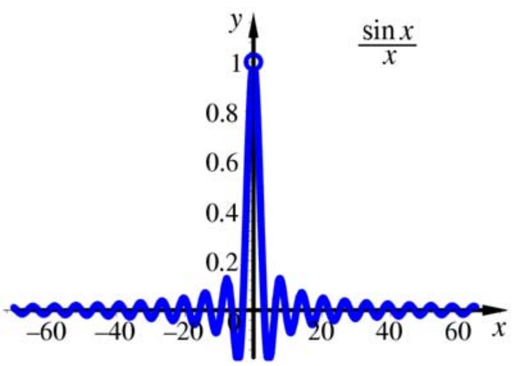
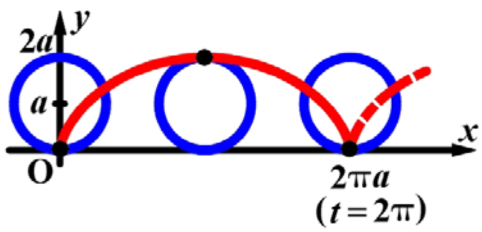
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

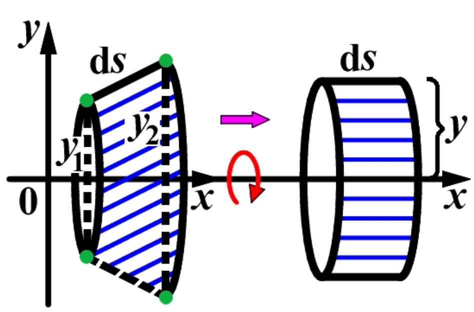
MATEMATIKA I

STRUČNÝ VÝKLAD, ŘEŠENÉ PŘÍKLADY, CVIČENÍ S APLIKACEMI, UKÁZKY SYSTÉMU MAPLE

MILOSLAV FIALKA, HANA CHARVÁTOVÁ







ZLÍN 2009

Recenzoval: doc. RNDr. Josef Hošek, CSc.

ISBN: 978-80-7318-584-8

Předmluva

Skriptum Matematika I obsahuje, jak uvádí už jeho podtitul, stručný, názorný a motivující výklad základů učiva z prvního semestru předmětu Matematika I s množstvím kvalitních obrázků, řešené příklady, nejnutnější minimum příkladů s výsledky k samostatnému procvičení ze širokého spektra aplikací. Zahrnuje ukázky řešení některých matematických problémů systémem počítačové algebry Maple, v němž jsou vytvořeny veškeré obrázky a vlastně i segmenty ozdobných prvků v předmluvě a závěru skripta, které jsme v Maple modelovali z částí křivek používaných v technické praxi (z prodloužené cykloidy, klotoidy a otočené Archimédovy spirály).
Zápis textu respektuje platnou Českou technickou normu [1].

Skriptum může být vzhledem ke koncentrované formě výkladu přehlednou učební pomůckou studentům UTB ve Zlíně, a to nejen z Fakulty aplikované informatiky, ale i z Fakulty technologické, popř. z Fakulty managementu a ekonomiky, která by jim měla spolu s nezastupitelným výkladem na přednáškách a prací v seminářích i samostudiu pomoci, jak jsou autoři přesvědčeni, k aktivnímu zvládnutí látky z matematické analýzy zaměřené na diferenciální a integrální počet reálných funkcí jedné reálné proměnné. Vhodnou literaturu k samostatnému propočítání dalších příkladů jistě doporučí jednotliví přednášející nebo lze využít dnes už bohatou nabídku webu.

Příklady menší až střední obtížnosti, které jsme zařadili k samostatnému procvičení, tvoří osvědčené minimum, jehož zvládnutí by se mělo stát rutinou, a tím i jednou z nutných podmínek úspěchu u zkoušky. Obtížnost příkladů ve cvičeních je proto srovnatelná např. se starším skriptem váženého kolegy F. Dubčáka [2]. Pamatovali jsme rovněž na zařazení příkladů z aplikací. Cílem zařazených poznámek je učivo zajímavě uvést, objasnit, a to zejména geometrickou názorností, podat motivaci problému, popř. výklad osvěžit údaji z historie matematiky.

Naší snahou bylo napsat pro studenty UTB ve Zlíně stručný a zároveň srozumitelný, názorný i matematicky korektní úvodní učební text ke zmíněnému předmětu, který by jim také pomohl úspěšně zvládnout navazující předmět Matematika II podpořený skripty M. Fialky [3], [4].
Část I a II tohoto skripta zpracoval Miloslav Fialka a část III zpracovala Hana Charvátová.

Děkujeme recenzentovi skripta doc. RNDr. Josefu Hoškovi, CSc. z Univerzity Palackého v Olomouci za užitečné náměty k textu i za podnětné diskuze, které přispěly k jeho výsledné úrovni.

Studentům hodně chuti do studia přejí a pečlivým čtenářům za inspirující připomínky k tomuto textu předem děkují autoři

RNDr. Miloslav Fialka, CSc. a Ing. Hana Charvátová, Ph.D.

Zlín, srpen 2006, Zlín, červenec 2007

Lepší je zapálit třeba jen jednu svíčku, než proklínat tmu

(*Konfucius*)

•

Kdo vítězí nad lidmi, je mocný. Kdo vítězí nad sebou, je nejmocnější

(*Lao-c*)

•

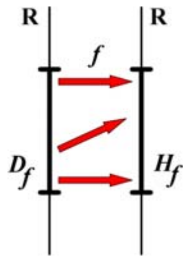
Učenost bez ctnosti je jako květ bez sadu

(*Jan Ámos Komenský*)

OBSAH

I DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1 POJEM REÁLNÉ FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ, rozdělení funkcí, o množině R a R*



1.1 FUNKCE, DEFINIČNÍ OBOR, OBOR HODNOT, GRAF Zobrazení f množiny $M \subseteq \mathbf{R}$ do množiny všech reálných čísel $\mathbf{R}$ se nazývá funkce (reálná funkce jedné reálné proměnné). Píšeme $f\colon\ M \to \mathbf{R}$ nebo $M \xrightarrow{f} \mathbf{R}$.
Podmnožina M v $\mathbf{R}$ označená často D_f či $\operatorname{dom} f$ a definovaná následovně

$D_f \equiv \operatorname{dom} f = \{x \in \mathbf{R} \mid \overset{1}{\exists}$ („existuje jediné") $y \in \mathbf{R}$ („tak, že"): $(x,\ y) \in f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}\}$, se nazývá definiční obor funkce f. Píšeme $x \overset{f}{\mapsto} y$ a čteme: „vzoru (nezávisle proměnné – argumentu) x je při zobrazení f přiřazen obraz (závisle proměnná) y". Symbol $f(x)$ označuje jak pouze funkční hodnotu y v čísle (bodě) x, tak někdy též samotnou funkci f. Není-li D_f předem zadán, pak jím rozumíme (největší) množinu všech x, pro něž má výraz $f(x)$ smysl.
Množina obrazů $H_f \equiv f(D_f) \equiv \operatorname{im} f = \{\, y \in \mathbf{R} \mid \exists$ (existuje aspoň jedno) $x \in \mathbf{R}$: $(x,\ y) \in f\,\}$ se nazývá obor hodnot funkce. Množina bodů euklidovské roviny $\mathbf{E_2}$, označená $G_f \equiv G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbf{E_2} \mid x \in D_f\}$, kde čísla x, $f(x)$ jsou souřadnice bodů ze soustavy souřadnic (obvykle kartézské, tj. pravoúhlé), se nazývá (kartézský) graf funkce f.

1.2 PŘÍKLAD Pro funkci f danou rovnicí $y = x^2$ určeme D_f a H_f.
Platí $D_f = \mathbf{R}$, $H_f = [0, +\infty) \subset \mathbf{R}^*$, kde množina $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, což čteme: „$\mathbf{R}^*$ je z definice rovno", přičemž symbol $:=$ nebo $=:$ je **definitorická rovnost**. Množina $\mathbf{R}^*$ je rozšíření množiny reálných čísel o nevlastní čísla – hodnoty – body $+\infty$ a $-\infty$. Podrobněji o $\mathbf{R}^*$ pojednává v závěru této kapitoly článek 1.10.

1.3 POZNÁMKA Funkce nemusí být vždy dána jen vzorcem – **analyticky**, ale též např. *graficky*, *tabelací* (tabulkou naměřených hodnot), jako *limita* (nekonečné) posloupnosti funkcí atd. Naše označení $f(x)$ funkce pochází z r. 1735 od Leonharda Eulera (1707 – 1783).

1.4 ROZDĚLENÍ FUNKCÍ (přičemž názvosloví není jednotné)

– **FUNKCE** – **ALGEBRAICKÉ** Jsou to funkce $y = f(x)$ identicky splňující algebraickou rovnici dvou proměnných [tj. rovnici $p(x, y) = 0$, kde $p(x, y)$ je polynom proměnných x, y. Např. algebraická funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ pro $-2 \le x \le 2$ vyhovuje rovnici $\underbrace{4 - x^2 - y^2}_{p(x,y)} = 0$] neboli svým analytickým vyjádřením předpisují pro argument x konečný počet čtyř operací: sčítání, odčítání, násobení a umocňování racionálním exponentem;

– **RACIONÁLNÍ** – **CELISTVÉ = POLYNOMY**, např. $x^2 + 1$

– **LOMENÉ** $\dfrac{2x^3 + 1}{x^2 + 2}$ (neryze), $\dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ (ryze)

– **IRACIONÁLNÍ** $\sqrt[3]{4x^2 + \sqrt{3}}$, $x/\left(\sqrt{x} + 1\right)$;

– **TRANSCENDENTNÍ** (transcendentno = nadskutečno): Ty co nejsou algebraické.

– **NIŽŠÍ** – Např. $\cot x$, $\sin(3x^2 - 0{,}1\pi)$, $\operatorname{arccot}(4x)$, 3^x, $\ln(x - 2)$, x^x;

– **VYŠŠÍ** – Např. $\operatorname{ent} x$, $\operatorname{sgn} x$, Dirichletova funkce $\chi(x)$. Dále to jsou integrální funkce nebo je lze vyjádřit jako nekonečnou řadu funkcí - např. funkce integrálsinus neboli sinusintegrál

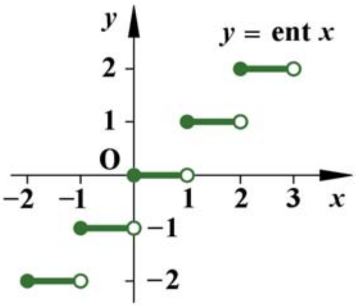
$$F(x) = \operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{nebo} \quad F(x) = \int \mathrm{e}^{\pm x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{atd.}$$

Skládáním (Viz dále pojem *složená funkce*) algebraických funkcí a nižších transcendentních funkcí vzniknou funkce s historickým názvem funkce elementární (ostatní funkce jsou neelementární). Podrobněji viz článek 5.1.

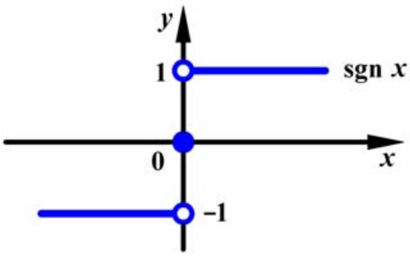
1.5 ABSOLUTNÍ HODNOTA FUNKCE f se nazývá taková funkce g, že $g(x) = |f(x)|$ pro $x \in D_f$. Píšeme $g = |f|$.

1.6 OPERACE S FUNKCEMI Součtem funkcí u a v se nazývá taková funkce w, že $w(x) = u(x) + v(x)$ pro $x \in D_u \cap D_v$. Píšeme $w = u + v$, $w(x) = (u+v)(x)$ apod.
Podobně definujeme rozdíl, součin i podíl funkcí u a v, s tím, že definičním oborem podílu je množina $(D_u \cap D_v) \setminus \{x \in D_v \mid v(x) = 0\}$.

1.7 PŘÍKLAD Funkce (starší název: „celá část“, z angl. *entire* = celý) nazývaná charakteristika čísla $x \in \mathbf{R}$ se označuje ent x. Je to největší celé číslo nejvýše rovné x (tj. menší než x nebo rovné x), tj. platí pro něj:
ent $x \le x <$ ent $x + 1$ (ent x není tzv. „elementární funkce“). Pro charakteristiku ent x čísla x je tedy ent $x = k \in \mathbf{Z}$ (= množina celých čísel) a platí $k \le x < k+1$. Např. ent 5 = 5, ent 4,135 = 4, ent (–3,8425) = –4.



1.8 PŘÍKLAD Funkce signum x („znaménko“ x): sgn x (Anglosasové píší: sign x, opět to není tzv. „elementární funkce“) má graf



; platí $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Platí též např. $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

1.9 PŘÍKLAD [8.2] Modifikovaná Dirichletova funkce označená řeckým „chí“ **nemá** v souřadnicové rovině **znázornitelný graf** (není tzv. elementární funkcí, nemodifikovaná by místo –1 měla 0):

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ -1, & x \in \mathbf{I}, \end{cases}$$

kde **Q**, resp. **I** je množina všech racionálních, resp. iracionálních čísel (víme, že $\mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$);
funkce není integrovatelná (ve smyslu Riemanna), ale $\int_a^b |\chi(x)|\,\mathrm{d}x = b - a$ je konečný, tj. je integrovatelná (ve smyslu Riemanna) v absolutní hodnotě. [Je také integrovatelná v tzv. Lebesgueově smyslu a tento integrál je roven $(-1)\cdot(b-a) = a - b$. Podrobněji o tom až v článku **45.15** na str. 80]

1.10 ROZŠÍŘENÍ $\mathbf{R}^*$ MNOŽINY VŠECH REÁLNÝCH ČÍSEL R [1.2] Množina **R** všech reálných čísel s (binární) relací uspořádání < (resp. >) v ní definovanou je, jak víme, uspořádanou množinou. Tuto množinu si představujeme jako tzv. číselnou reálnou osu (přímku), o níž také říkáme, že je geometrickým modelem jednorozměrného reálného euklidovského (bodového) prostoru $\mathbf{E}_1$.
Rozšíření $\mathbf{R}^*$ množiny reálných čísel **R** o množinu obsahující prvky označené $+\infty$ a $-\infty$ a nazývané plus nekonečno a mínus nekonečno je množina definovaná sjednocením
$\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Prvky $+\infty$ a $-\infty$ této rozšířené množiny reálných čísel $\mathbf{R}^*$ budeme většinou nazývat nevlastní body (čísla, hodnoty), ostatní prvky (tj. čísla z **R**) vlastní body. Na množinu $\mathbf{R}^*$

přirozeným způsobem rozšíříme z **R** operace sčítání, odčítání, násobení a dělení pro $+\infty$ a $-\infty$ následujícími vztahy

a) $(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)$, $(-\infty)+(-\infty)=(-\infty)$, $(+\infty)-(-\infty)=(+\infty)$, $(-\infty)-(+\infty)=(-\infty)$,
$(+\infty)\cdot(+\infty)=(+\infty)$, $(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=(+\infty)$

b) pro $x \in \mathbf{R}$:
$x+(+\infty)=(+\infty)$, $x+(-\infty)=(-\infty)$, $x-(+\infty)=(-\infty)$, $x-(-\infty)=(+\infty)$,
$$x/(+\infty)=x/(-\infty)=0$$

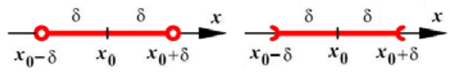
c) pro $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$:
$$x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=(+\infty),\ \text{když je}\ x>0\ \text{nebo}\ =-\infty,\ \text{když je}\ x<0,$$
$$x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=(+\infty),\ \text{když je}\ x<0\ \text{nebo}\ =-\infty,\ \text{když je}\ x>0,$$
$$(+\infty)/x=\operatorname{sgn}x\cdot(+\infty),\ (-\infty)/x=\operatorname{sgn}x\cdot(-\infty).$$

Nadále zůstávají nedefinovány (nemají smysl) operace: dělení nulou, $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$,
$$(-\infty)-(-\infty),\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad (\pm\infty)/(\pm\infty),\quad (\pm\infty)/(\mp\infty).$$

Na $\mathbf{R}^*$ lze z **R** rovněž rozšířit uspořádání $<$ tak, že pro libovolné $x \in \mathbf{R}$ definujeme:
$$-\infty < x < +\infty .$$

1.11 EXTRÉMY MNOŽIN V R Je-li M množina v **R**, pak maximum množiny M se nazývá číslo označené $\max M \in M$ takové, že $\forall x \in M:\ x \le \max M$. Analogicky minimum množiny M se nazývá číslo označené $\min M$ z M takové, že pro každé $x \in M$ platí $\min M \le x$.
(Např. neexistuje $\min(0,1]$, $\max(0,1]=1$);
Podstatným zobecněním předešlých dvou pojmů jsou dva následující pojmy:
Supremum množiny M reálných čísel se nazývá číslo $K \in \mathbf{R}^*$ takové, že
1) $\forall x \in M:\ x \le K$ (a říkáme, že číslo K je horní ohraničení, závora, mez, odhad) množiny M,
2) K je nejmenší ze všech čísel s vlastností 1). Supremum množiny M označujeme $\sup M$.
Analogicky definujeme infimum množiny M a označujeme je $\inf M$ jako největší ze všech čísel (dolních ohraničení) $k \in \mathbf{R}^*$ takových, že $\forall x \in M:\ k \le x$.
(Např. $\inf(0,1]=0$, $\sup(0,1]=\max(0,1]=1$)
Lze dokázat, že supremum množiny (resp. infimum) vždy existuje, zato však nemusí být prvkem té množiny. Existuje-li však např. $\max M$, pak $\sup M=\max M$. Dále je $\inf\emptyset=+\infty$, $\sup\emptyset=-\infty$.

