s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = -x^2$. Je tedy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Integrací tohoto vztahu člen po členu dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Vyšetřením krajních bodů $x = \pm 1$ zjistíme, že v nich řada konverguje, takže vypočtený rozvoj funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ platí pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

PŘÍKLAD 2.3.4

Užitím Maclaurinových rozvojů elementárních funkcí najděte součty číselných řad:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!},$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n}.$

Řešení:

- a) K výpočtu je vhodné použít Maclaurinův rozvoj funkce

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li do tohoto rozvoje za $x = 7$, dostaneme zadanou číselnou řadu. Její součet je tedy roven

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = e^7.$$

- b) Využijeme rozvoj funkce

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pro $x = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$ dostaneme číselnou řadu, jejíž součet máme určit. Je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n} = \ln \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \ln \frac{4}{3}.$$

PŘÍKLAD 2.3.5

Pomocí Maclaurinových rozvojų elementárních funkcí vypočtete následující integrály:

a) $\int \frac{e^x}{x^2} dx,$

b) $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$

Řešení:

a) Platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

takže

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots.$$

Dosazením do integrálu dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots \right) dx = \\ &= -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)!} + \cdots = \\ &= -\frac{1}{x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)!} + C, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

b) Substitucí $t = x^2$ vyjádříme Maclaurinův rozvoj funkce

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} + \cdots.$$

Potom

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} + \cdots,$$

tedy

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{n} + \cdots.$$

Daný integrál je roven

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx &= \int \left(x - \frac{x^3}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{(2n-1)}}{n} + \cdots \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3^2} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2 \cdot n^2} + \cdots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2 \cdot n^2} + C, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Kapitola 3

Fourierovy řady

V předchozí kapitole bylo ukázáno, že polynomy jsou velmi vhodným nástrojem k aproximaci funkcí v okolí daného bodu. V bodech, které jsou od daného bodu “daleko”, už však může být chyba při aproximaci velká. Navíc často potřebujeme aproximovat i funkce nespojité, pro které Taylorův polynom nelze použít. To nás vede k zavedení jiné metody, pomocí které se dají aproximovat funkce na nějakém větším intervalu než jen v okolí daného bodu, přičemž aproximovaná funkce nemusí být ani spojitá. Tuto metodu zavedl francouzský matematik a lékař **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768 - 1830) a spočívá v aproximaci funkcí pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus. Obě funkce jsou periodické, takže se pomocí nich dají vyjadřovat funkce, které popisují různé periodické děje.

DEFINICE 3.0.2

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Existuje-li takové kladné číslo p , že pro každé x platí:

$$f(x + p) = f(x),$$

řekneme, že funkce $f(x)$ je **periodická s periodou p** .

POZNÁMKA 3.0.3

Je-li p perioda funkce $f(x)$, pak každý celočíselný násobek $k \cdot p$ je také periodou funkce $f(x)$. Nejmenší kladnou periodu T nazveme **základní perioda**. Pro průběh celé periodické funkce stačí tedy znát její průběh v jednom, a to kterémkoliv, intervalu délky T .

Dá se ukázat, že funkce s libovolnou periodou T (obecně různou od 2π), se dají transformovat na funkce s periodou 2π . Proto se při vyšetřování periodických funkcí omezíme pouze na funkce s periodou 2π .

Nejjednodušším netriviálním případem periodických funkcí jsou základní goniometrické funkce $\cos nx, \sin nx$, které mají základní periodu 2π . Nabízí se proto myšlenka aproximovat obecnou periodickou funkci buď lineární kombinací konečného počtu funkcí $\cos nx, \sin nx$, nebo přímo nekonečnou funkční řadou, jejíž členy jsou goniometrické funkce. V této souvislosti zavádíme následující pojmy.

DEFINICE 3.0.3

Nekonečnou funkční řadu ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.1)$$

kde a_0, a_n, b_n jsou konstanty, nazýváme **trigonometrickou řadou**.
Přitom k -tý částečný součet řady (3.1) je tvaru

$$T_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

a nazývá se **trigonometrický polynom** stupně k .

