Určete definiční obory následujících funkcí:

1. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
   $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{2\}}}.$

2. $f(x) = \frac{8x^3-x}{x^2-18x+80}$
   $x^2 - 18x + 80 \neq 0 \Rightarrow (x-8)(x-10) \neq 0 \Rightarrow x \neq 8 \wedge x \neq 10 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{8, 10\}}}.$

3. $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2-9x+9}$
   $x^3 - x^2 - 9x + 9 \neq 0 \Rightarrow x^2(x-1) - 9(x-1) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-9) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq \pm 3 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{1, 3, -3\}}}.$

4. $f(x) = \frac{1-x^2}{x^3-2x^2-5x+6}$
   $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-x-6) \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 3 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \{1, -2, 3\}}}.$

5. $f(x) = \sqrt{2x-7}$
   $2x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow \underline{\underline{D_f = [\frac{7}{2}, \infty)}}.$

6. $f(x) = \sqrt{27 - x^3}$
   $27 - x^3 \geq 0 \Rightarrow (3-x)(9+3x+x^2) \geq 0$. Protože výraz $9 + 3x + x^2$ je kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí platit $3 - x \geq 0$, tj. $x \leq 3$. Tedy $\underline{\underline{D_f = (-\infty, 3]}}.$

7. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2-5x-3x^2}}$
   $2 - 5x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 < 0 \Rightarrow 3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right) < 0 \Rightarrow 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2) < 0 \Rightarrow x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \left(-2, \frac{1}{3}\right)}}.$

8. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x-4}}$

$$\frac{2x+3}{x-4} \geq 0 \quad \wedge \quad x - 4 \neq 0$$

$$(2x+3 \geq 0 \quad \wedge \quad x-4 > 0) \quad \vee \quad (2x+3 \leq 0 \quad \wedge \quad x-4 < 0)$$

$$(x \geq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x > 4) \quad \vee \quad (x \leq -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad x < 4)$$

$$x > 4 \quad \vee \quad x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{D_f = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup (4, \infty).}}$$

9. $f(x) = \sqrt{x^3 - x} + \sqrt{25 - x^2}$
   $x^3 - x \geq 0 \wedge 25 - x^2 \geq 0.$
   Z první podmínky dostáváme:

   $$x(x^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, \infty).$$

   Z druhé podmínky plyne:

   $$x^2 \leq 25 \Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow x \in [-5, 5].$$

   Celkově tedy $x \in [-1, 0] \cup [1, 5] \Rightarrow \underline{\underline{D_f = [-1, 0] \cup [1, 5]}}.$

10. $f(x) = \sqrt{5^x - 125}$
    $5^x - 125 \geq 0 \Rightarrow 5^x \geq 125 \Rightarrow 5^x \geq 5^3.$
    Protože funkce $g(x) = 5^x$ je rostoucí na celém svém definičním oboru, platí $x \geq 3 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = [3, \infty)}}.$

11. $f(x) = \sqrt{0,25^x - 16}$
    $0,25^x - 16 \geq 0 \Rightarrow 0,25^x \geq 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 4^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$. Protože funkce $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ je klesající na celém svém definičním oboru, platí $x \leq -2$. Tedy $\underline{\underline{D_f = (-\infty, -2]}}.$

12. $f(x) = \log_4(x^2 - 3x)x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \Rightarrow \underline{\underline{D_f = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)}}.$

13. $f(x) = \ln \dfrac{x+2}{4x-6}$

    $$\frac{x+2}{4x-6} > 0$$

    $$(x + 2 > 0 \quad \wedge \quad 4x - 6 > 0) \quad \vee \quad (x + 2 < 0 \quad \wedge \quad 4x - 6 < 0)$$

    $$\left(x > -2 \quad \wedge \quad x > \frac{3}{2}\right) \quad \vee \quad \left(x < -2 \quad \wedge \quad x < \frac{3}{2}\right)$$

$$x > \frac{3}{2} \quad \vee \quad x < -2$$

$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right).}}$$

14. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(4x-7)}$

    $\ln(4x-7) \neq 0 \quad \wedge \quad 4x - 7 > 0.$

    První podmínka: $\ln(4x-7) \neq 0 \Rightarrow \ln(4x-7) \neq \ln 1 \Rightarrow 4x - 7 \neq 1 \Rightarrow 4x \neq 8 \Rightarrow x \neq 2$.

    Druhá podmínka: $x > \frac{7}{4}$.

    Tedy $\underline{\underline{D_f = \left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup (2, \infty)}}$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(x+4) - 3}$

    $\log_2(x+4) - 3 \neq 0 \quad \wedge \quad x + 4 > 0.$

    Z první podmínky plyne $\log_2(x+4) \neq 3 \Rightarrow \log_2(x+4) \neq \log_2 8$. Odlogaritmováním obou stran nerovnosti dostáváme $x + 4 \neq 8 \Rightarrow x \neq 4$.

    Z druhé podmínky plyne $x > -4$.

    Celkově tedy $\underline{\underline{D_f = (-4, 4) \cup (4, \infty)}}$.

16. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)}$

    $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq 0 \wedge 2x + 5 > 0.$

    Z první podmínky dostáváme $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1$. Protože základ logaritmů je menší než 1, platí pro jejich argumenty $2x+5 \leq 1 \Rightarrow x \leq -2$. Současně z druhé podmínky plyne $x > -\frac{5}{2}$, takže celkově

    $$\underline{\underline{D_f = (-\frac{5}{2}, -2].}}$$

17. $f(x) = \dfrac{x+1}{1 + \sin x}$

    $1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

    Tedy

    $$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right\}.}}$$

18. $f(x) = \dfrac{\sin x}{4\cos^2 x - 3}$

$4\cos^2 x - 3 \neq 0 \Rightarrow \cos^2 x \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \wedge x \neq \frac{5}{6}\pi + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}.}}$$

19. $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{2\cos^2 x + 3\sin x}$

$2\cos^2 x + 3\sin x \neq 0 \Rightarrow 2(1-\sin^2 x) + 3\sin x \neq 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \neq 0$.