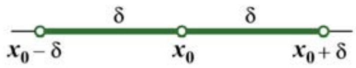
2 OKOLÍ BODU, NĚKTERÉ VLASTNOSTI FUNKCÍ, SLOŽENÁ FUNKCE



2.1 DEFINICE Okolím bodu $x_0 \in \mathbf{R}$, podrobněji δ-okolím bodu x_0, kde $\delta > 0$, rozumíme každý otevřený interval $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ a označujeme jej $O_\delta(x_0)$, popř. $O(x_0)$.

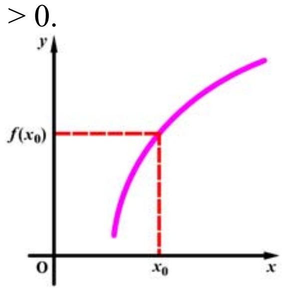
2.2 DEFINICE Levým (levostranným), resp. pravým (pravostranným) okolím bodu $x_0 \in \mathbf{R}$ rozumíme každý polouzavřený interval $(x_0-\delta,\ x_0] =: {}^{-}O(x_0)$, resp. $[x_0,\ x_0+\delta) =: {}^{+}O(x_0)$, kde $\delta > 0$ (Jde o jednostranná okolí bodu x_0).

Redukované či neúplné či ryzí okolí bodu x_0 je množina $O(x_0)\setminus\{x_0\} = (x_0-\delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0+\delta) =: O_\delta^*(x_0)$, tj. x_0 nepatří do redukovaného okolí ($x_0 \notin O_\delta^*(x_0)$).



Redukovaným levým okolím bodu x_0 je otevřený interval $(x_0-\delta,\ x_0) =: {}^{-}O_\delta^*(x_0)$. Podobně redukované pravé okolí bodu x_0 je interval $(x_0,\ x_0+\delta) =: {}^{+}O^*(x_0)$, kde $\delta > 0$.

Okolím $O(+\infty)$, resp. redukovaným okolím $O^*(+\infty)$ bodu $+\infty \in \mathbf{R}^*$, rozumíme libovolný interval, který je tvaru $(a, +\infty)$, kde $a \in \mathbf{R}$ (libovolné). Okolím $O(-\infty)$, resp. redukovaným okolím $O^*(-\infty)$ bodu $-\infty \in \mathbf{R}^*$, rozumíme libovolný interval, který je tvaru $(-\infty, b)$, kde $b \in \mathbf{R}$ (libovolné). Definujeme tedy $O(+\infty) \equiv O^*(+\infty) := (a, +\infty)$, $a < +\infty$



a podobně pro bod $-\infty$.

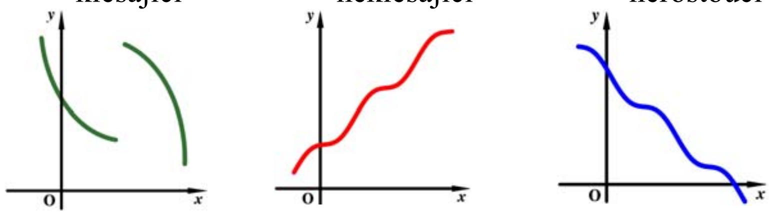
2.3 POZNÁMKA Platí $^{-}O^{*}(x_0) \cup {}^{+}O^{*}(x_0) = O^{*}(x_0) = O(x_0)\setminus\{x_0\}$ atd.

2.4 DEFINICE Funkce $f(x)$ se nazývá <u>rostoucí funkce v bodě</u> $x_0 \in D_f$, když existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 tak, že platí

$$\forall\, x\in O(x_0),\ \ x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0),$$
$$\forall\, x\in O(x_0),\ \ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x).$$

(Sami podle obrázků definujte funkci klesající atd.)

klesající neklesající nerostoucí



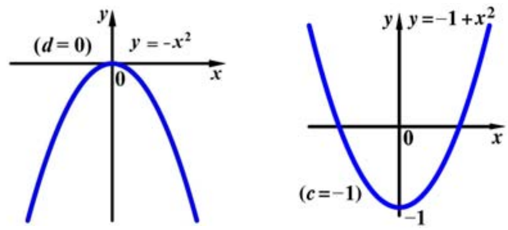
$x < x_0$: $f(x) > f(x_0)$ $f(x) \le f(x_0)$ $f(x) \ge f(x_0)$

<u>Klesající</u> a <u>rostoucí</u> funkce (v bodě x_0) se nazývají <u>ryze monotónně klesající</u>, resp. <u>ryze monotónně rostoucí</u>. Platí-li neostrá nerovnost, je to funkce <u>neryze</u> monotónně rostoucí, resp. klesající neboli také funkce <u>neklesající</u>, resp. funkce <u>nerostoucí</u>. Všechny zmíněné typy jsou funkce <u>monotónní</u>.

2.5 POZNÁMKA Např. funkce $f(x) = const.$ je zároveň neklesající i nerostoucí v kterémkoli bodě x_0. Dále říkáme, že funkce $f(x)$ je <u>nerostoucí na množině</u> $M \subseteq D_f$ (M může být též intervalem J), když pro každé dva body $x_1, x_2 \in M$ platí implikace $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.
(Ostatní 3 případy si promyslete sami)

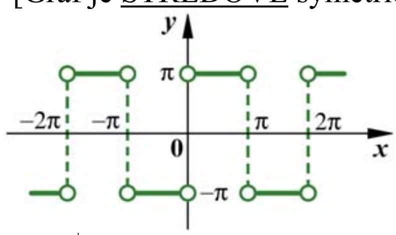
2.6 DEFINICE Funkce $f(x)$ se nazývá <u>shora ohraničená</u> $\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbf{R}$: $f(x) \le d\ \forall x \in D_f$ a číslo d nazveme <u>horní ohraničení funkce</u>, resp. se nazývá <u>zdola ohraničená</u> $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbf{R}$: $f(x) \ge c\ \forall x \in D_f$ a číslo c nazveme <u>dolní ohraničení funkce</u>. Funkce $f(x)$ se nazývá <u>ohraničená</u> (též *omezená*), je-li zároveň shora i zdola ohraničená (Funkce $f(x)$ je <u>ohraničená</u> $\Leftrightarrow$ existuje $k \in \mathbf{R}$: $\left| f(x) \right| \le k$).

2.7 PŘÍKLAD Pro každé x je $|\sin x| \le 1 = k$, tj. $\sin x$ je <u>ohraničená funkce</u> (shora i zdola).



2.8 DEFINICE Funkce f se nazývá <u>sudá</u>, když platí $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$. [Graf je <u>OSOVĚ</u> symetrický podle osy y]
Funkce f se nazývá <u>lichá</u>, když platí $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$. [Graf je <u>STŘEDOVĚ</u> symetrický podle počátku systému souřadnic]

2.9 PŘÍKLAD



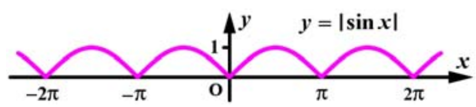
Funkce je <u>lichá</u> (a *po částech konstantní*).

2.10 DEFINICE Nechť $\mathbf{R}^+$ je množina všech kladných reálných čísel. <u>Funkce f je periodická</u>, když $\forall x \in D_f$ má vlastnosti:

1) D_f obsahuje též bod $x + p$, kde číslo $p \in \mathbf{R}^+$;
2) platí $f(x + p) = f(x)$.

Číslo p, resp. nejmenší takové číslo, se nazývá <u>perioda</u>, resp. <u>základní perioda</u> funkce f.

2.11 PŘÍKLAD Pro funkci $f(x) = |\sin x|$ je $p = \pi$ základní perioda. Ostatní periody jsou jejími násobky.



2.12 POZNÁMKA V pravoúhlém trojúhelníku názorně avšak numericky nepřesně zavedené goniometrické, tj. kruhové funkce, jsou k matematickým účelům předefinovány nekonečným polynomickým rozvojem (tzv. nekonečnou mocninnou funkční řadou) následovně

$$\sin x := \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

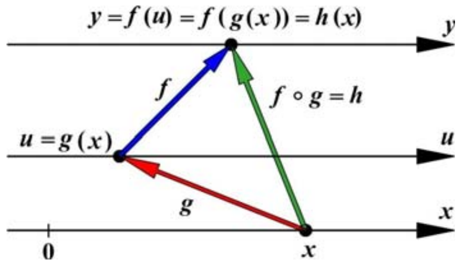
$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\tan x := x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot x := \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \ldots \qquad (0 < |x| < \pi).$$

Jak můžeme tyto a jiné důležité rozvoje získat, probereme v Taylorově větě **26.3** na straně 46.

2.13 DEFINICE <u>**složené funkce**</u> Nechť g je funkce, tzv. <u>vnitřní funkce</u> (<u>vnitřní složka</u>) definovaná na D_g a s oborem hodnot H_g. Nechť f je <u>vnější funkce</u> (složka) definovaná na D_f, a nechť platí $H_g \subseteq D_f$. Potom funkce h označovaná dvěma zápisy:



$$h = f \circ g \equiv f(g) = \{(x,\ y) \mid \overset{1}{\exists}\ u \in \mathbf{R},$$

pro nějž platí $(x, u) \in g \wedge (u, y) \in f\}$, se nazývá <u>funkce složená</u> (<u>kompozice</u>) z funkcí g, f.

Jsou-li funkce f, g dány analyticky (vzorci) $y = f(u)$, $u = g(x)$, píšeme $y = f(g(x))$ nebo $y = f \circ g(x)$ nebo jen $y = h(x)$. Přitom symbol $\circ$ značí operaci skládání funkcí v **zapsaném** pořadí, kdy nejprve zobrazuje g, a pak f.

2.14 PŘÍKLAD Rozepišme následující složenou funkci $y = \tan^2 \sqrt[3]{\sin x}$.

Nechť $g_1: \quad u_1 = \sin x$, $g_2: \quad u_2 = \sqrt[3]{u_1}$, $g_3: \quad u_3 = \tan u_2$, $f: \quad y = (u_3)^2$.

Pak $x \overset{g_1}{\mapsto} u_1$, $u_1 \overset{g_2}{\mapsto} u_2$, $u_2 \overset{g_3}{\mapsto} u_3$, $u_3 \overset{f}{\mapsto} y$.

Tedy $x \overset{h}{\mapsto} y$, přičemž $y = h(x) = f(\,g_3(\,g_2(\,g_1)))(x) = f \circ\ g_3 \circ g_2 \circ g_1(x)$.

2.15 DEFINICE Ať M je vlastní podmnožina definičního oboru D_f funkce f, tj. $M \subset D_f$ (přičemž $M \neq D_f$). Funkce definovaná jen na M, která každému $x \in M$ přiřadí tutéž hodnotu $f(x)$ jako funkce f, se nazývá **restrikce** nebo **zúžení funkce** f na množinu M a značíme ji $f|_M$. Označení oboru jejích hodnot je $H(f|_M)$ či jen $f(M)$.

2.16 PROSTÁ (INJEKTIVNÍ) FUNKCE f se nazývá každá funkce, která je **prostým zobrazením**, tj. kdy libovolným dvěma různým vzorům jsou přiřazeny dva různé obrazy neboli platí implikace $\forall x_1, x_2 \in D_f\!: \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$. Platí-li implikace jen na množině $M \subseteq D_f$, říkáme, že f je prostá funkce na množině M .

Tvrzení: Je-li funkce f ryze monotónní, je prostá. (Neplatí to obráceně, např. pro funkci $1/x$)

2.17 FUNKCE OBECNÁ MOCNINA neboli **MOCNINNÁ FUNKCE** je funkce $f(x) = x^r$, $r \in \mathbf{R}$. Její definiční obor i průběh závisí na čísle r. Pro r <u>celé kladné</u> je $D_f = \mathbf{R}$.

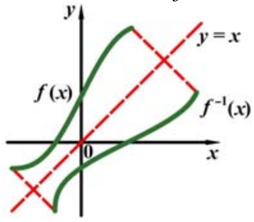
Pro r <u>celé záporné</u> je $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Není-li r celé číslo, uvádí se obvykle, že $D_f = (0, +\infty)$, neboť pro <u>necelá</u> r lze x^r definovat rovností $\underline{\underline{x^r = \mathrm{e}^{\ln x^r} = \mathrm{e}^{r \ln x}}}$, kde funkce logaritmus je definována jen pro $x > 0$. Přitom ale pro některá necelá r můžeme definici funkce x^r **rozšířit** následovně: Pro $r > 0$ položíme $0^r = 0$, takže definičním oborem x^r je pak interval $[0, +\infty)$.

Pro racionální r, které lze zapsat ve tvaru $r = p/q$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla a číslo q je liché, lze x^r definovat i pro $x<0$; tj. např. pro $r=\frac{1}{3}$ a $x=-27$ je pak

$$(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3 .$$

3 INVERZNÍ FUNKCE

3.1 DEFINICE Nechť $y=f(x)$ je *prostá* funkce s definičním oborem D_f a oborem hodnot H_f (tj. $H_f=f(D_f)$. Pak funkce $f^{-1}(y) = \{(y,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid (x,y)\in f\}$, která každému číslu $y\in H_f$ přiřazuje právě to číslo $x\in D_f$, pro něž $f(x)=y$, se nazývá inverzní funkce k funkci f. Píšeme $x=f^{-1}(y)$ [a čteme: f *inverzní* (*popř.* f *mínus* 1) *ypsilon*].



3.2 POZNÁMKA Jsou tedy funkce f, f^{-1} **vzájemně inverzní**. Je třeba si uvědomit, že při zakreslování grafu inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$ (k dané funkci $y=f(x)$) hodnoty argumentu y vynáším tradičně na osu Ox a hodnoty nové závisle proměnné x pochopitelně na osu Oy, takže x a y si vymění při tomto zakreslování grafu svůj původní význam ze zobrazování. Graf takto zakreslené a označené inverzní funkce $y=f^{-1}(x)$ (vzniklý ze zobrazení původní inverzní funkce $x=f^{-1}(y)$) je vždy osově symetrický podle symetrály 1. a 3. kvadrantu o rovnici $y=x$ s grafem původní funkce $y=f(x)$.

3.3 POZNÁMKA Je tedy zřejmé, že nechceme-li úvahy o inverzní funkci $f^{-1}(x)$ komplikovat, např. ve vzorci o derivaci inverzní funkce $f^{-1}(x)$, a nechceme zaměňovat $x \leftrightarrow y$, pak jako výchozí závislost vezmeme vždy funkci $x=f(y)$, takže $y=f^{-1}(x)$.

3.4 VĚTA o existenci inverzní funkce Je-li funkce f klesající (rostoucí) [tj. je ryze monotónní] na M, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1} na $f(M)$ a je klesající (rostoucí). Platí vzorce

a) $\forall x\in f(M)$: $f(f^{-1}(x)) = x = f\circ f^{-1}(x)$, přičemž $\circ$ je symbol operace **skládání zobrazení**.

b) $\forall x\in M$: $f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1}\circ f(x)$.

3.5 PŘÍKLAD Podle části b) předešlé věty, vyjadřující na příslušné množině ekvivalenci složení dvou zobrazení s identickým zobrazením, přejděme od funkce $\sin x$, a v dalším příkladu pak od funkce e^x, k funkci inverzní:

$y=f(x)=\sin x,\quad x\in[-\pi/2,\pi/2]$ | arcsin ( )

$\arcsin y = \arcsin(\sin x) = x$ (Podle části b) předešlé věty).

$\arcsin y = f^{-1}(y) = x$
$\arcsin x = f^{-1}(x) = y$
Nyní vyměníme $x\leftrightarrow y$: neboli pro zakreslení grafu inverzní funkce $f^{-1}(x)$ dostaneme $y=\arcsin x = f^{-1}(x)$.

3.6 PŘÍKLAD $y=e^x=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ | ln ( )

$\ln y = x\ln e = x$

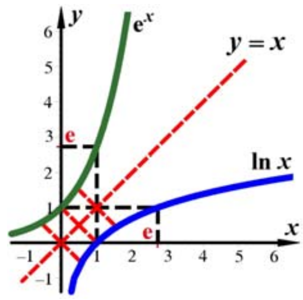
$x=\ln y$, výměnou $x\leftrightarrow y$ pro zakreslení pak dostáváme

$y=\ln x = f^{-1}(x)$.

Tedy funkce exponenciální a logaritmická jsou (navzájem) inverzní funkce.

3.7 PŘÍKLAD – CVIČENÍ [28.7] *Nečtěte hned text ve zdvojených složených závorkách* {{…}}, *v nichž je odpověď na následující úlohu, a na které si brzy zvyknete, neboť budou rovněž používány pro oddělování výsledků k příkladům z kapitol pro samostatná cvičení.* Tedy zkuste si promyslet, zda podle věty o existenci inverzní funkce existuje inverzní funkce f^{-1} k funkci $f(x)=e^{-x}-x$. Načrtněte $f(x)$. Lze f^{-1} vyjádřit funkčním předpisem? {{ f^{-1} existuje na $\mathbf{R}$, neboť f je na $\mathbf{R}$

klesající, tj. i prostá; nelze f^{-1} explicitně vyjádřit, neboť z rovnice $y = \mathrm{e}^{-x} - x$ nelze vyjádřit x }}



3.8 POZNÁMKA V matematické analýze je exponenciální funkce, někdy zapsaná exp(x), definována tzv. nekonečnou (mocninnou funkční) řadou $\mathrm{e}^x := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}$.

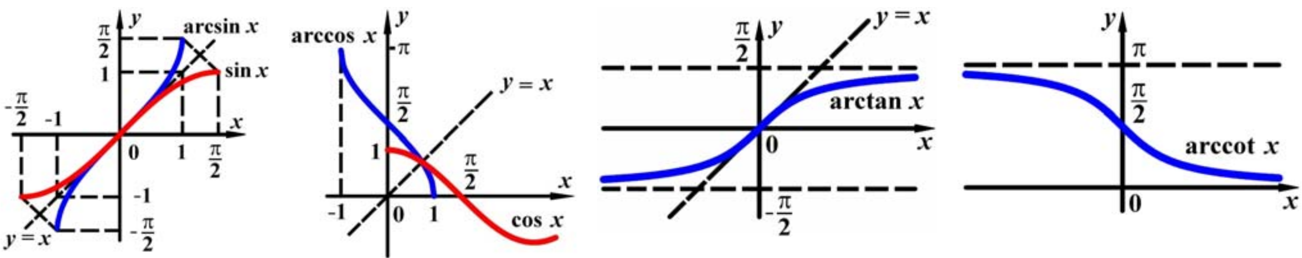
Odtud dosazením $x = 1$ lze Eulerovo číslo e efektivně vyčíslit např. na PC konečně mnoha členy z číselné řady

$$\mathrm{e} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Eulerovo číslo e lze rovněž vyjádřit limitou $\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.