POZNÁMKA 3.0.4

Nultý člen řady (3.1) vystupuje ve tvaru $\frac{a_0}{2}$ z početních důvodů, které uvedeme později.

3.1 Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\varphi_n(x)\}$

Při úvahách o aproximaci trigonometrickými řadami je podstatnou vlastností tzv. **ortogonalita** systému funkcí $\{\cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Nejdříve tento pojem zavedeme pro libovolný systém funkcí $\{\varphi_n(x)\}$.

DEFINICE 3.1.1

Buďte f, g integrovatelné funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

nazýváme **skalárním součinem** funkcí f, g . Funkce f, g se nazývají **ortogonální** na intervalu $\langle a, b \rangle$, právě když $(f, g) = 0$.

DEFINICE 3.1.2

Buď f integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. **Normou** funkce f rozumíme číslo $\|f\| = \sqrt[2]{(f, f)}$. Funkce f se nazývá **normovaná**, právě tehdy, když $\|f\| = 1$.

DEFINICE 3.1.3

Bud' $\{\varphi_n\}$ konečná nebo nekonečná posloupnost integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$. Tato posloupnost se nazývá **ortogonální**, právě když každé dvě funkce $\varphi_i, \varphi_j, i \neq j$ jsou ortogonální, tj. platí

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad i \neq j,$$

a každá funkce φ_i má kladnou normu, tj.

$$\int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Posloupnost $\{\varphi_n\}$ se nazývá **ortonormální**, právě když je ortogonální a každá funkce φ_n je normovaná.

POZNÁMKA 3.1.1

Princip rozvoje funkcí do Fourierových řad je následovný:

Předpokládejme, že funkci f lze vyjádřit jako lineární kombinaci nekonečného ortogonálního systému funkcí $\{\varphi_n\}$ na nějakém intervalu $\langle a, b \rangle$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Násobme nyní tuto rovnost funkcí φ_m a integrujme na intervalu $\langle a, b \rangle$. Dostaneme

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \varphi_m(x) \right) dx.$$

Předpokládejme dále, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ konverguje k funkci $f(x)$ na $\langle a, b \rangle$ tak, že je možné zaměnit znak sumace a integrace, tj.

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx.$$

Protože funkce φ_n jsou ortogonální, dostáváme

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = c_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx.$$

odtud plyne

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx.$$

Koeficienty c_n se nazývají **Fourierovy koeficienty** a řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ se nazývá **Fourierova řada** funkce $f(x)$ vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\varphi_n\}$.

3.2 Fourierovy řady vzhledem k systému $\{\cos nx, \sin nx\}$

V tomto odstavci se budeme zabývat Fourierovými řadami vzhledem k systému

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}. \quad (3.2)$$

Zavedeme následující definici.

DEFINICE 3.2.1

Dá-li se nějaká funkce $f(x)$ vyjádřit trigonometrickou řadou (3.1), tj. platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3.3)$$

kde a_n, b_n jsou vhodné konstanty, říkáme, že jsme funkci $f(x)$ **rozvinuli v trigonometrickou řadu**.

Nejprve se budeme zabývat Fourierovým rozvojem periodických funkcí se základní periodou 2π . Úvahy provedeme pro interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, lze je však bez újmy na obecnosti přenést na libovolný interval $\langle c, c + 2\pi \rangle$, $c \in \mathbb{R}$, vlastnosti periodické funkce $f(x)$ se tím nijak nezmění. Platí totiž rovnost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) dx = \int_c^{c+2\pi} g(x) dx.$$

Také platí následující tvrzení.

VĚTA 3.2.1 (Ortogonalita trigonometrického systému)

Nekonečný trigonometrický systém (3.2) je ortogonální na libovolném intervalu $\langle c, c + 2\pi \rangle$ délky 2π .

Následující věta poskytuje návod k určení koeficientů a_n, b_n ve vyjádření (3.3).

VĚTA 3.2.2 (Určení koeficientů a_n, b_n)

Konverguje-li trigonometrická řada (3.1) k integrovatelné funkci $f(x)$ v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, potom platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Fourierova řada funkce f vzhledem k systému (3.2) má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

POZNÁMKA 3.2.1

Aby byla odstraněna jistá nesymetrie v těchto vztazích, je obvykle “nultý” koeficient psán ve tvaru $\frac{a_0}{2}$.