Substitucí $\sin x = t$ vyřešíme kvadratickou rovnici $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Její kořeny jsou $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$. První kořen nevyhovuje (neboť obor hodnot funkce $\sin x$ je interval $[-1, 1]$), z druhého dostáváme:

$$x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}.}}$$

20. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - \sqrt{3}}}$

$2\sin x - \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \right);\ k \in \mathbb{Z}.$

Tedy

$$\underline{\underline{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right).}}$$

21. $f(x) = \ln \tan x$

$\tan x > 0\ \wedge x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right);\ k \in \mathbb{Z}.$

Z první podmínky plyne $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right); k \in \mathbb{Z}$, celkově tedy

$$\underline{\underline{D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right).}}$$

22. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3x-|x+2|}}$
$3x - |x+2| > 0.$

   1. Je-li $x \geq -2$, dostaneme nerovnici $3x - x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$.
      Celkově tedy $x > 1$.
   2. Je-li $x < -2$, dostaneme nerovnici $3x + x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$.
      Celkově tedy $x \in \emptyset$.

   Definičním oborem je pak sjednocení intervalů v 1. a 2., tedy

$$\underline{\underline{D_f = (1, \infty)}}.$$

23. $f(x) = \arccos(3 - 8x)$
$-1 \leq 3 - 8x \leq 1.$
Obě nerovnice vyřešíme současně, dostaneme

$$-4 \leq -8x \leq -2 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{4},$$

tedy $\underline{\underline{D_f = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]}}$.

24. $f(x) = \arcsin \frac{1-5x}{6}$
$-1 \leq \frac{1-5x}{6} \leq 1.$
Stejně jako v předchozím příkladě budeme řešit obě nerovnice současně:
$-6 \leq 1 - 5x \leq 6 \Rightarrow -7 \leq -5x \leq 5 \Rightarrow \frac{7}{5} \geq x \geq -1$, tedy $\underline{\underline{D_f = [-1, \frac{7}{5}]}}$.

25. $f(x) = \arccos \frac{x-3}{2x}$
$-1 \leq \frac{x-3}{2x} \leq 1 \quad \wedge \quad x \neq 0.$

   1. Pro $x > 0$ násobíme v obou nerovnicích kladným výrazem $2x$, takže máme

$$-2x \leq x - 3 \leq 2x.$$

      Vyřešíme každou nerovnici zvlášť:
      První nerovnice: $-2x \leq x - 3 \Rightarrow -3x \leq -3 \Rightarrow x \geq 1$,
      Druhá nerovnice: $x - 3 \leq 2x \Rightarrow x \geq -3$.
      Celkově tedy $x > 0 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq -3 \Rightarrow x \geq 1$.

2. Pro $x < 0$ má výraz $2x$ zápornou hodnotu, proto při násobení tímto výrazem musíme převrátit znaménka nerovností na opačná. Dostaneme
$$-2x \geq x - 3 \geq 2x.$$
Opět vyřešíme každou nerovnici zvlášť:
První nerovnice: $-2x \geq x - 3 \Rightarrow x \leq 1$,
Druhá nerovnice: $x - 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq -3$.
Celkově $x < 0 \wedge x \leq 1 \wedge x \leq -3 \Rightarrow x \leq -3$.

Definičním oborem je sjednocení intervalů v 1. a 2., tj.
$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)}}.$$

26. $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 9} + \ln(5 - x)$
$(x^2 - 9 \geq 0 \wedge 5 - x > 0) \Rightarrow (x^2 > 9 \wedge x < 5) \Rightarrow |x| > 3 \wedge x < 5 \Rightarrow$
$x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \wedge x < 5 \Rightarrow$
$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, -3] \cup [3, 5)}}.$$

27. $f(x) = \ln[\ln(x - 3)] + \arcsin \dfrac{x - 5}{2}$
$\ln(x - 3) > 0 \wedge x - 3 > 0 \quad \wedge \quad -1 \leq \frac{x-5}{2} \leq 1$.
První podmínka: $\ln(x - 3) > \ln 1 \Rightarrow x - 3 > 1 \Rightarrow x > 4$.
Druhá podmínka: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.
Třetí podmínka: $-2 \leq x - 5 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x \leq 7$
Celkově $\underline{\underline{D_f = (3, 7]}}$.

28. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{3 + \ln x} - 2}$
$\sqrt{3 + \ln x} - 2 \neq 0 \wedge 3 + \ln x \geq 0 \wedge x > 0$.
Z první podmínky plyne $\sqrt{3 + \ln x} \neq 2$, což po umocnění dává $3 + \ln x \neq 4 \Rightarrow \ln x \neq 1 \Rightarrow x \neq e$.
Z druhé podmínky máme $\ln x \geq -3 \Rightarrow x \geq e^{-3}$.
Celkově tedy $x \neq e \quad \wedge \quad x \geq e^{-3} \quad \wedge \quad x > 0$, tj.
$$\underline{\underline{D_f = \left[e^{-3}, e\right) \bigcup (e, \infty)}}.$$

29. $f(x) = \arccos(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$-1 \leq \ln x \leq 1 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x^2 - 1 > 0.$

První podmínka: $\ln \frac{1}{e} \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{e}, e\right].$

Třetí podmínka: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$

Celkově

$$\underline{\underline{D_f = (1, e]}}$$