4 CYKLOMETRICKÉ FUNKCE

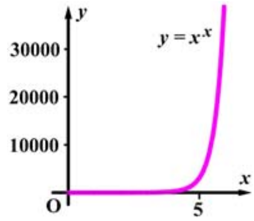
4.1 POZNÁMKA Goniometrické funkce po řadě $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ nejsou (na svých definičních oborech) prosté funkce, tj. neplatí $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ neboli dva různé vzory nemusí mít různé obrazy. Proto je třeba se omezit při definování funkcí k nim inverzních po řadě $\arcsin x$ (čti: „arkussinus" atd.), $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, což jsou podle ČSN-ISO 31-11 tzv. cyklometrické funkce nebo též inverzní kruhové funkce, jen na takový interval, na němž je výchozí goniometrická funkce prostá a zároveň není daleko od počátku. Cyklometrická funkce je tedy vždy inverzní funkce pouze k restrikci – zúžení výchozí goniometrické funkce. Např. restrikce funkce sinus na interval $[-\pi/2, \pi/2]$ už je prostou funkcí. Definičním oborem funkce arkussinus je interval $[-1, 1]$ a oborem hodnot interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Tedy $\forall x \in [-1, 1]: y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$. Zapamatujme si grafy cyklometrických funkcí!



Z funkce $\sin x$ se vezme část, kde je PROSTÁ (prosté zobr.), tj. INJEKCÍ.

5 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

5.1 ELEMENTÁRNÍ FUNKCE [1.4] Mezi funkce označované historickým názvem **elementární funkce** – **elementární transcendenty** patří *konstantní* funkce, funkce *obecná mocnina* ($y = x^r$, kde $r \in \mathbf{R}$), e^x, $\ln x$, *goniometrické* funkce, *cyklometrické* funkce, *hyperbolické* funkce, *hyperbolometrické* funkce a všechny funkce, které lze z uvedených vytvořit konečným počtem *aritmetických operací* (tj. sčítáním, odčítáním, násobením, dělením funkcí), a dále *operací* (přípustného) *skládání* těchto funkcí, tj. patří sem např. **polynomy**.



5.2 PŘÍKLAD Je zobrazen graf funkce $f(x) = x^x$, $D_f = \mathbf{R}^+$. Jde o elementární funkci?

6 ✦ *CVIČENÍ* A ✦

■ Určete definiční obor D a obor H hodnot funkcí

$\boxed{1}$ [8] $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ {{ $D_f = H_f = \mathbf{R}$ }}

2 $g(x)=\sqrt{2x-3}$ $\{\{\ D_g=[3/2,+\infty),\ H_g=[0,+\infty)=\mathbf{R}^+\ \}\}$

3 $y=\arcsin(x/5)$ $\{\{\ D_y=[-5,5],\ H_y=[-\pi/2,\pi/2]\ \}\}$

4 [8] $\varphi(t)=\sqrt{t-2}+\sqrt{1-t}$. $\{\{\ D_\varphi=H_\varphi=\emptyset\}\}$

■ Zjistěte, zda je funkce f na množině M ohraničená **a)** shora, **b)** zdola, **c)** ohraničená a najděte zde její supremum, infimum, a existují-li, též její maximum i minimum, jestliže

5 $f(x)=\sin x-1$, $M=D_f$ {{ **a)** ano $f(x)\le 0$, **b)** ano $-2\le f(x)$, **c)** ano $|f(x)|\le 2$, $\sup f=\max f=0$, $\inf f=\min f=-2$ }}

6 $f(x)=3x^2-6x+5$, $M=(0,3]$ {{ **a)** ano $f(x)\le 14$, **b)** ano $2\le f(x)$, **c)** ano $2\le f(x)\le 14$, $\sup f(M)=\max f(M)=14$, $\inf f(M)=\min f(M)=2$ }}

7 $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x^2+1}$, $M=(-\infty,\infty)$. {{ $M\in D_f$ **a)** ano $f(x)<3$, **b)** ano $2\le f(x)$ **c)** ano $2\le f(x)<3$, $\sup f(M)=3$, neexistuje $\max f(M)$, $\inf f(M)=\min f(M)=2$ }}

8 Stanovte v příkladech **1** až **4** supremum a infimum množiny D a H, popř. existují-li, také její maximum a minimum. {{ otazníky ??? značí, že výsledek neuvádíme}}

■ Na množině $\mathbf{N}^*=\mathbf{N}\setminus\{0\}$ všech kladných celých čísel n, kde $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ je množina všech přirozených čísel, je dána funkce $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{R}$ nazývaná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel $a_n=f(n)$ předpisem

9 [10] $a_n=(-1)^n\cdot n$

10 [10] $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\arctan n$.

Načrtněte si graf posloupnosti a_n jakožto množiny izolovaných bodů a pak najděte supremum $\sup a_n$ a infimum $\inf a_n$ obou posloupností. {{ **9** $\sup a_n=+\infty$, $\inf a_n=-\infty$; **10** $\sup a_n=\pi/2$, $\inf a_n=-\pi/2$ }}

■ Zvolte graf nekonstantní funkce $y=f(x)$. Pro celočíselné konstanty, např. $k=\pm 1$, $l=\mp 1$ a $m,n\in\left\{\pm\frac{1}{2},\pm 2\right\}$ pak nakreslete a geometrickou terminologií charakterizujte grafy funkcí

11	$y=f(x)+k$	**12**	$y=f(x+l)$	**13**	$y=f(x+l)+k$
14	$y=-f(x)$	**15**	$y=m\cdot f(x)$	**16**	$y=f(-x)$
17	$y=f(n\cdot x)$	**18**	$y=m\cdot f(n\cdot x+l)+k$	**19**	$y=\lvert f(x)\rvert$
20	$y=f(\lvert x\rvert)$	**21**	$y=f^{-1}(x)$, tam kde inverzní funkce f^{-1} existuje.		

■ Určete hodnoty cyklometrických (neboli inverzních kruhových) funkcí

22	$\arcsin(1/\sqrt{2})$	{{ $\pi/4$ }}	**23**	$\arcsin\ 0{,}5$	{{ $\pi/6$ }}	**24**	$\arccos(-1)$	{{ π }}
25	$\arccos\ 0$	{{ $\pi/2$ }}	**26**	$\arctan\ 1$	{{ $\pi/4$ }}	**27**	$\arctan(-\sqrt{3})$	{{ $-\pi/3$ }}
28	$\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$	{{ $\pi/6$ }}	**29**	$\operatorname{arccot}(1/\sqrt{3})$.	{{ $\pi/3$ }}			

■ Které z následujících funkcí jsou sudé, liché, popř. u nich není předešlá parita? Přitom

$\boxed{\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}}$, resp. $\boxed{\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}$ jsou funkce **hyperbolický sinus**, resp. **hyperbolický kosinus**, první dvě ze čtyř tzv. **hyperbolických funkcí**. Jsou dány funkce

30	$y=\sinh x$	{{ lichá }}	**31**	$y=\cosh x$	{{ sudá }}	**32**	$y=\sqrt{x^2}+\sin x^2$	{{ sudá }}
33	$y=\sin x+\cos x$	{{ není }}	**34**	$y=\dfrac{x^2+3}{\tan x}$	{{ lichá }}	**35**	$y=-\sqrt{x}$	{{ není }}
36	$y=\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$	{{ sudá }}	**37**	$y=x^5-x\ e^{-x^2}$.	{{ lichá }}			

■ Stanovte základní periodu p v případě, že následující funkce je periodická.

38 $y=3$ {{ je periodická, ale p neexistuje , neboť základní perioda $p>0$ může být totiž libovolná }}

39 $y = \sin^2 x$ {{ $p = \pi$ }}

40 $y = \cos^2 x$ {{ $p = \pi$ }}

41 $y = |\sin(x-2)|$ {{ $p = \pi$ }}

42 $y = |x^2 - 1|$ {{ není }}

43 $y = \tan(\arctan x)$ {{ není }}

44 $y = \arctan(\tan x)$. {{ $p = \pi$ }}

45 Nakreslete grafy funkcí z předešlého příkladu.

■ Bez určení definičního oboru zapište složenou funkci $y = f(g(x))$ podle vzoru $y = f(u)$, $u = g(x)$, je-li

46 $y = \sqrt{2 + \sin x}$ {{ $y = \sqrt{u}$, $u = 2 + \sin x$ }}

47 $y = e^{\cos(3x+\pi)}$. {{ $y = e^u$, $u = \cos(3x+\pi)$ }}

■ Jsou dány funkce f_1 a f_2. Sestavte složené funkce $h_1 = f_1 \circ f_2$ a $h_2 = f_2 \circ f_1$ pro funkce

48 $f_1(x) = x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = 5x - 2$ {{ $h_1(x) = (5x-2)^2 + 3(5x-2) + 1$, $h_2(x) = 5(x^2 + 3x + 1) - 2$ }}

49 $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \ln x$ {{ $h_1(x) = x$ pro $x \in \mathbf{R}^+$, $h_2(x) = x$ }}

50 $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = e^{4x}$ {{ $h_1(x) = 4x$, $h_2(x) = x^4$ pro $x > 0$ }}

51 $f_1(x) = \tan x$, $f_2(x) = \arctan x$. {{ $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x + k\pi$ za předpokladu, že $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, $k \in \mathbf{Z}$ }}

■ Zjistěte, zda je funkce f prostá a v kladném případě k ní najděte inverzní funkci f^{-1}

52 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$ {{ano, neboť rovnost $f(x_1) = f(x_2)$ dá $x_1^3 = x_2^3$, což platí, jen když $x_1 = x_2$;

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$, pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ }}

53 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ {{ne, neboť rovnost $f(x_1) = f(x_2)$ dá $(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 4) = 0$, čemuž vyhovuje nejen

$x_1 = x_2$, ale i $x_1 = 4/x_2$ }}

54 $f(x) = 10^{\frac{x}{x+1}}$. {{???}}

■ Úloha z technické praxe vedla na jistou diferenciální rovnici, jejíž řešení nebylo nalezeno v explicitním tvaru $y = f(x)$, ale bylo u něj x, resp. y určeno každé zvlášť funkcí $\varphi(t)$, resp. $\psi(t)$ závislou na parametru t z množiny M, tj. platilo $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in M$. Najděte závislost $y = f(x)$ tak, že určíte $t = \varphi^{-1}(x)$ pomocí inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$ (existuje-li), tj. bude $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, jsou-li dány

55 $x = 3t$, $y = \sin t$, $t \in M = \mathbf{R}$ {{ $\varphi(t) = 3t$ je ryze monotónní (rostoucí) $\Rightarrow$ prostá (obrácená implikace nemusí platit, což je zřejmé např. z grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$) v $\mathbf{R} \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \sin\dfrac{x}{3}$, $x \in \mathbf{R}$ }}

56 $x = t^2$, $y = 2t + 1$, $t \in M = [0, +\infty)$ {{ $\varphi(t) = t^2$ je rostoucí $\Rightarrow$ prostá v M (nikoli všude v **R**) $\Rightarrow$ $|t| = t = \sqrt{x} = \varphi^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$, $x \in M$ a jejím grafem je horní větev „ležaté" paraboly $x = \dfrac{1}{4}(y-1)^2$ otevřené ve směru osy x }}

57 $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in M = [0, \pi/2]$ {{ $\varphi(t) = \sin t$ je ryze monotónní $\Rightarrow$ prostá na M $\Rightarrow$ $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ $\Rightarrow$ $f(x) = \cos(\arcsin x)$ a grafem funkce $y = f(x)$ je čtvrtkružnice $x^2 + y^2 = 1$ v 1. kvadrantu modelovaná při rostoucím t (popř. x) pohybem ve smyslu otáčení hodinových ručiček }}

58 $x = e^t + t$, $y = t$, $t \in \mathbf{R}$. {{zde nelze z 1. rovnice vyjádřit t neboli ani $\varphi^{-1}(x)$, ačkoli teorie její existenci garantuje (PROČ garantuje?). Zde je výhodnější pracovat se závislostí $x = g(y) = e^y + y$, $y \in \mathbf{R}$ }}

■ Najděte maximální intervaly, na nichž je daná funkce f ryze monotónní a určete k ní na oněch intervalech inverzní funkci $f^{-1}(x)$, vč. jejího definičního oboru $D_{f^{-1}}$, je-li

59 $f(x) = \ln(2x+5)$ {{ $(-5/2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = (e^x - 5)/2$, $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ }}

60 $f(x) = 3^{2 + \ln\sqrt{x-2}}$ {{ $(2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \exp(2\log_3 x - 4) + 2$, $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}^+$ }}

61 $f(x) = x^4$ {{ **a)** $(-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$; **b)** $[0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$ }}

62 $f(x) = \arcsin\dfrac{3}{x}$. $\left\{\!\left\{ (-\infty,-3]\cup[3,+\infty),\ f^{-1}(x)=\dfrac{3}{\sin x},\ D_{f^{-1}} = (-\pi/2,\ 0) \cup (0,\ \pi/2) \right\}\!\right\}$

■ Určete a zapište definiční obory následujících funkcí, nejlépe bez použití rozdílu množin.

63 $y=\dfrac{\exp(1/x)}{x^3+27}$ $\left\{\!\left\{ (-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,+\infty) \right\}\!\right\}$

64 $y=\sqrt{0{,}5^x-4}$ $\left\{\!\left\{ (-\infty,-2] \right\}\!\right\}$

65 $y=\dfrac{\ln|x-3|}{\sqrt{x^3-8}}$ $\left\{\!\left\{ (2,3)\cup(3,+\infty) \right\}\!\right\}$

66 $y=\ln\left(e^{-x}-1\right)$ $\left\{\!\left\{ (-\infty,0)=\mathbf{R}^- \right\}\!\right\}$

67 $y=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}$ $\left\{\!\left\{ (1,e)\cup(e,+\infty) \right\}\!\right\}$

68 $y=\dfrac{\sin x}{\ln|\ln|x||}$ $\{\!\{$ nápověda: z $\mathbf{R}$ je nutné vynechat 7 bodů $\}\!\}$

69 $y=\sqrt{2x^2+x-3}$ $\left\{\!\left\{ (-\infty,-3/2]\cup[1,+\infty) \right\}\!\right\}$

70 $y=\sqrt[4]{6x-x^2}+\sqrt[6]{\cos x}$ $\left\{\!\left\{ [0,\pi/2]\cup[3\pi/2,6] \right\}\!\right\}$

71 $y=\ln\left|3\sin x+2\cos^2 x\right|$ $\left\{\!\left\{ \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{7\pi/6+2k\pi,11\pi/6+2k\pi\} = (-\pi/6+2k\pi,7\pi/6+2k\pi)\cup \right.\right.$

$\left.\left. (7\pi/6+2k\pi,11\pi/6+2k\pi)\ ,\ k\in\mathbf{Z} \right\}\!\right\}$

72 $y=\dfrac{\arccos(9-x)}{(1-\log x)\left(5^{-x}-1\right)}$ $\left\{\!\left\{ [8,10) \right\}\!\right\}$

73 $y=\dfrac{\operatorname{arccot} x}{\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\pi/4-\arctan(2x/\pi)\right)}$ $\left\{\!\left\{ (-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\pi/2)\cup(\pi/2,+\infty) \right\}\!\right\}$

74 $y=\dfrac{\arcsin(x+1)}{\sqrt{2x+3}+x}$. $\left\{\!\left\{ [-3/2,-1)\cup(-1,0] \right\}\!\right\}$

■ Nakreslete grafy funkcí, které jsou s výjimkou jednoho příkladu částí kuželoseček známých ze střední školy.

75 $y=x^3-6x^2+12x-7$ $\{\!\{$ kubická parabola $y=(x-2)^3+1$, kde $\mathsf{I}=(2,1)$ je tzv. „inflexní bod“ $\}\!\}$

76 $y=-\dfrac{1}{3}\sqrt{14-9x^2}$ $\{\!\{$ dolní polokružnice, $\mathsf{S}=(0,0)$, $r=14/9$ $\}\!\}$

77 $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{-x^2+2x+15}-3$ $\{\!\{$ horní poloelipsa, $\mathsf{S}=(1,-3)$, $a=4$, $b=3$ $\}\!\}$

78 $y=\sqrt{x^2-4}$ $\{\!\{$ horní poloviny levé i pravé větve rovnoosé hyperboly, $\mathsf{S}=(0,0)$, $a=b=2$ $\}\!\}$

79 $y=\sqrt{-x^2}$ $\{\!\{$ graf je jen jednobodová množina,

$G(f)=\{\ (x,y)\in\mathbf{E_2}\ |\ (x,y)=(0,0)\ \}=\mathsf{O}$ $\}\!\}$

80 $y=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$. $\{\!\{$ graf je sjednocením tří částí ze dvou rovnoosých hyperbol $\}\!\}$

7 LIMITA FUNKCE VČETNĚ HEINEHO DEFINICE POMOCÍ LIMITY POSLOUPNOSTI ČÍSEL

Limitní přechod už používali ve starověku - **EUKLIDES** z Alexandrie (± 365 - ± 300 př. n. l.) a zvláště **ARCHIMEDES** ze Syrakus (±287 - 212 př. n. l.).
Ústřední pojem matematické analýzy zavedl v 17. století Angličan **John Wallis** (1616 - 1703) a do matematiky jej důsledně rozšířili náš největší matematik **Bernard Bolzano** (1781 - 1848), Francouz **Augustin Luis Cauchy** (1789 - 1857) a Němec **Karl Weierstrass** (1815 - 1897).
Víme, že

$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \ldots$ je rozšíření množiny reálných čísel o nevlastní (též: nekonečné) hodnoty $+\infty$ a $-\infty$,

$\mathbf{E}_1^* = \mathbf{E}_1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} \ldots$ je rozšíření reálné osy (jednorozměrného euklidovského prostoru) o dva nevlastní body $+\infty$ a $-\infty$.