VĚTA 3.2.3 (O sudé a liché funkci)

Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

1. Je-li f sudá funkce na $(-\pi, \pi)$, tj.

$$f(-x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (-\pi, \pi),$$

má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2. Je-li f lichá funkce na $(-\pi, \pi)$, tj.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (-\pi, \pi),$$

má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

POZNÁMKA 3.2.2

1. Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Položíme-li pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ $f(x) = f(-x)$, zkonstruujeme **sudé rozšíření funkce f** na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Fourierově řadě sudého rozšíření funkce f říkáme **rozvoj funkce f v kosinovou řadu** na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
2. Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Položíme-li pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ $f(0) = 0, f(x) = -f(-x)$, sestojíme **liché rozšíření funkce f** na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Fourierova řada lichého rozšíření funkce f se nazývá **rozvoj funkce f v sinovou řadu** na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Nyní uvedeme vztahy pro Fourierovy koeficienty pro funkci, která má základní periodu $T = 2l$ obecně různou od 2π . Tuto funkci lze transformací

$$x = \frac{T}{2\pi} \cdot u$$

převést na funkci periodickou s periodou 2π . Z transformační rovnice plyne

$$u = \frac{2\pi}{T} \cdot x = \frac{\pi}{l} \cdot x,$$

takže Fourierovy koeficienty budou mít tvar

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(n \frac{\pi}{l} x \right) \, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(n \frac{\pi}{l} x \right) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

3.3 Konvergence Fourierovy řady

V tomto odstavci uvedeme podmínky, při jejichž splnění je součet Fourierovy řady funkce $f(x)$ roven přímo funkci $f(x)$.

Funkci $f(x)$ nazveme **po částech spojitou** na intervalu $\langle a, b \rangle$, má-li na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti, přičemž v nich existují konečné a různé jednostranné limity.

VĚTA 3.3.1 (Dirichletova o konvergenci rozvoje neperiodické funkce)

Nechť funkce $f(x)$ je po částech spojitá a po částech monotonní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pak její Fourierova řada konverguje na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a její součet $s(x)$ je roven

1. $s(x) = f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f spojitá,
2. $s(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f nespojitá,
3. $s(-\pi) = s(\pi) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \right]$ v krajních bodech intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

PŘÍKLAD 3.3.1

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Řešení: Protože funkce $f(x)$ je spojitá a po částech monotonní na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, přičemž $f(-\pi) = f(\pi)$, konverguje její Fourierova řada na $\langle -\pi, \pi \rangle$ k funkci $f(x)$. Vyčíslíme koeficienty této řady.

Protože funkce $f(x)$ je sudá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, platí $b_n = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$ a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx. \end{aligned}$$

Dvojit aplikací metody per-partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx &= \frac{1}{n} \left[x^2 \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{n} \pi^2 \sin n\pi - \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n} \left[x \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \\ &= -\frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n} \pi \cos n\pi + \frac{1}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{n^2} \pi \cos n\pi. \end{aligned}$$

Využitím toho, že $\cos n\pi = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$, dostaneme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{2}{n^2} \pi (-1)^n = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Hledaný Fourierův rozvoj má tedy tvar

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{8} + \dots \right), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 3.3.2

Funkci $f(x) = x$ rozviňte na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ do kosinové řady.

Řešení: Funkci $f(x)$ dodefinujeme na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$ a to tak, že pro $x \in \langle -\pi, 0 \rangle$ položíme $f(x) = f(-x)$. Tím zkonstruujeme sudé rozšíření funkce $f(x)$ na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Nyní vypočítáme Fourierovy koeficienty pro tuto funkci. Platí

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{n\pi} [x \sin nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudá,} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{pro } n \text{ lichá.} \end{cases} \end{aligned}$$

Protože jsme funkci dodefinovali na funkci sudou, bude $b_n = 0$ pro všechna $n = 1, 2, \dots$

Rozvoj funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ do kosinové řady bude tedy vypadat následovně:

$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$