Práce v euklidovských prostorech umožní používat názornější geometrické pojmy.

7.1 DEFINICE Nechť f je funkce, mějme bod (číslo) $x_0 \in \mathbf{E}_1^*$ $(\mathbf{R}^*)$ a bod (číslo) $l \in \mathbf{E}_1^*$ $(\mathbf{R}^*)$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnu l a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, právě když ke každému okolí $O(l)$ bodu (čísla) l existuje redukované okolí $O^*(x_0)$ takové, že pro každé $x \in O^*(x_0)$ platí

$$f(x) \in O(l).$$

Bod x_0 se nazývá limitní bod.
Následují definice několika dalších případů limity funkce.

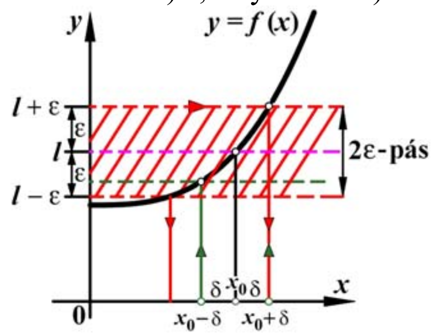
1. Vlastní limita ve vlastním bodě (Použijeme Cauchyho (-Weierstrassovu) ε, δ symboliku)**:**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$$

$$\forall\, x\colon\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

Tzv. 2ε-pás (pruh) obsahuje všechny funkční hodnoty bodů z vhodného (pokud existuje) redukovaného okolí $O^*(x_0)$.

Vůbec nemusí $x_0 \in D_f$!!



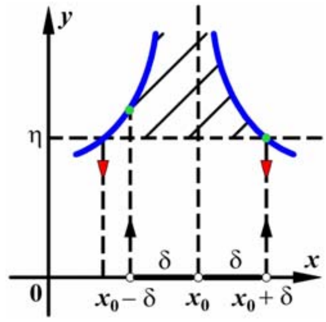
(Zvolíme vhodné δ > 0, existuje-li).

2. Nevlastní limita $l = +\infty$ ve vlastním bodě x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \eta \in \mathbf{R}\ \exists\, \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \text{ platí:}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > \eta.$$

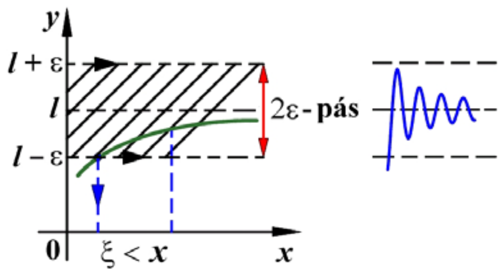
Tedy ať zvolíme jakkoli velké číslo η (např. 10^{20}), vždy lze najít takové redukované okolí $O_\delta^*(x_0)$, že jsou v něm všechny funkční hodnoty větší než zvolené η (říkáme, že jde o hodnoty shora neohraničené).

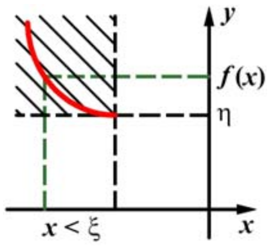


3. Vlastní limita l v nevlastním bodě $x_0 = +\infty$:
$(x_0 = -\infty)$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \text{ číslo } \xi \in \mathbf{R} \text{ tak, že}$$

$$\forall\, x \text{ platí: } \ x > \xi \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$





4. Nevlastní limita v nevlastním bodě:
Např. limitu $l = +\infty$ v bodě $x_0 = -\infty$ definujeme:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \eta\ \exists\ \xi$ tak, že pro všechna x platí

$$x < \xi \Rightarrow f(x) > \eta.$$

(Podobně pro zbývající situace $l = (+)\,(-)\,(-)\,\infty$ v bodě $x_0 = (+)\,(+)\,(-)\,\infty$)

7.2 POZNÁMKA Existence limity ani její hodnota l nezávisí na funkční hodnotě $f(x_0)$ ani na tom, zda je v bodě x_0 funkce f vůbec definována. Existuje-li však limita funkce v bodě x_0, potom je funkce f definována v nějakém okolí $O^*(x_0) = O(x_0)\setminus\{x_0\}$.

7.3 VĚTA (o nejvýše jedné limitě a ohraničenosti funkce v okolí vlastní limity)

1) Libovolná funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu. (Tedy ji má jednu či žádnou)

2) Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu (tj. konečnou), pak existuje redukované okolí $O^*(x_0)$, v němž je funkce ohraničená (tj. v němž $\exists\ k > 0$, že $|f(x)| \le k$).

7.4 VĚTA o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi Nechť bod $x_0 \in \mathbf{E}_1^*$, a nechť existuje $O^*(x_0)$, v němž pro všechna x platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, pak platí

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l\,.$$

7.5 DEFINICE [8.1] **Heineho**[1)] **definice limity funkce pomocí limity posloupnosti čísel** [37] Nechť funkce $f(x)$ je definována v redukovaném okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0 (tj. nemusí být v x_0 definována). Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 (vlastní) limitu l, právě když pro **každou** číselnou posloupnost $\{x_n\}$, $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$, která konverguje [2)] k číslu x_0 (píšeme $x_n \to x_0$), přičemž je $x_n \ne x_0$, konverguje příslušná posloupnost funkčních hodnot $\{f(x_n)\}$ k číslu l. Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Přitom předpokládáme, že všechna $x \in \mathbf{R}$, tj. též $x_n \in \mathbf{R}$. (Definici lze zobecnit i pro $x_0, l \in \mathbf{R}^*$)

[Stručně: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \{x_n\}_{n=1}^{+\infty})\ (\forall n)\ (x_n \ne x_0)\ \ (x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l\ )$]

[1)] Heinrich E. Heine (1821 - 1881), německý matematik

[2)] **Definice limity konvergentní posloupnosti** Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ reálných čísel x_n konverguje k číslu $x_0 \in \mathbf{R}$ nebo též, že číslo $x_0 \in \mathbf{R}$ je vlastní neboli konečná limita posloupnosti $\{x_n\}$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}^*$, že pro všechna $n \ge n_0$ (neboli pro skoro všechny indexy, přičemž index n_0 závisí na ε, tj. $n_0 = n_0(\varepsilon)$) platí

$$|x_n - x_0| < \varepsilon\,.$$

Píšeme pak $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ nebo jen $x_n \to x_0$. Definice pomocí logických symbolů je následující:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbf{N}^*\ \ \forall\, n \ge n_0 :\ |x_n - x_0| < \varepsilon\,.$$

Jestliže takové číslo x_0 s uvedenými vlastnostmi neexistuje (vč. případu, kdy x_0 je nevlastní), říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ diverguje pro $n \to +\infty$ (tj. pro n jdoucí do $+\infty$).

Nevadí, nepochopíte-li hned definici limity číselné posloupnosti a zvl. její symbolický zápis výrokem. Matematika, bohužel, neumí jednodušeji formulovat pojem „*blížit se*“, jenž je u limity z názoru zřejmý, že totiž limita x_0 posloupnosti $\{x_n\}$ je číslo, k němuž se $\{x_n\}$ „blíží“ , jestliže se indexy n „blíží“ k plus nekonečnu (neboli jestliže „ n jde do $+\infty$ “).

Symbol ∞ zavedl r. 1655 anglický matematik John Wallis (1616 – 1703). Zavedl rovněž pojem limita. Je s podivem, že tento pojem nevyužil ani Newton ani Leibniz. Učinil tak až náš Bernard Bolzano aj.

8 ŠEST DŮLEŽITÝCH PŘÍKLADŮ LIMIT, DALŠÍ VLASTNOSTI LIMITY

8.1 PŘÍKLAD Ukážeme, že neexistují obě limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$.

Dokážeme (***nepřímo***, tj. z logiky se použije *zákon o kontrapozici*: $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \text{non}\ q \Rightarrow \text{non}\ p$), že např. v bodě $+\infty$ nemá funkce $f(x) = \sin x$ limitu. Předpokládáme-li totiž, že ji má, a označíme-li si ji l, musela by podle Heineho pojetí limity (viz 7.5) pro **každou** posloupnost

$\{x_n\}$ v **R** platit implikace $x_n \to +\infty \Rightarrow \sin x_n \to l$. Tj. např. i pro takovou posloupnost, pro jejíž n-tý člen je $x_n = \pi/2 + n\pi$. Odpovídající posloupnost $\{x_n\}$ pak sice má nevlastní limitu rovnu $+\infty$, avšak příslušná posloupnost $\{\sin x_n\}$ funkčních hodnot, tedy posloupnost $\{(-1)^n\}_1^{+\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ **limitu nemá** (neboli *diverguje*, zde jde o tzv. *oscilující* posloupnost), a to je ***spor*** s naším (nesprávným) předpokladem.

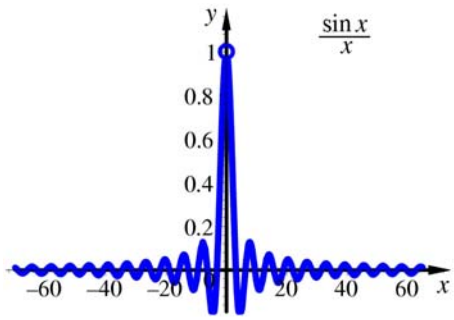
8.2 PŘÍKLAD Modifikovaná Dirichletova funkce $\chi(x)$ z příkladu 1.9 nemá v žádném bodě limitu.

8.3 PŘÍKLAD $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sin x = 0$. Platí totiž pro každé $x \neq 0$:

$0 \le \left|\frac{1}{x}\sin x\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$ (neboť $|\sin x| \le 1$), a dále

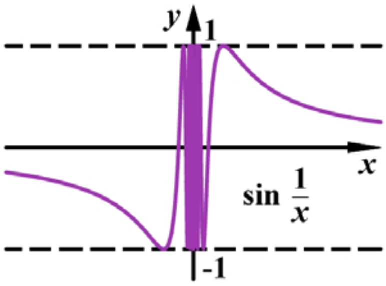
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,

takže podle předešlé věty o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi platí uvedené tvrzení, tj. $\left(\frac{1}{x}\sin x\right) \to 0$ pro $x \to \pm\infty$.



[Ze střední školy je známo, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$]

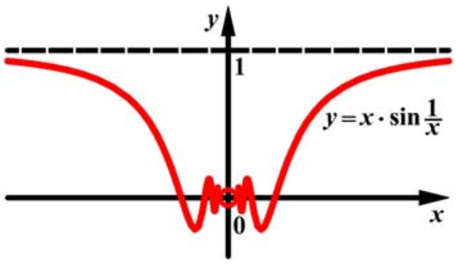
8.4 PŘÍKLAD[20] $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje. Graf příslušné funkce [je tzv. souvislý, i když funkce je tzv. nespojitá v 0] se v okolí počátku rozkmitá. Lze totiž dokázat, že v každém okolí počátku $x = 0$ nabývá tato funkce jak hodnot $+1$, tak hodnot -1.

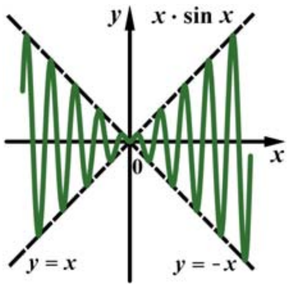


Lze ukázat, že

8.5 PŘÍKLAD $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$,

8.6 PŘÍKLAD neexistují obě limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\cdot\sin x$.





8.7 VĚTA o aritmetických operacích s limitami funkcí[8.13] Nechť f, g jsou (reálné) funkce a existují limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbf{R}$. Pak platí

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l_1|$, $\lim\limits_{x\to x_0} [\alpha\cdot f(x)] = \alpha\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha\cdot l_1$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) \underset{\bullet}{\pm} g(x)\right] = l_1 \underset{\bullet}{\pm} l_2$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$, je-li $l_2 \neq 0$, přičemž tato tvrzení platí též pro nevlastní limity, mají-li pravé strany rovností v $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ smysl (tj. pravé strany rovností nevedou k tzv. „neurčitým výrazům" typu $\infty - \infty$, $0\cdot\infty$ atd.).

8.8 VĚTA[8.13] **(o limitě absolutní hodnoty reciproké (tj. „převrácené") funkce)** Nechť platí, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, a nechť existuje redukované okolí $O^*(x_0)$, v němž $f(x) \neq 0$.

Pak platí rovnost $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$. [Zapišme ji jako mnemotechniku

pro užití v příkladech takto: $\underline{\underline{\dfrac{1}{(0+)} = +\infty}}$]

8.9 DEFINICE Nechť $f(x)$ je funkce a x_0 je vlastní číslo. Řekneme, že $f(x)$ má <u>limitu zleva</u> (zprava) v bodě x_0 rovnu l, $l \in \mathbf{R}^*$, a píšeme $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = l$ ($\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = l$), jestliže pro každé okolí $O(l)$ čísla l (bodu l) existuje levé (pravé) redukované okolí $(x_0 - \delta, x_0) =: {}^-O^*(x_0)$ $({}^+O^*(x_0))$ tak, že pro všechna $x \in {}^-O^*(x_0)$ $({}^+O^*(x_0))$ platí $f(x) \in O(l)$.

8.10 POZNÁMKA

a) <u>Jednostranné</u> limity jsou, jak plyne z definice, určeny pouze <u>ve vlastních</u> bodech z **R**.

b) Pro <u>levo</u> (pravo)-stranné limity se často používá následujících stručných označení

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \equiv f(x_0 - 0) \equiv \underline{\underline{f(x_0-)}}, \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) \equiv f(x_0 + 0) \equiv \underline{\underline{f(x_0+)}}.$$

8.11 VĚTA o vztahu limity a jednostranných limit Mějme funkci $f(x)$ a bod $x_0 \in \mathbf{R}$. Pak platí, že existuje limita (popř. i nevlastní) funkce $f(x)$ a je rovna $l \in \mathbf{R}^*$, právě když existují jednostranné limity a rovnají se l. Píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to x_0-} f(x)}_{f(x_0-)} = \underbrace{\lim_{x\to x_0+} f(x)}_{f(x_0+)} = l.$$

8.12 PŘÍKLAD S využitím známé limity ze střední školy $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ vyčíslíme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 2x}\right) = \frac{2}{3} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \cos z} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \quad .$$

8.13 POZNÁMKA K PŘEKONÁNÍ OBTÍŽÍ S VÝPOČTEM LIMITY FUNKCE

Touto poznámkou obsahující šest příkladů alespoň naznačíme jak zvládnout zmíněnou činnost.

● Při výpočtu limity (oboustranné) ***elementární funkce*** $f(x)$ (dále v této kapitole jen funkce) v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ vždy předpokládáme existenci této limity, tj. že existují obě jednostranné limity $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$ a jsou si rovny. K tomu často využíváme znalostí grafů těchto funkcí, a když navíc $x_0 \in D_f$, pak pouhým dosazením x_0 do $f(x)$ získáme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Tedy např. $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, kde $P(x)$ je polynom, resp. $\lim\limits_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$ atd. Užíváme přitom větu 8.7 a různých rovností (např. $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$). Není-li zřejmé, že $f(x_0-) = f(x_0+)$, počítáme každou limitu zvlášť. Jestliže však $x_0 \notin D_f$, pak se po dosazení $x = x_0$ objevují **limitní typy** (symboly) ve tvaru

$$\textbf{1)} \ \left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right) \quad \text{nebo} \quad \textbf{2)} \ \left(\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{0}}\right), \quad \text{kde } c \neq 0,\ c \in \mathbf{R}.$$

● **Případ 1)** nastává, když je vyšetřována limita lomené funkce $g(x)/h(x)$, speciálně racionální lomené funkce $P(x)/Q(x)$ v bodě x_0, kde polynomy $P(x)$, $Q(x)$ mají týž (reálný) kořen x_0 (tedy $P(x_0) = Q(x_0) = 0$), tj. oba jsou dělitelné mocninou $(x - x_0)^n$ lineárního dvojčlenu $(x - x_0)$, kde $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a tedy lze lomenou funkci touto mocninou **krátit** nebo lze rovnou provést **dělení polynomů**, tedy počítat $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)/Q(x) = \lim\limits_{x\to x_0} P_1(x)/Q_1(x)}$. Přitom využíváme kromě vět o limitách a různých úprav (např. výše naznačeného **rozkladu polynomu** na kořenové činitele) především přímý **důsledek definice limity funkce v bodě** x_0, podle nějž: ***Dvě funkce, jejichž funkční hodnoty jsou stejné, až na funkční hodnotu v bodě*** x_0***, mají v*** x_0 ***stejnou limitu, existuje-li limita jedné z nich***. To dokumentují následující příklady.

PŘÍKLAD 1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+x^3-2x^2}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2(x-1)}{x+3}=-12$.

Mezi další úpravy patří **rozšíření výrazu** a při výskytu goniometrických funkcí též **užití vzorců**, **rovností** a již **známých limit**, např. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$.

PŘÍKLAD 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=$

$2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7=14$.

● **Případ 2)** vede na situaci, v níž je výsledkem **nevlastní limita** $(+\infty)$ **či** $(-\infty)$ **funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **nebo jen nevlastní jednostranné limity** lomené funkce $f(x)=g(x)/h(x)$, tj. kdy $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=c$, $c\neq 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$. V tomto případě počítáme zvlášť obě jednostranné a vždy nevlastní limity $f(x_0-)$ a $f(x_0+)$, přičemž nejdůležitější je určit jejich znaménko. Kromě jeho analytického určení (Viz příklad níže) si někdy pomáháme dosazováním číselných hodnot z co nejužšího redukovaného levého, resp. pravého okolí bodu x_0. Znaménko obou jednostranných limit je buď stejné, resp. opačné, tj. nevlastní limita funkce buď existuje a je rovna jednostranným limitám, resp. neexistuje neboli existují jen ty nevlastní jednostranné limity s opačnými znaménky.

PŘÍKLAD 3 $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{3x-2}{1-x^2}=f(1-)=$ | Uvažujme $x=1-\delta$, kde $\delta>0$ | $=\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{3(1-\delta)-2}{1-(1-\delta)^2}=$

$\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{1-3\delta}{\delta(2-\delta)}=\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{1}{2\delta}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{1}{\delta}=$ | Podle věty 8.8 o limitě absolutní hodnoty reciproké funkce je $\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{1}{\delta}=+\infty$, stručněji $\dfrac{1}{(0+)}=+\infty$ | $=\dfrac{1}{2}\cdot(+\infty)=+\infty$.

PŘÍKLAD 4 $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{3x-2}{1-x^2}=f(1+)=\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{3(1+\delta)-2}{1-(1+\delta)^2}=\lim\limits_{\delta\to 0+}\dfrac{1+3\delta}{-\delta(2+\delta)}=$

$$-\lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{2\delta}=-\frac{1}{(0+)}=-\infty.$$

Závěr z příkladů 3, 4: Jelikož $f(1-)\neq f(1+)$, neexistuje v bodě $x=1$ limita (oboustranná) funkce. **Geometricky** to znamená, že **přímka** $\boldsymbol{x=1}$ **je** ***vertikální asymptota*** grafu funkce $y=f(x)$.

● Je-li počítána **limita funkce** $\boldsymbol{f(x)}$ **v nevlastním bodě** $(+\infty)$**, resp.** $(-\infty)$, kterou označíme $f(+\infty)$, resp. $f(-\infty)$, tj. kdy x buď roste nad každou mez nebo klesá pod každou mez, vyšetříme ji např.

a) substitucí $\boldsymbol{x=1/t}$, čímž ji převedeme na některou z jednostranných limit v nule

$\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to 0\pm} f(1/t)}$, jak ukazuje následující

PŘÍKLAD 5 $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0+} t=\boxed{0}$ a podobně $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^n}=0}$

pro n kladné celé, nebo danou limitu vyšetříme

b) vytknutím vhodné mocniny x z čitatele i jmenovatele lomené funkce $f(x)$ (neboli dělením jejího čitatele i jmenovatele vhodnou mocninou x), jemuž popř. předcházelo např. rozšíření výrazu, jak ukazuje následující

PŘÍKLAD 6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}=$

$4\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=4\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=2.$

Závěr z příkladu: Zde vyšla vlastní limita v nevlastním bodě. **Geometricky** to znamená, že **přímka** $y=2$ **je tzv. *horizontální asymptotou*** grafu funkce $y=f(x)$.

9 SPOJITOST FUNKCE VČETNĚ HEINEHO definice, věty o limitě složené funkce

Tento pojem patří pro své četné důsledky v matematické analýze k těm nejvýznamnějším.

9.1 DEFINICE (podle Cauchyho-Weierstrassovy symboliky ε, δ) Funkce $f(x)$ je v bodě $x_0\in\mathbf{R}$ spojitá, právě když ke každému číslu $\varepsilon>0$ existuje číslo $\delta>0$ tak, že pro všechna x splňující:

$$(0\le)\,|x-x_0|<\delta \quad \text{platí} \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

9.2 POZNÁMKA [30.6] Předešlou definici spojitosti funkce v bodě lze ekvivalentně zapsat např. takto:

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\,|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

Jako samostatné cvičení zapište předešlý vztah pomocí pojmů okolí $O_\varepsilon(f(x_0))$ bodu $f(x_0)$ a okolí $O_\delta(x_0)$ bodu x_0, přičemž „těžkopádné" závorky, nehrozí-li nedorozumění, se někdy vynechávají.
Na rozdíl od úvah o limitě funkce $f(x)$ v bodě x_0 vidíme, že připouštíme bod $x=x_0$, neboť může být $0\le|x-x_0|$, tj. může zde nastat rovnost, což znamená, že musí existovat $f(x_0)$, tj. musí $x_0\in D_f$. Tedy, aby vůbec mohla být funkce v bodě x_0 spojitá, nutnou podmínkou (nikoli postačující) je, aby byla v x_0 definovaná. Evidentně $\delta=\delta(\varepsilon)$, tj. δ je funkcí zvoleného ε.
Uvažovaný bod $x_0\in D_f$ je buď tzv. *hromadný bod množiny* – zde definičního oboru D_f funkce f neboli podle definice hromadného bodu každé jeho δ-okolí $O_\delta(x_0)$ obsahuje aspoň 1 bod $x\in D_f$ takový, že $x\neq x_0$ (a tedy evidentně obsahuje nekonečně mnoho bodů z D_f) nebo $x_0\in D_f$ není hromadný bod D_f neboli je to *izolovaný bod* D_f a v izolovaném bodě x_0^* je funkce f vždy spojitá (neboť když $|x-x_0^*|=0<\delta$, pak $|f(x)-f(x_0^*)|=0<\varepsilon$ pro každé zvolené $\varepsilon>0$), takže jde o nezajímavý případ. Četní autoři jej proto při definici spojitosti vylučují.
My **budeme dále při vyšetřování spojitosti v bodě** x_0 **předpokládat, že** x_0 je ***hromadný bod*** D_f (*oboustranný* či *levostranný* či *pravostranný*, v závislosti na typu okolí bodu x_0).
Spojitost funkce $f(x)$ v bodě x_0 znamená tu lokální vlastnost, že „malé" změně argumentu x v jeho okolí odpovídá „malá" změna funkční hodnoty. Tj. když $\Delta x\to 0$, pak $\Delta y\to 0$, kde **diference funkce** f **v bodě** x_0 je $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$. Příklad 8.4 obsahující funkci sin $(1/x)$, která není v bodě $x_0=0$ spojitá (jde o nespojitost 2. druhu, viz dále), avšak má všude tzv. „*souvislý*" graf, dokládá, že **souvislost** množiny (zde grafu funkce) **a spojitost** funkce **jsou** sice blízké, ale přece jen **rozdílné pojmy** (Kromě triviálních případů prázdné množiny ∅ a $\mathbf{E}_1$, též **jednobodové množiny a všechny konečné či nekonečné intervaly v** reálné ose $\mathbf{E}_1$ **jsou souvislé množiny**).
Ekvivalentně a názorně lze spojitost funkce v bodě vyslovit též ***Heinovou definicí spojitosti*** (viz dále), využívající posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů x_n, jež konverguje k bodu x_0.

9.3 DEFINICE (Jednostranná spojitost) Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá zleva, resp. spojitá zprava $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$: $\forall x\in {}^{-}O(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0]$, resp. $\forall x\in {}^{+}O(x_0)=[x_0,\ x_0+\delta)$ platí:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

9.4 VĚTA (Tři základní věty o vztahu vlastní limity a funkční hodnoty v bodě, vhodné pro praktické zjištění spojitosti v daném bodě!) Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá, resp. spojitá zleva, resp. spojitá zprava, právě když platí odpovídající rovnost

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

9.5 POZNÁMKA Rovnost $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ definující spojitost funkce v bodě znamená následující 3 tvrzení

1) existuje limita,
2) $x_0 \in D_f$, tj. existuje funkční hodnota $f(x_0)$,
3) obě předešlé hodnoty se musí sobě rovnat.

9.6 VĚTA o spojitosti a jednostranných spojitostech Funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ spojitá $\Leftrightarrow$ je-li v x_0 spojitá zleva i zprava.

9.7 POZNÁMKA Není-li $f(x)$ spojitá v x_0 a přitom je definovaná v nějakém jeho okolí, pak nastanou dvě možnosti:

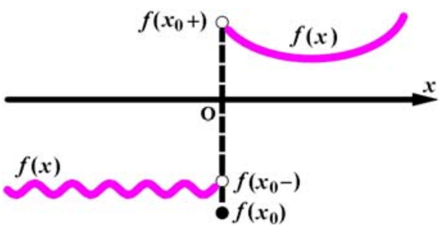
A) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje,
B) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \wedge l \neq f(x_0)$.

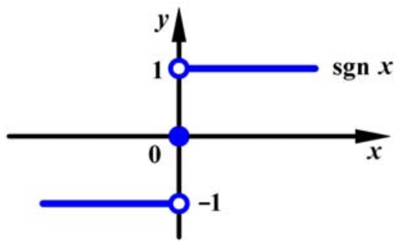
Rozlišujeme tyto případy nespojitosti

I) Existují obě jednostranné limity, tj. limita zleva $f(x_0-)$ i zprava $f(x_0+)$, obě jsou vlastní (tj. konečné) a obecně od sebe různé, tj. $f(x_0+) \neq f(x_0-)$, avšak buď

a) aspoň jedna z nich je různá od $f(x_0)$ nebo
b) $f(x_0)$ neexistuje (tj. $x_0 \notin D_f$).

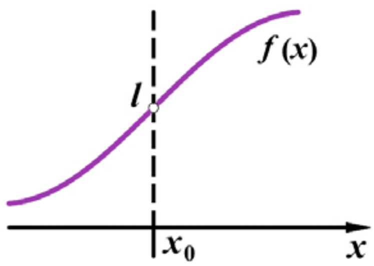
Pak řekneme, že bod x_0 je bodem nespojitosti 1. druhu. Číslo $f(x_0+) - f(x_0-)$ se nazývá skok funkce v bodě x_0.





Funkce sgn x má nespojitost 1. druhu v $x_0 = 0$.
Skok je zde $1 - (-1) = 2$.

Speciálně, jestli v tomto případě **b)**, kdy $f(x_0)$ neexistuje, avšak existuje limita, tedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ($\Leftrightarrow f(x_0+) = f(x_0-) = l$), pak se takový bod x_0 nespojitosti 1. druhu nazývá **bod odstranitelné nespojitosti**. Zcela přirozeným způsobem (Viz obr.) můžeme v takovém bodě x_0 dodefinovat funkci $f(x)$, aby zde byla spojitá takto $\quad f(x_0) := l = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

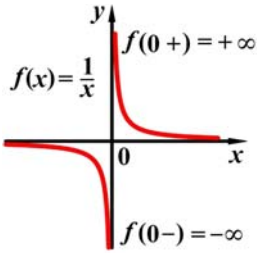


Jde o tzv. **spojité rozšíření (prodloužení) funkce** v bodě x_0 (její limitou).

9.8 NAPŘÍKLAD funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ není pro $x_0 = 0$ definována, avšak víme, že $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Dodefinujeme ji definitorickou rovností $f^*(0) := 1$. Můžeme psát pro novou už všude definovanou a limitou spojitě rozšířenou (prodlouženou) funkci:

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

II) Alespoň jedna z jednostranných limit $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ neexistuje nebo je nevlastní (tj. je rovna $+\infty$ či $-\infty$). Pak bod x_0 se nazývá bod nespojitosti 2. druhu.



9.9 NAPŘÍKLAD modifikovaná **Dirichletova funkce** χ (je to neelementární funkce) označená řeckým „chí" (nelze znázornit její graf):

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbf{Q} \text{ ......množina racionálních čísel } \left(\text{např. } \dfrac{22}{7}\right) \\ -1 & \text{pro } x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q} \text{ ....množina iracionálních čísel (např. } x = \sqrt{2},\ \pi,\ \mathrm{e},\ \text{atd.)} \end{cases}$$

je v každém bodě x nespojitá a jde o body nespojitosti 2. druhu.

9.10 PŘÍKLAD Platí $|\chi(x)| = 1$.

9.11 VĚTA [Heineho ekvivalentní definice spojitosti (z r. 1872)**]** Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ bodů (čísel) x_n je splněna implikace

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Píšeme též $$x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n) \to f(x_0).$$
[Tj. posloupnost funkčních hodnot musí konvergovat k funkční hodnotě v bodě x_0, když $x_n \to x_0$]

9.12 VĚTA Jsou-li funkce f, g spojité v x_0, $c \in \mathbf{R}$ je nějaká konstanta, pak jsou v bodě x_0 spojité rovněž funkce

$$|f(x)|$$
$$\left.\begin{array}{l} c\cdot f(x) \\ f(x)+g(x) \\ f(x)-g(x) \end{array}\right\} \quad \text{(tedy je spojitá i lineární kombinace funkcí } c_1f(x)+c_2g(x),\ \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$
$$f(x)\cdot g(x)$$
$$f(x)/g(x), \quad \text{pokud } g(x) \neq 0 \text{ v nějakém okolí } O(x_0).$$

9.13 DEFINICE Řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $J \subseteq D_f$, platí-li:

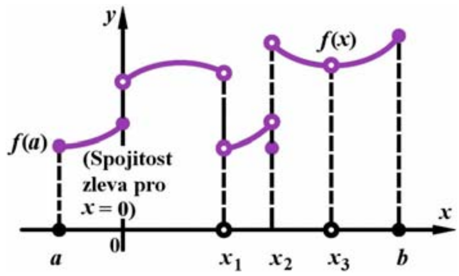
1) f je spojitá v každém vnitřním bodě $x_0 \in J$,

2) patří-li levý, resp. pravý krajní bod do J, (tj. jde např. o uzavřený interval $[a, b] = J$) je v něm spojitá zprava (tj. $f(a+) = f(a)$), resp. zleva (tedy $f(b-) = f(b)$).

9.14 POZNÁMKA $C[a, b]$, resp. $C(a, b)$, resp. $C(J)$ je časté označení pro množinu všech funkcí spojitých na $[a, b]$, resp. (a, b), resp. na J. Tedy zápisem $f \in C(J)$ apod. sdělujeme, že funkce f je na intervalu J spojitá.

9.15 POZNÁMKA Je zřejmé, že spojitost funkce v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ je lokální vlastností funkce, zatímco spojitost na intervalu je globální vlastností funkce.

9.16 DEFINICE FUNKCE SPOJITÉ PO ČÁSTECH [48.3] Funkce $f(x)$ se nazývá **po částech spojitá na intervalu** $[a, b]$, má-li $[a, b]$ konečný počet bodů nespojitosti pouze 1. druhu (Viz obr.), jinými slovy: je-li možné rozdělit $[a, b]$ na konečný počet podintervalů, přičemž



funkce f je spojitá ve vnitřku každého z nich.

Z obrázku je zřejmé, že $D_f \neq [a,b]$, $\{x_1, x_3\} \not\subseteq D_f$,

$x_3 \notin D_f$, ale f zde má odstranitelnou nespojitost !

$$f(x_3-) = f(x_3+) = \lim_{x\to x_3} f(x)\cdot$$

9.17 POZNÁMKA V **inženýrské praxi** se **často** pracuje s funkcemi, které jsou **jen po částech spojité** na uvažovaném intervalu.

9.18 VĚTA o spojitosti složené funkce (tzv. kompozice funkcí) Nechť funkce $y = g(x)$ je spojitá v bodě x_0. Nechť platí $g(x_0) = y_0$. Je-li funkce (vnější funkce) $f(y)$ v bodě y_0 spojitá, pak též složená funkce $h(x) = f(g(x))$ je spojitá v bodě x_0.

9.19 POZNÁMKA Následující věta, popř. za ní následující její speciální avšak nejčastější případ, umožňují výpočet limit většiny složitějších funkcí, s nimiž se setkáváme.

9.20 VĚTA 1 (obecná) o limitě složené funkce Mějme složenou funkci $y = f(g(x))$, a nechť

1) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$ (resp. když $x \to x_0-$ nebo $x \to x_0+$), $\lim_{u\to\lambda} f(u) = l$, $l \in \mathbf{R}^*$,

2) existuje takové redukované (popř. jednostranné redukované) okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0,

že pro všechna $x \in O^*(x_0)$, je $g(x) \neq \lambda$ (Je-li λ nevlastní, je předpoklad 2) nadbytečný).

Pak $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l}$ (resp. pro $x \to x_0-$ nebo $x \to x_0+$).

9.21 PŘÍKLAD Ukažme, že $\lim_{x\to 2+} \arctan[x^2/(x^2-4)] = \pi/2$. Vnitřní funkce $g(x) = x^2/(x^2-4)$ má v bodě 2 limitu rovnu $+\infty$ (neboť čitatel x^2 má limitu 4 a jmenovatel x^2-4 má limitu 0, přičemž jmenovatel se k nule blíží zprava). Vnější funkce $f(u) = \arctan(u)$ má v $+\infty$ limitu rovnu $\pi/2$.

9.22 POZNÁMKA Je-li vnější funkce $f(u)$ v bodě $u = \lambda$ spojitá (popř. jednostranně spojitá), odpadá podmínka 2) předešlé věty. S tímto případem se často setkáváme, takže jej uvedeme v následující větě.

9.23 VĚTA 2 (speciální) o limitě složené funkce se spojitou vnější složkou Je-li $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$, a je-li funkce $f(u)$ spojitá v bodě λ, pak

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lambda) \quad \text{neboli} \quad \boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x))}.$$

9.24 PŘÍKLAD Ukažme, že $\lim_{x\to 0} \exp[1/(x-2)] = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$. Položíme-li $f(u) = \mathrm{e}^u$, $u = g(x) = 1/(x-2)$, je $\lim_{x\to 0}[1/(x-2)] = -1/2$. Jelikož je $f(u)$ v bodě $u = 0$ spojitá, máme podle předešlé věty $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

9.25 VĚTA o spojitosti inverzní funkce Nechť spojitá funkce f je ryze monotónní funkcí [rostoucí či klesající, tj. je prostým (injektivním) zobrazením] na intervalu J_1. Nechť funkce f zobrazuje interval $J_1 \subseteq D_f$ na interval $J_2 \subseteq H_f$. Pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá na intervalu J_2.

9.26 POZNÁMKA Pro ryze monotónní funkce platí: $D_{f^{-1}} = H_f$; $H_{f^{-1}} = D_f$.

9.27 VĚTA O SPOJITOSTI ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ Každá elementární funkce, která je definována na otevřeném intervalu, je tam spojitá. Je-li definovaná na uzavřeném nebo polouzavřeném intervalu, je v krajním bodě, jenž patří do jejího definičního oboru, spojitá jednostranně.

10 ✦ *CVIČENÍ* B ✦

■ Vyšetřete limity a přitom si dobře promýšlejte, které matematické výsledky používáte. Vypočtený výsledek znázorněte na části grafu, která odpovídá redukovanému okolí vyšetřovaného limitního bodu, je-li

81 $\lim\limits_{x\to 0{,}5} \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$ $\{\{2\}\}$ **82** $\lim\limits_{x\to \ln 3} e^x$ $\{\{3\}\}$ **83** $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\{\{+\infty\}\}$

84 $\lim\limits_{x\to 0+} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ $\{\{$neexistuje$\}\}$ **85** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$. $\{\{$neexistuje, $f(2-)$ neexistuje, $f(2+)=0\}\}$

■ Po úpravě funkcí určete jejich limity

86 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2}$ $\{\{-5\}\}$ **87** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5-6x^3}{x^4+3x^3+x^2}$ $\{\{0\}\}$ **88** $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$ $\{\{4\}\}$

89 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\{\{0\}\}$ **90** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[5]{x}}$. $\{\{0\}\}$

■ S využitím známé limity $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ vypočítejte následující limity

91 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 2x}$ $\{\{\frac{1}{2}\}\}$ **92** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cot 3x}{\sin 3x}$ $\{\{\frac{1}{9}\}\}$ **93** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x+\tan x}{4x-\sin x}$ $\{\{2\}\}$

94 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{\sin(x+3)}$ $\{\{27\}\}$ **95** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$. $\{\{\frac{1}{2}\}\}$

■ Najděte limitu funkce v každém z krajních bodů jejího definičního oboru a vhodně ji zapište. Určete rovnice asymptot rovnoběžných s osami a načrtněte část grafu funkce v jejich blízkosti, je-li

96 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\{\{f(\pm\infty)=1, f(-1\pm)=\mp\infty, f(1\pm)=\pm\infty$, asymptota horizontální $y=1$ a $x=\pm1$ vertikální, funkce je sudá$\}\}$

97 $f(x)=x+\dfrac{x-2}{x^2+5x}$ $\{\{f(\pm\infty)=\pm\infty, f(-5\pm)=\pm\infty, f(0\pm)=\mp\infty$, vertikální asymptoty $x=-5$ a $x=0\}\}$

98 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}$ $\{\{f(\pm\infty)=\pm\infty, f(-1\pm)=\pm\infty$, vertikální asymptota $x=-1\}\}$

99 $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^4}$ $\{\{f(\pm\infty)=0, f(0\pm)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, souřadnicové osy jsou asymptoty, f je sudá$\}\}$

100 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ $\{\{f(\pm\infty)=\begin{cases}1\\+\infty\end{cases}, f(-2-)=2=f(-2), f(0+)=0=f(0)$, horizontální asymptota $y=1\}\}$

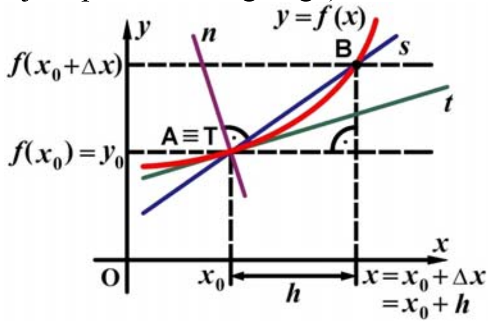
■ a v dalších příkladech navíc uveďte, kterou větu je třeba při výpočtu limit použít, je-li

101 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ $\{\{f(\pm\infty)=0,\ f(0\pm)=\pm\dfrac{\pi}{2}$, horizontální asymptota $y=0$; je použita věta o limitě složené funkce se spojitou vnější složkou$\}\}$

102 $f(x)=\dfrac{1}{\arctan x}$. $\{\{???\}\}$

11 DERIVACE FUNKCE

(Pojem derivace zavedli G. W. Leibniz a I. Newton, název pojmu pak J. L. Lagrange)



Nechť směrnice sečny s je: $k_s = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$,

pak směrnici tečny t: $k_t = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

získáme jako limitu směrnic sečen procházejících pevným bodem A = $(x_0, f(x_0))$ a dalším bodem B = $(x, f(x))$, jenž se blíží po grafu funkce $y = f(x)$ k bodu A, až oba body splynou a stanou se tak dotykovým bodem T tečny grafu funkce.

11.1 DEFINICE Řekneme, že funkce $f(x)$ <u>má v bodě</u> $x_0 \in D_f$ <u>derivaci</u>, jestliže existuje vlastní (konečná) limita zapsaná $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, resp. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tuto limitu pak nazýváme <u>derivace funkce</u> $f(x)$ v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$. <u>Neexistuje-li</u> tato limita, říkáme, že f nemá v bodě x_0 derivaci.
(**<u>GEOMETRICKY to znamená</u>**, že v daném bodě grafu funkce $y = f(x)$ **<u>neexistuje tečna</u>**).

11.2 POZNÁMKA
- Má-li $f(x)$ derivaci v bodě x_0, pak je <u>definovaná nejen v bodě</u> x_0, <u>ale i v jeho okolí</u>.
- Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu derivaci.
- $f'(x)$ je opět funkcí, přičemž $D_{f'} \subseteq D_f$.
- Funkce má <u>derivaci</u> $f'(x)$ <u>na intervalu</u> J, má-li derivaci v každém bodě $x \in J$, přičemž v krajních bodech se opět vyžaduje tzv. <u>pravo</u>- či <u>levostranná derivace</u>.

11.3 DEFINICE jednostranných derivací Mějme funkci $f(x)$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Existuje-li jednostranná limita $f'(x_0-) := \lim\limits_{x\to x_0-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, resp. $f'(x_0+) := \lim\limits_{x\to x_0+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, pak tuto limitu nazýváme <u>derivací funkce</u> v bodě x_0 $f(x)$ <u>zleva</u>, resp. <u>zprava</u>. Lze ji též definovat

(při $h < 0$) jako $f'(x_0-) := \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nebo

(při $h > 0$) jako $f'(x_0-) := \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$, resp. $f'(x_0+) := \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ atd.

(kde jsme jen použili rovnost $x_0 + h = x$).

11.4 DEFINICE Nechť $f(x)$ je funkce, $x_0 \in \mathbf{R}$. Jestliže platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, pak řekneme, že $f(x)$ má v x_0 <u>nevlastní derivaci $\pm\infty$</u> a píšeme $f'(x_0) = \pm\infty$.

11.5 POZNÁMKA Podobně opět vyjdeme z příslušných definic derivace jakožto nevlastní limity a definujeme jednostranné nevlastní derivace ve vlastním bodě, např. $f'(b-) = +\infty$.

11.6 ÚMLUVA Řekneme-li, že $f(x)$ **<u>má v bodě</u>** x_0 **<u>derivaci</u>**, budeme tím vždy mínit **<u>derivaci vlastní</u>**, tj. konečnou.

11.7 VĚTA o derivaci a jednostranných derivacích Funkce $f(x)$ má v $x_0 \in \mathbf{R}$ (i nevlastní) derivaci $f'(x_0) = d \in \mathbf{R}^*$, právě když má v tomto bodě derivaci zleva i zprava a platí jejich rovnost

$$f'(x_0-) = f'(x_0+)\ [= d].$$

11.8 **<u>GEOMETRICKY</u>** je
$f'(x_0-)$ … velikost směrnice k_{t_-} „polotečny t_- jakožto dotykové polopřímky (zleva)“,
$f'(x_0+)$ … velikost směrnice k_{t_+} „polotečny t_+ jakožto dotykové polopřímky (zprava)“ [Viz obr.].

11.9 VĚTA[58] **(o vztahu derivace a spojitosti funkce v bodě)** Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ derivaci $f'(x_0)$, pak je v tomto bodě spojitá. (Opačně to neplatí !!)

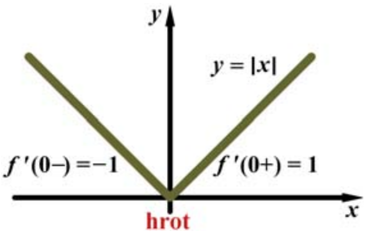
11.10 PŘÍKLAD[145] Vypočítejme derivaci $f'(0)$ v bodě 0 nespojité funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$, jež není zřejmá z dříve uvedeného grafu této neelementární funkce, pomocí jednostranných derivací. Platí

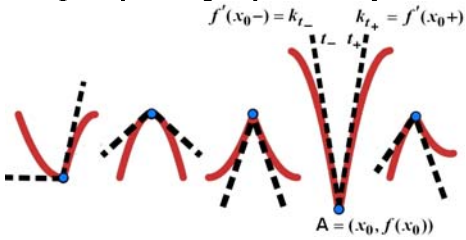
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1-0}{x-0}=\frac{1}{(0+)}=+\infty, \qquad \lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-1-0}{x-0}=\frac{-1}{(0-)}=+\infty,$$

tj. $(\operatorname{sgn} x)'_{x=0}=+\infty$. V ostatních bodech má derivaci nulovou.

ZÁVĚR:	**Funkce, která není v bodě spojitá, ale je v něm definovaná, zde může mít nevlastní derivaci.**

11.11 POZNÁMKA Jistou představu o jednostranných derivacích poskytnou grafy následujících spojitých funkcí. Tak např.
funkce $f(x) = |x|$ je spojitá,
ale neexistuje $f'(0)$,
neboť platí
$f'(0-)=-1\neq1=f'(0+)$.





Podrobněji: $f'(0-)=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|-|0|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-x-0}{x}=-1$, nebo jinak:

pro $\delta>0$ dostáváme $f'(0-)=\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{f(0-\delta)-f(0)}{-\delta}=\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{|0-\delta|-|0|}{-\delta}=\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{-(-\delta)}{-\delta}=-1$ atd.

Přitom $f'(0)$ neexistuje. Říkáme, že derivace f' má v bodě 0 <u>singularitu</u>.

<u>V matematice</u> se body x_0 spojité funkce $f(x)$, kde neexistuje derivace $f'(x_0)$, ale existují v nich různé (popř. i nevlastní) jednostranné derivace, tj. $f'(x_0-)\neq f'(x_0+)$, nazývají např. „**<u>HROTY</u>**“ („<u>úhlové body</u>“, „<u>body vratu</u>“ atd., terminologie není jednotná).

11.12 POZNÁMKA Má-li funkce derivaci $f'(x_0)$, pak má v bodě $T = (x_0, f(x_0))$ její graf **tečnu** t **o rovnici** $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, a pokud $f'(x_0)\neq0$, pak **rovnice normály** n (přímky kolmé na tečnu) je

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0).$$

11.13 **<u>GEOMETRICKÝ VÝZNAM NEVLASTNÍ DERIVACE FUNKCE</u>** Nevlastní derivace spojité funkce v bodě x_0 signalizuje vertikální **<u>TEČNU</u>** o rovnici $x=x_0$, přičemž u jednostranných nevlastních derivací se uvažuje jen **<u>POLOTEČNA</u>** (zakreslovaná čárkovanou polopřímkou) <u>kolmá k ose Ox</u> a vychází z bodu $(x_0, f(x_0))$. Ten může např. být krajním bodem b intervalu $[a, b]$ nebo bodem hrotu. Jde tedy o **<u>VERTIKÁLNÍ POLOTEČNY</u>** .
Analogicky definujeme nevlastní derivace v nevlastních bodech $\pm\infty$, např. $f'(+\infty)=-\infty$ atd.

11.14 **<u>FYZIKÁLNÍ INTERPRETACE</u> DERIVACE** spočívá v tom, že zkoumáme okamžitou rychlost $v(t)$ i zrychlení $a(t)$ přímočarého nerovnoměrného pohybu v čase t s délkou dráhy $s(t)$.

Platí $$v(t_0)=s'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\overbrace{s(t)-s(t_0)}^{\Delta s}}{\underbrace{t-t_0}_{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$ tj. obecně $v(t)=s'(t)$, $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

Newtonovo označení ve fyzice je $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \dot{v} = a$ atd., kde dvě čárky či tečky už značí derivaci funkce 2. řádu, kterou definujeme dále.

11.15 POZNÁMKA Derivaci funkce $y = f(x)$ definovanou v bodě x, resp. $x_0 \in D_f$ <u>značíme</u> např.

$$\underbrace{f'(x), y'(x), f', y', [f(x)]'}_{\text{Lagrange}}, \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)}_{\text{Leibniz}}, \quad \underbrace{\mathrm{D}_f(x_0), \mathrm{D}_f(x)_{x=x_0}}_{\text{Cauchy}}, \quad f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

Leibnizovy zápisy jsou tzv. <u>diferenciální tvary</u>. Poznáme, že jsou výhodné např. při derivování složené funkce či inverzní funkce.

11.16 VZORCE PRO DERIVACE NĚKTERÝCH ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ uvedeme bez předpokladů o jejich platnosti vzhledem k x. Čtenář si je může určit sám.

1) $(c)' = 0$, [c je konstantní funkce]	2) $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, $r \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$	
3) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	4) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, [$a \in \mathbf{R}^+$]	5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, [$a \in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$]	7) $(\cos x)' = -\sin x$	8) $(\sin x)' = \cos x$
9) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	10) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	14) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

11.17 PŘÍKLAD $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$

$$\underbrace{\sin x}_{\text{konstanta}} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{=1} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \underline{\underline{\cos x}}.$$

11.18 GLOBÁLNÍ VZORCE PRO VÝPOČET DERIVACÍ (existují-li derivace)

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x); \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x); \quad (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad \text{kde } v(x) \neq 0;$$

Derivace složené funkce: $[f(\overbrace{g(x)}^{y=g(x)})]' = f'(\overbrace{g(x)}^{y}) \cdot g'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Podrobněji lze toto globální tvrzení formulovat lokálně (tj. v bodě x_0) takto:

11.19 VĚTA o derivaci složené funkce Nechť funkce $u = f(y)$ má derivaci v $y_0 \in D_f$, a nechť funkce $y = g(x)$ má derivaci v $x_0 \in D_g$ a platí $y_0 = g(x_0)$. Pak složená funkce $f(g(x))$ má derivaci v x_0 a platí:

$$\boxed{[f(g(x))]'_{x=x_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0); \textbf{stručněji } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Odtud plyne následující

11.20 VĚTA o derivaci inverzní funkce Nechť funkce $x = f(y)$ je spojitá a ryze monotónní [tedy jde o prosté zobrazení, tj. injekci f] na intervalu J a má derivaci $f'(y_0) \neq 0$ ve vnitřním bodě $y_0 \in J$. Pak funkce inverzní $y = f^{-1}(x)$ k funkci $f(y)$ má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí:

$$\boxed{[f^{-1}(x)]'_{x=x_0} = \frac{1}{f'(y_0)}}$$ neboli (méně přesně, ale pro výpočty názorně) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}}.$$

11.21 PŘÍKLAD Derivujme funkci $y = \arcsin x$ [která při $-1 \le x \le 1$ je inverzní k funkci $x = \sin y$ pro $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$].

Platí $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y \ne 0$ pro $y \ne \pm\frac{\pi}{2}$, proto $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$. Znaménko + volíme proto, že $\cos y > 0$ pro $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

11.22 PŘÍKLAD Derivujme funkci $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$. Podle definice logaritmu platí

$$x = \mathrm{e}^{\ln x}\ [x>0] \Rightarrow u^v = \mathrm{e}^{\ln u^v} = \underline{\underline{\mathrm{e}^{v\cdot\ln u}}}. \text{ Proto}$$

$$\left(\sqrt[x]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\right)' = \left(\mathrm{e}^{z(x)}\right)' = \mathrm{e}^{z(x)}\cdot z'(x) =$$

$$\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}}_{\sqrt[x]{x}}\cdot\left[-x^{-2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right] = \underline{\underline{\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)\ \text{pro}\ x>0}}.$$ Totéž dává tzv.

11.23 LOGARITMICKÁ DERIVACE znamená, že se nejprve logaritmuje, a pak derivuje. Je výhodná u mocnin, které se tak zjednoduší na součin, a taktéž u součinu, který se zjednoduší na součet.

11.24 PŘÍKLAD (předešlý, ale logaritmickou derivací)

$$y = x^{\frac{1}{x}} \qquad \Big|\ \ln$$

$$\ln y = \frac{1}{x}\cdot\ln x \qquad \Big|\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)' \quad\Rightarrow\quad y' = y\left[\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]' = x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln x\right]' = \sqrt[x]{x}\cdot\left[-x^{-2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right].$$

11.25 PŘÍKLAD Derivujme funkci

$$y = \sqrt[3]{x^2+1}\cdot\sqrt{2x-1}\cdot(3x-2)^5,\quad x > \frac{1}{2} \qquad \Big|\ \ln$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 5\ln(3x-2) \qquad \Big|\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{1}{y}y' = \left[\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln(2x-1) + 5\ln(3x-2)\right]'$$

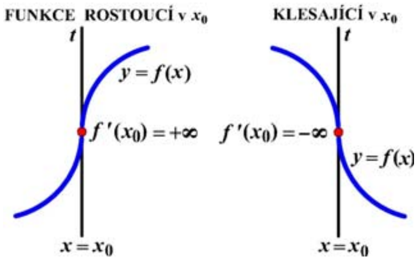
$$y' = y\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2 + 5\cdot\frac{1}{3x-2}\cdot 3\right]$$

$$y' = \underline{\underline{\sqrt[3]{x^2+1}\cdot\sqrt{2x-1}\cdot(3x-2)^5\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2x-1} + \frac{15}{3x-2}\right]}}.$$

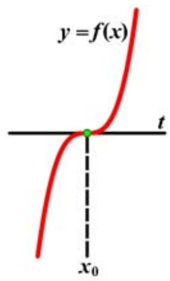
Platí následující **2 věty o funkci rostoucí či klesající**

11.26 VĚTA 1 (o funkci rostoucí či klesající v bodě, má-li v něm 1. derivaci kladnou či zápornou) Nechť funkce $f(x)$ má v <u>bodě</u> x_0 vlastní nebo nevlastní 1. derivaci, a nechť platí: $f'(x_0) > 0$, resp. $f'(x_0) < 0$. Pak je $f(x)$ v bodě x_0 <u>rostoucí</u>, resp. <u>klesající</u>.

11.27 PŘÍKLAD dvou obrázků k předešlé i následující větě pro případy nevlastních derivací $f'(x_0)$ spojitých funkcí. (Situaci pro případ nevlastní derivace $+\infty$ v bodě 0 funkce, která je v bodě 0 nespojitá a rostoucí, demonstruje např. graf dříve znázorněné funkce $y = \operatorname{sgn} x$)



11.28 VĚTA 2 (o ekvivalenci růstu nebo klesání spojité funkce na J se znaménkem své 1. derivace) Nechť $f(x)$ je spojitá na <u>intervalu</u> J [tj. $f(x) \in C(J)$] a má na J vlastní nebo nevlastní derivaci. Pak funkce $f(x)$ je <u>rostoucí</u>, resp. <u>klesající</u>, právě když platí $f'(x) \geq 0$, resp. $f'(x) \leq 0$ na J, přičemž však rovnost $f'(x) = 0$ nenastane v žádném podintervalu $J^* \subset J$.
[Jinak by f byla konstantní na J^*, tj. $f'(x) = 0$ může nastat, viz obr., jen v izolovaných bodech („inflexních“)]



(inflexní bod)

12 ✦ *CVIČENÍ* C ✦

■ Zjistěte, jakou hodnotou je třeba definovat následující funkci $f(x)$ v potřebném bodě, aby takto dodefinovaná rozšířená funkce $f^*(x)$ byla i v něm spojitá (tj. šlo by o bod odstranitelné nespojitosti)

103 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ $\{\{ f(1) = 2/3 \}\}$

104 $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x}$. $\{\{ f(0) = 2 \}\}$

■ Stanovte hodnotu parametru λ tak, aby funkce f byla spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$

105 $f(x) = \begin{cases} x + \lambda & \text{pro } x < 0, \\ e^{\lambda x} + 1 & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$ $\{\{ \lambda = 2 \}\}$

106 $f(x) = \begin{cases} -\lambda x & \text{pro } x < -1, \\ \dfrac{x}{\lambda} + 2 & \text{pro } x \geq -1. \end{cases}$ $\{\{ \lambda = 1 \}\}$

107 Vypočítejte derivaci funkce $y = x^3$ v bodě $x_0 = 1$ podle definice derivace, tj. limitou. $\{\{3\}\}$

108 Pomocí definice derivace jako limity určete derivaci funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $\{\{ -\dfrac{1}{x^2} \}\}$

109 Dokažte vzorec $(\cos x)' = -\sin x$ s využitím vzorce $\boxed{\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h}$.

■ V bodě 0 vyčíslete derivaci funkce a nevedou-li k cíli vzorce pro derivování elementárních funkcí, upravte funkci, resp. použijte jednostranné derivace či definici derivace funkce

110 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4}}$ $\{\{ 0 \notin D_y$, tj. neexistuje $y'(0) \}\}$

111 $y = \sqrt[4]{x^4}$ $\{\{ y = |x|,\ y'(0)$ neexistuje, v 0 je hrot $\}\}$

112 $y = \sqrt[3]{x^3}$. $\{\{ y = x,\ y'(x) = 1$ pro $x \in \mathbf{R} \}\}$

■ Derivujte následující funkce a výsledek zjednodušte (přičemž si vždy určete definiční obor derivace funkce)

113 $f(x) = \sqrt[5]{5}$ $\{\{0\}\}$

114 $x^{\sqrt{2}}$ $\{\{ \sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1} \}\}$

115 $\pi x^{-\pi}$ $\{\{ -\pi^2 x^{-(\pi+1)} \}\}$

116 10^x $\{\{ 10^x \ln 10 \}\}$

117 $\log x$ $\{\{ \dfrac{1}{x \ln 10} \}\}$

118 $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3$ $\{\{ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \}\}$

119 $f(y) = y\sqrt{y}$ $\{\{\ \frac{3}{2}\sqrt{y}\ \}\}$ **120** $\frac{x^4 + 5x^2 - 3}{x^3}$ $\{\{\ \frac{x^4 - 5x^2 + 9}{x^4}\ \}\}$

121 $f(z) = \frac{z}{\cos z}$ $\{\{\ \frac{\cos z + z \sin z}{\cos^2 z}\ \}\}$ **122** $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ $\{\{\ 2\mathrm{e}^{2t}\ \}\}$

123 $\frac{\sin x}{\cot x}$ $\{\{\ \frac{(\cos^2 x + 1)\sin x}{\cos^2 x}\ \}\}$

124 $\frac{\arcsin x}{\arccos x}$ $\{\{\ \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^2}$, neboť $\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ pro } |x| \le 1}\ \}\}$

125 $\frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$ $\{\{\ \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+x^2)(\operatorname{arccot} x)^2}$, neboť $\boxed{\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}}\ \}\}$

126 $f(u) = \mathrm{e}^u u^{-2}$ $\{\{\ \mathrm{e}^u u^{-3}(u-2) = f(u)(1-2u^{-1})\ \}\}$ **127** $f(v) = \frac{v^2+1}{v^2-1}$. $\{\{\ -4\frac{v}{(v^2-1)^2}\ \}\}$

■ Určete derivace složených funkcí (Nezapomeňte na definiční obor derivace)

128 $\sqrt{x^4 + 4x}$ $\{\{\ 2\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+4x}}\ \}\}$ **129** $\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$ $\{\{\ \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ \}\}$ **130** 2^{2x+3} $\{\{\ 2^{2x+3}\ln 4\ \}\}$

131 $\ln(\ln(\sin x))$ {{neexistuje, neboť daná funkce neexistuje. Proč?}} **132** e^{-x^2} $\{\{\ -2x\mathrm{e}^{-x^2}\ \}\}$

133 $f(y) = \ln^2(1-3y^2)$ $\{\{\ \frac{12y}{3y^2-1}\ln(1-3y^2)\ \}\}$ **134** $f(z) = \frac{2}{\sqrt{\sin z}}$ $\{\{\ -\frac{\cos z}{\sin z\sqrt{\sin z}}\ \}\}$

135 $f(x) = \arcsin\frac{x}{a}$ $\{\{\ \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ \}\}$ **136** $f(x) = \ln\cos\frac{a}{\sqrt{x}}$ $\{\{\ \frac{a}{2x\sqrt{x}}\tan\frac{a}{\sqrt{x}}\ \}\}$

137 $f(t) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{t}}$ $\{\{\ -\frac{\lambda}{t^2}f(t)\ \}\}$ **138** $f(u) = \ln\tan u$ $\{\{\ \frac{1}{\sin u\cos u} = \frac{2}{\sin 2u}\ \}\}$

139 $x^{\arctan 3x}$ $\{\{\ x^{\arctan 3x}\left(\frac{3\ln x}{1+9x^2} + \frac{\arctan 3x}{x}\right)\ \}\}$ **140** $x^{\ln x}$ $\{\{\ 2x^{\ln x - 1}\ln x\ \}\}$

141 $f(x) = (1-4x)\sqrt{x^2+2}\,\sqrt[4]{x^4+5}$. $\{\{\ f(x)\cdot\left(\frac{4}{4x-1} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{x^3}{x^4+5}\right)\ \}\}$

■ Vhodným zápisem vystihněte chování derivace funkce v okolí bodů, kde není zadaná funkce definovaná a v krajních bodech jejího definičního oboru, je-li

142 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\{\{\ f'(0\pm) = \lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \lim_{x\to 0\pm}\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \mp\infty \Rightarrow f'(0)$ neexistuje, $f'(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0\ \}\}$

143 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\{\{\ f'(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = 0\ \}\}$

144 $f(x) = \sin x$. $\{\{\ f'(\pm\infty)$ neexistují, neboť neexistují $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x\ \}\}$

145 Dvě otázky ke vzájemnému vztahu pojmů spojitost funkce a derivace funkce v bodě:

1) Může mít derivaci, vč. nevlastní derivace, funkce, která je v daném bodě definovaná, ale není v něm spojitá?

2) Tipněte si, zda může u spojité funkce nastat to, že u ní neexistuje, jak známo, derivace (vlastní) nejen v izolovaných bodech (tvořících např. nekonečnou posloupnost), ale že tyto body mohou vytvořit dokonce i interval?

⦃ **1)** ano, ale jen nevlastní derivaci, viz funkce $\operatorname{sgn} x$ z příkladu 11.10, kdy $(\operatorname{sgn} x)'_{x=0} = +\infty$; **2)** ano, i když si takovou křivku neumíme představit.[3] ⦄

■ Určete rovnici tečny t i normály n ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $\mathsf{T} = (x_0, f(x_0))$ a také velikost úhlu α, jenž svírá t s kladnou částí osy x (tj. s kladnou poloosou x), je-li

146 $f(x) = x \ln x$, kde T je průsečík grafu $f(x)$ s osou x 146

147 $f(x) = \ln x$, kde T je průsečík grafu $f(x)$ s přímkou $y = -\mathrm{e}x$. Nápověda: kořen x_0 transcendentní rovnice $\ln x = -\mathrm{e}x$ uhodněte dosazováním celých mocnin čísla e (V praxi lze kořeny rovnice $g(x) = 0$ nalézt graficky nebo raději numericky – *Newtonovou metodou tečen*, popř. obecněji *metodou sečen* apod.). 147

⦃ **146** $t: \; y = x - 1, \quad n: \; y = -x + 1, \quad \varphi = \arctan 1 = \pi / 4 \; (= 45°)$

147 $t: \; y = \mathrm{e}x - 2 \quad n: \; y = -\dfrac{x}{\mathrm{e}} + \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}, \quad \varphi = \arctan \mathrm{e} \doteq 1{,}218 \text{ (rad)} \; (\approx 70°)$ ⦄

■ Dokažte, že dané funkce vyhovují uvedené obyčejné diferenciální rovnici (1. řádu) v každém bodě, v němž jsou dané funkce definovány

148 $y = Cx + \dfrac{x^3}{2}$, $(C \in \mathbf{R})$; *lineární* diferenciální rovnice $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$

149 $y = Cx + C^2$, $y = -x^2/4$, $(C \in \mathbf{R})$; *Clairautova* (čti: klerótova) diferenciální rovnice $y = xy' + (y')^3$.

150 Dráhu s , kterou urazí těleso o hmotnosti $m = 2$ kg v čase t (sekund) přímočarým pohybem lze v metrech vyjádřit vztahem $s = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 3$. Odvoďte si vzorce pro okamžitou rychlost v, okamžité zrychlení a . Pak zjistěte, v jakém čase t_v , resp. t_a jsou rychlost, resp. zrychlení nulové, a jakou kinetickou energii E_k má těleso po 6 sekundách pohybu.

⦃ $v = \dot{s} \equiv \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \dot{v} = \ddot{s} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}, \quad t_{v1} = 1\,(\mathrm{s}), \quad t_{v2} = 4\,(\mathrm{s}), \quad t_a = 2{,}5\,(\mathrm{s}), \quad E_k = \dfrac{mv^2}{2} = 3600 \; (\mathrm{J})$ ⦄

151 Pohybuje-li se cyklista rychlostí v, lze vyjádřit vodorovnou, resp. svislou polohu bodu na obvodu jeho otáčejícího se kola o poloměru R v závislosti na čase t vztahy $x = vt - R \sin\left(\dfrac{v}{R}t\right)$, resp. $y = R - R\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)$, které definují periodický pohyb zmíněného bodu po *cykloidě* (Přitom $\dfrac{v}{R} = \omega$ je úhlová frekvence otáčení). Stanovte v okamžiku t vodorovnou, resp. svislou složku rychlosti i příslušná zrychlení pohybu zmíněného bodu.

⦃ $\dot{x} = v - v\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right), \quad \ddot{x} = \dfrac{v^2}{R}\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right)$, resp. $\dot{y} = v\sin\left(\dfrac{v}{R}t\right), \quad \ddot{y} = \dfrac{v^2}{R}\cos\left(\dfrac{v}{R}t\right)$ ⦄

152 Celkový elektrický (kladný) náboj Q (v coulombech, kdy $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$), který projde za t sekund při stejnosměrném proudu vodičem počínaje časem $t = 0$, je dán vzorcem $Q = 4t^2 + 6t + 1$. Vypočítejte proud I na konci třetí sekundy.

⦃ $I(3) = \left.\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=3} = \left. 8t + 6 \right|_3 = 30 \; (\mathrm{A})$ ⦄

[3] Jako první sestavil spojitou funkci, která má v každém svém bodě hrot, tj. bod, v němž sice existují obě jednostranné derivace, ale jsou různé, náš největší matematik **Bernard Bolzano (1781 - 1848)**, a to už kolem r. 1834.

13 DERIVACE FUNKCE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

Derivujeme-li funkci $f(x)$ na D_f, pak funkce f' je definována na $D_{f'}$, kde obecně $D_{f'} \subseteq D_f$.
Jestliže n-krát derivujeme funkci f (pokud derivace existují), pak $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ pro $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (množina všech kladných celých čísel), kde obecně

$D_{f^{(n)}} \subseteq D_{f^{(n-1)}} \subseteq \ldots \subseteq D_{f'} \subseteq D_f$, a kde definujeme $\underline{\underline{\boldsymbol{f^{(0)}(x) := f(x)}}}$, tj. $f(x)$ je vlastně **nultá derivace** sebe sama. (Např. pro polynomy platí rovnost definičních oborů)

13.1 VĚTA – Leibnizovo pravidlo Nechť funkce $u,\ v$ mají derivaci n-tého řádu. Pak platí:

$$\underbrace{(u \cdot v)^{(n)} = \binom{n}{0} \cdot u^{(n)} v^{(0)} + \binom{n}{1} \cdot u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} \cdot u^{(n-2)} v'' + \cdots + \binom{n}{n} \cdot u^{(0)} v^{(n)}, \quad \text{kde} \quad u^{(0)} = u\,, v^{(0)} = v\,.}_{\text{tzv. LEIBNIZOVO PRAVIDLO}}$$

14 ✦ *CVIČENÍ* D ✦

153 Určete derivaci 4. řádu funkce $y = x^4 - x^2 + 1$ v bodě 0. $\{\!\{ \ y^{(4)}(x) = y^{(4)}(0) = 24 = 4! \ \}\!\}$

■ Dokažte, že dané funkce vyhovují uvedené obyčejné diferenciální rovnici

154 $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + C_3\,,\quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R})\,,\quad y''' + 9y' = 0$

155 $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,(x+2)\,,\ 4y'' + 4y' + y = 0$

156 $y = A\mathrm{e}^{nx} + B\mathrm{e}^{-nx} + C\cos nx + D\sin nx$, ($A$, B, C, D, n jsou konstanty), $\dfrac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}x^4} = n^4 y$.

157 Zkuste odvodit pomocí *Leibnizova* pravidla, že $\boxed{(x^2 \cdot \mathrm{e}^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n^2 - n)\,\mathrm{e}^x}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

158 Zkuste odvodit postupným derivováním, že $\boxed{[\ln(x+1)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}}$ $\forall x \in (-1, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (což lze snadno ověřit matematickou indukcí).

159 Odvoďte okamžité zrychlení slabě tlumených harmonických (tj. periodických) kmitů, jejichž okamžitá výchylka v čase t je $x = a\mathrm{e}^{-pt}\sin(\omega t + b)$, kde $a \neq 0$, $p > 0$, $\omega \neq 0$, b jsou konstanty.

$\{\!\{ \ \ddot{x} = a\mathrm{e}^{-pt}\,[(p^2 - \omega^2)\sin(\omega t + b) - 2p\omega\cos(\omega t + b)] \ \}\!\}$

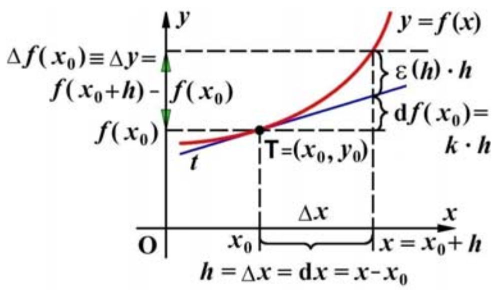
15 DIFERENCIÁL FUNKCE

15.1 DEFINICE Řekneme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 diferencovatelná, když její přírůstek – diference $\Delta f(x_0)$ v tomto bodě můžeme zapsat takto:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \underline{k \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h},$$

kde konstanta $k \in \mathbf{R}$, $\varepsilon(h)$ je funkce, pro kterou platí:

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

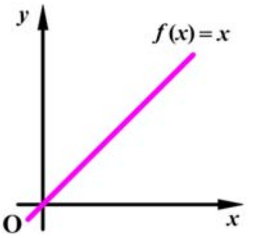


Výraz $k \cdot h$, což je lineární funkce proměnné h, a tedy i proměnné x, se nazývá diferenciál funkce $f(x)$ v x_0 a značí se $\mathrm{d}f(x_0) = k \cdot h = k \cdot (x - x_0)$.

15.2 VĚTA (o ekvivalenci diferencovatelnosti funkce v bodě s existencí (vlastní) derivace v něm) Funkce $f(x)$ je diferencovatelná v bodě x_0 právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci. Pak $f'(x_0) =$ *const.* a pro diferenciál funkce $f(x)$ v bodě x_0 platí vzorec

$$\boxed{\mathbf{d}\boldsymbol{f(x_0) = f'(x_0) \cdot h}}\,, \quad \text{kde} \quad h = x - x_0\,.$$

15.3 GEOMETRICKÝ VÝZNAM DIFERENCIÁLU Diferenciál je LINEÁRNÍ přírůstek funkce měřený po tečnu t.



15.4 POZNÁMKA Jestliže uvažujeme $f(x) = x$, pak pro diferenciál platí: $\mathrm{d}f(x) = 1 \cdot \mathrm{d}x = 1 \cdot h$, tj. máme $\underline{\underline{\mathrm{d}x = h = x - x_0}}$, který použijeme pro tradiční zápis diferenciálu (diferencovatelné) funkce $f(x)$ $\boxed{\mathbf{d}f(x) = f'(x)\,\mathbf{d}x}$.

15.5 POZNÁMKA V obecném bodě x je funkce ε funkcí dvou proměnných, a to x, h (tedy nejen h), tj. $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \varepsilon(x, h) \cdot h$, odtud ji můžeme definovat takto: $\varepsilon(x, h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$.

15.6 POZNÁMKA Diferenciál funkce $f(x)$ je tedy funkcí dvou proměnných x a $\mathrm{d}x$.

15.7 DEFINICE Má-li funkce $f(x)$ derivaci n-tého řádu, pak <u>n-tý diferenciál funkce</u> (<u>diferenciál n-tého řádu</u>) definujeme následovně

$$\mathbf{d}^n f(x) = f^{(n)}(x) \cdot \mathbf{d}x^n, \quad \text{kde } \mathbf{d}x^n = (\mathbf{d}x)^n, \; f^{(0)}(x) = f(x), \; n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

15.8 POZNÁMKA Z předešlé definice získáme Leibnizovo označení derivace n-tého řádu pomocí diferenciálů

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathbf{d}^n f(x)}{\mathbf{d}x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

15.9 PŘÍKLAD Je zřejmé, že $\mathrm{d}^3 f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 f(x)) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(\mathrm{d}\, f(x)))$. Obecně platí $\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x))$ a říkáme pak, že f je <u>n-krát diferencovatelná</u> ($\Leftrightarrow$ existuje $f^{(n)}(x)$).

15.10 POZNÁMKA U funkce více proměnných znamená existence diferenciálu mnohem víc, než pouhá existence všech tzv. „parciálních“ derivací!!

15.11 POZNÁMKA K DŮLEŽITÉMU OZNAČOVÁNÍ Nechť J je interval. Pak symbol $C^k(J)$ nebo $C^{(k)}(J)$ označuje množinu všech funkcí majících <u>spojitou</u> k-tou derivaci na J, a tedy majících na J spojité též derivace všech nižších řádů vč. nultého. Zápisem $f \in C^k(J)$ sdělujeme, že f má na J <u>spojité derivace do řádu k včetně</u>. Říkáme též, že f je na J <u>k-krát spojitě diferencovatelná</u>, nebo že je <u>hladká k-tého řádu</u>, nebo že je <u>třídy C^k na J</u> atd.

15.12 PŘÍKLAD na použití diferenciálu pro vyjádření přibližné funkční hodnoty v aplikacích

Platí:

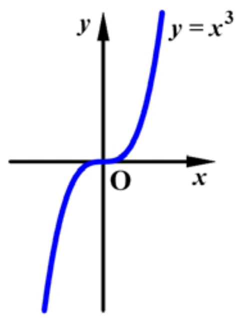
$$f(\overbrace{x_0 + h}^{x}) - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) \quad + \quad \underbrace{\overbrace{\varepsilon(h) \cdot h}^{\to 0}}_{\text{(pro malé } h \text{ tento člen zanedbáme)}}$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx \mathrm{d}f(x_0).$$

$$\text{Pak } f(x) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) \qquad [\approx \text{ přibližná rovnost}]$$

$$\underline{\underline{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}}.$$

15.13 PŘÍKLAD



Pro funkci (kubickou parabolu) $y = x^3$ je $\mathrm{d}y = 3x^2 \mathrm{d}x$.
$\Delta y = (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3 = 3x^2 \mathrm{d}x + 3x(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}x)^3$

Tedy funkce $\varepsilon(\overbrace{\mathrm{d}x}^{h}) = 3x\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x(3x + \mathrm{d}x)$. Z definice diferenciálu víme, že $\lim\limits_{\mathrm{d}x \to 0} \varepsilon(\overbrace{\mathrm{d}x}^{h}) = 0$, a stejný výsledek dá i limita posledního výrazu na předešlém řádku. Pak např. pro $x = 2$ a $\mathrm{d}x = 0{,}1$, je $\mathrm{d}y = 1{,}2$, oproti diferenci $\Delta y = 2{,}1^3 - 2^3 = 9{,}261 - 8 = 1{,}261$. Pro $x = 2$ a menší $\mathrm{d}x = 0{,}001$ je

$$\underbrace{\mathrm{d}y = 0{,}012, \quad \text{oproti} \quad \Delta y = 0{,}012\,006}_{\text{Tedy } \mathrm{d}y \approx \Delta y \text{ platí již dosti přesně.}}.$$

15.14 POZNÁMKA Diferenciál funkce má význam zejména v teorii aproximace, ale i ve fyzice pro zjednodušení úvah o malých změnách nezávisle proměnné, kterou místo x bývá obvykle čas t.

16 ✦ *CVIČENÍ* E ✦

■ Pomocí diferenciálu $\mathrm{d}\,f(x_0)$ vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(x_0+h)$ (diferencovatelné) funkce v přírůstkovém bodě x_0+h, kde h je přírůstek argumentu x, a porovnejte ji s přesnou hodnotou $f(x_0)$ pomocí přírůstku (diference) $\Delta f(x_0)$ funkce v x_0, je-li

160 $f(x)=2x^4-12$, $x_0=2$, $h=-0{,}1$

$\{\{\ f(x_0+h)\ \approx\ f(x_0)+f'(x_0)\cdot h\ =\ \underline{\underline{20}}-6{,}4\ =\ \underline{\underline{13{,}6}}\,;\ \ \Delta f(2)\ =-5{,}9\ \}\}$

161 $f(x)=\sin x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$, $h=\dfrac{\pi}{180}$ $\{\{\ f(\dfrac{31\pi}{180})\ \approx\ \dfrac{1}{\underline{\underline{2}}}+\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{360}\ \doteq\ \underline{\underline{0{,}515}}\,;\ \ \Delta f(\dfrac{\pi}{6})\ \doteq\ 0{,}015\ \}\}$

162 $f(x)\ =\ (\cos x+1)/(\cos x-1)$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $h=0{,}01$. $\{\{???\}\}$

■ Vyjádřete diferenciály následujících funkcí v závislosti na příslušném argumentu a jeho přírůstku h (tj. tam, kde existuje derivace funkce), je-li

163 $f(x)\ =\ \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ $\{\{\ \mathrm{d}f(x)\ =\ -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\ h\ \ (\text{ pro } -1<x<1\ )\}\}$

164 $\varphi(t)\ =\ (1/4)\ \ln\tan(2t)$. $\{\{\ \dfrac{h}{\sin\,4t}\ \}\}$

165 Přesvědčte se, že funkce $y=Cx^2+3x$, $C\in\mathbf{R}$, je řešením diferenciální rovnice $(3x-2y)\,\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

166 Užitím diferenciálu zjistěte, s jakou absolutní chybou ΔV a relativní chybou můžeme vypočítat (shodně s teorií chyb měření) objem V koule, jestliže při měření jejího poloměru R bylo naměřeno $R=(0{,}100\pm0{,}001)\ \mathrm{m}$. Slovně vyjádřete vztah mezi velikostí relativní chyby měření objemu a poloměru. Nakonec vyjádřete přesnou absolutní chybu $(\Delta V)^*$ v závislosti na R a jeho změně ΔR.

$\{\{$objem $V\ =\ (4/3)\pi R^3\ =\ (4/3)10^{-3}\pi\ \ (\mathrm{m}^3)$ vypočítáme při absolutní chybě $\Delta V\approx\mathrm{d}V=4\pi R^2\cdot\Delta R\ =$ $(\pm)10^{-5}\pi\ \ (\mathrm{m}^3)$ a při velikosti relativní chyby $\left|\dfrac{\Delta V}{V}\right|\ \approx\ \left|\dfrac{\mathrm{d}V}{V}\right|\ =\ 3\left|\dfrac{\Delta R}{R}\right|\ =\ 3\cdot10^{-2}$, tj. 3 %; „relativní chyba vypočteného objemu je trojnásobkem relativní chyby změřeného poloměru“.

$(\Delta V)^*\ =\ 4\pi R^2\Delta R\ +\ 4\pi R(\Delta R)^2+\dfrac{4}{3}\pi(\Delta R)^3\ \}\}$

167 Podle předešlého příkladu si samostatně vyřešte analogické zadání pro obsah S povrchu koule. $\{\{???\}\}$

168 Dobu kmitu (periodu) T pohybu matematického kyvadla udává vzorec $T\ =\ 2\pi\sqrt{l/g}$, kde l je jeho délka a $g=9{,}806\,65\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$ tíhové zrychlení. Pomocí diferenciálu určete přibližně, jak je nutné změnit délku kyvadla $0{,}20\ \mathrm{m}$, aby se perioda zvětšila o $0{,}2\ \mathrm{s}$. $\{\{$ prodloužit o $\dfrac{0{,}2}{\pi}\sqrt{0{,}2\,g}\ \doteq\ 9\ \mathrm{cm}\ \}\}$

169 Pomocí Ohmova zákona odvoďte, že malá změna ΔI proudu způsobená malou změnou ΔR odporu může být vyjádřena přibližnou rovností ve vzorci $\Delta I/I\ \approx\ -\Delta R/R$. Formulujte tento vztah též slovně pomocí termínu „relativní chyba veličiny“.

■ Užitím diferenciálu si vyčíslete přibližně hodnoty

170 arctan 0,98 $\{\{\ \approx\ \arctan 1\ +\ \left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}\cdot(-0{,}02)\ \doteq\ 0{,}78\ \}\}$ **171** $\sqrt{82}$ $\{\{\ =\ \dfrac{163}{18}\ \}\}$

172 $\sin(0{,}6\,\pi)$ $\{\{\ =1\ \}\}$ **173** $\sqrt{\dfrac{2{,}04^2+5}{2{,}04^2-3}}$. $\{\{???\}\}$

17 BERNOULLIOVO – l´HOSPITALOVO PRAVIDLO (TVAR ZÁKLADNÍ I ZOBECNĚNÝ)

Markýz Guilaume Françoise Antoine de l´Hôspital (čti: *lopital*) (1661 - 1704) byl žákem Švýcara Johanna Bernoulliho (1667 - 1748), jenž toto pravidlo v roce 1691 - 92 objevil a v dopise je poslal l´Hospitalovi, který je zveřejnil v r. 1696 ve vůbec první učebnici matematické analýzy, tj. diferenciálního a integrálního počtu. Směl totiž podle smlouvy jako sponzor (mecenáš) Bernoulliho jeho výsledky publikovat. Pravidlo nejčastěji používáme pro výpočet limity, která může být i **jednostranná**, v bodě, jenž může být i **nevlastní**, z podílu funkcí $\frac{u(x)}{v(x)}$, které vedou na limitní typy neboli „*neurčité výrazy*"

$$\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right) \text{ nebo } \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right),$$ ostatní případy uvádíme dále.

17.1 VĚTA (Základní pravidlo) Nechť $u(x)$, $v(x)$ jsou funkce, bod $x_0 \in \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup (-\infty) \cup (+\infty)$. Nechť platí buď **A)** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = 0$ nebo **B)** $\lim\limits_{x\to x_0} |v(x)| = +\infty$ [V tomto případě B) o limitě $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$, tj. o limitě čitatele následujícího pravidla nyní nepředpokládáme nic, dokonce ani její existenci, avšak nejčastěji případ B) používáme, když ještě nastane $\lim\limits_{x\to x_0} |u(x)| = +\infty$!!].

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, pak existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ a platí jejich rovnost, tj. **základní Bernoulliovo-l´Hospitalovo pravidlo**: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$.

17.2 VĚTA (Zobecněné pravidlo) Nechť opět $u(x)$, $v(x)$ jsou funkce, bod $x_0 \in \mathbf{R}^*$, a nechť $n \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$. Dále nechť pro $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ platí buď

A) $\lim\limits_{x\to x_0} u^{(k)}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v^{(k)}(x) = 0$ nebo **B)** $\lim\limits_{x\to x_0} \left| v^{(k)}(x) \right| = +\infty$.

[O limitách čitatelů $\lim\limits_{x\to x_0} u^{(k)}(x)$ opět nepředpokládáme nic, tj. tyto limity ani nemusí existovat !!].

Existuje-li vlastní nebo nevlastní limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u^{(n)}(x)}{v^{(n)}(x)}$, pak existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ a platí tzv. **zobecněné Bernoulliovo-l´Hospitalovo pravidlo**: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{u^{(n)}(x)}{v^{(n)}(x)}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

17.3 PŘÍKLAD Platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{B-l´H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n\cdot x^{n-1}} \to \ldots \to \frac{e^x}{\underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}_{=n!}} \to \underline{\underline{+\infty}}$.

Zobecněné pravidlo se použilo n-krát.

17.4 POZNÁMKA B-l´H pravidlo používáme pro limity z tzv. neurčitých výrazů, což jsou limity nejen podílů (jak je uvedeno při B-H pravidle), ale také rozdílů, součinů a mocnin funkcí, kde limity jednotlivých funkcí existují, avšak příslušné početní operace mezi limitami nejsou definovány nebo výsledek nelze odvodit z vět o nevlastních limitách.

Pozor ! Vždy derivujeme zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele, tj. nederivujeme podíl !!

Zapamatujme si 7 neurčitých výrazů: $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$; $(\mathbf{0}\cdot\infty)$; $(\mathbf{0}^{\mathbf{0}})$; $(\infty^{\mathbf{0}})$; $(\mathbf{1}^{\infty})$. Podrobněji:

1) $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ B-H pravidlo použijeme přímo

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-v(x)\right]$ dává typ $(\overbrace{\infty-\infty}^{\text{není } 0!!})$ nebo $(-\infty+\infty)$, jenž převedeme na limitu podílu takto:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{1}{v(x)}-\dfrac{1}{u(x)}}{\dfrac{1}{u(x)\cdot v(x)}}$ (ale v příkladech získáme podíl i jednodušeji, tj. netřeba si pamatovat úpravu)

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ dává typ $\left(\overbrace{0\cdot(\pm\infty)}^{\text{není }=\ 0!!}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, „složitější“ funkci dáme spíš do čitatele

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^{v(x)}$ dává typ neurčitých výrazů $(\overbrace{0^0,\infty^0,1^\infty}^{\text{není }=\ 1!!})$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\right)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(v(x)\cdot\ln u(x))}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))}$ …tj. v mocniteli je typ 3).

17.5 POZNÁMKA Bernoulli-l´Hospitalovo pravidlo je účinné, ale ne vždy vede k cíli, jak ukazuje následující

17.6 PŘÍKLAD $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\sin x-x}^{u}}{\underbrace{\cos x+x}_{v}}=\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$, neboť $-1\le\sin x\le 1$, $-1\le\cos x\le 1$. Proto zkusíme B-H pravidlo, tj. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u'}{v'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x-1}{-\sin x+1}$. Tato limita však neexistuje. To, že neexistuje limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, ještě podle B-H pravidla nevadí, ale že též $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ neexistuje, to už podle části B) vadí, neboť jmenovatel musí mít limitu, a to $\pm\infty$. Tedy B-H pravidlo nelze využít. Výchozí limitu však vyčíslíme pouhým rozšířením zlomku

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x-x}{\cos x+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{\frac{\cos x}{x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=\underline{\underline{-1}}.$$

18 ✦ *CVIČENÍ* F ✦

■ Vyšetřete následující limitu (přičemž zvážíte možnost užít Bernoulli-l´Hospitalovo pravidlo)

174 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x-\sin x}{3x+\sin x}$ {{2; B-H pravidlo je neúčinné}} **175** a dokažte, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0$ {{???}}

176 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{6\cot 2x}{\tan x}$ {{ -3 ; lépe bez B-H}} **177** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\cos 2x}$ {{ -1 }} **178** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}$ {{36}}

179 a dokažte, že $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^r}=0$, $r>0$. Výsledek formulujte slovy {{ „funkce $\ln x$ roste pro $x\to+\infty$ pomaleji k plus nekonečnu než funkce x^r, ať je r jakkoli malé kladné číslo“ }}

180 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+1)^{2006}}{x\,2^x}$ $\{\{ 0 \}\}$

181 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln(a^2 x)}{\ln \sin(a^2 x)}$ $\{\{ ??? \}\}$

182 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^4 - 32x^3 + 80x^2 - 72x + 16}{3x^3 - 25x + 26}$ $\{\{ ??? \}\}$

183 $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$ $\{\{ +\infty \}\}$

184 $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\dfrac{1}{x-\pi} - \cot x \right)$ $\{\{ 0 \}\}$

185 $\lim\limits_{t \to +\infty} (t - \ln t)$ $\{\{ ??? \}\}$

186 $\lim\limits_{x \to 0} (e^{\frac{x}{3}} - 1) \cot x$ $\{\{ \dfrac{1}{3} \}\}$

187 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln \cos \dfrac{2\pi}{x}$ $\{\{ -2\pi^2 \}\}$

188 $\lim\limits_{t \to 0+} \cot t \left[e^{\pi \tan t} \cdot \tan^2\left(\dfrac{t}{4} + \dfrac{\pi}{4} \right) - 1 \right].$ $\{\{ \pi + 1 \}\}$

■ Odvoďte následující z důležitých limit

189 $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e}$ **190** $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e}$ **191** $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1}$.

■ Vyšetřete následující limitu

192 $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{4}{3 - 2\ln x}}$ $\{\{ e^{-2} \}\}$

193 $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\tan x}$ $\{\{ 1 \}\}$

194 $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 10^x)^{\frac{1}{x}}$ $\{\{ 10 \}\}$

195 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$. $\{\{ ??? \}\}$

■ Zkuste si vyřešit limitu následující číselné posloupnosti a zvažte užití Bernoulli-l´Hospitalova pravidla. Ano, i u posloupností $a_n = f(n)$ je jeho použití možné. Plyne to z Heinovy definice 7.5 limity funkce, neboť platí implikace

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(n) = l\,, \qquad l \in \mathbf{R}^*\,;$$[4)]

196 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ $\{\{ 0 \}\}$

197 $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + \lambda) \cdot \ln\left(\dfrac{\lambda}{n} + 1 \right)$ $\{\{ \lambda \}\}$

198 $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{5n})$ $\{\{ -\infty \}\}$

199 a dokažte, že $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n = e}$

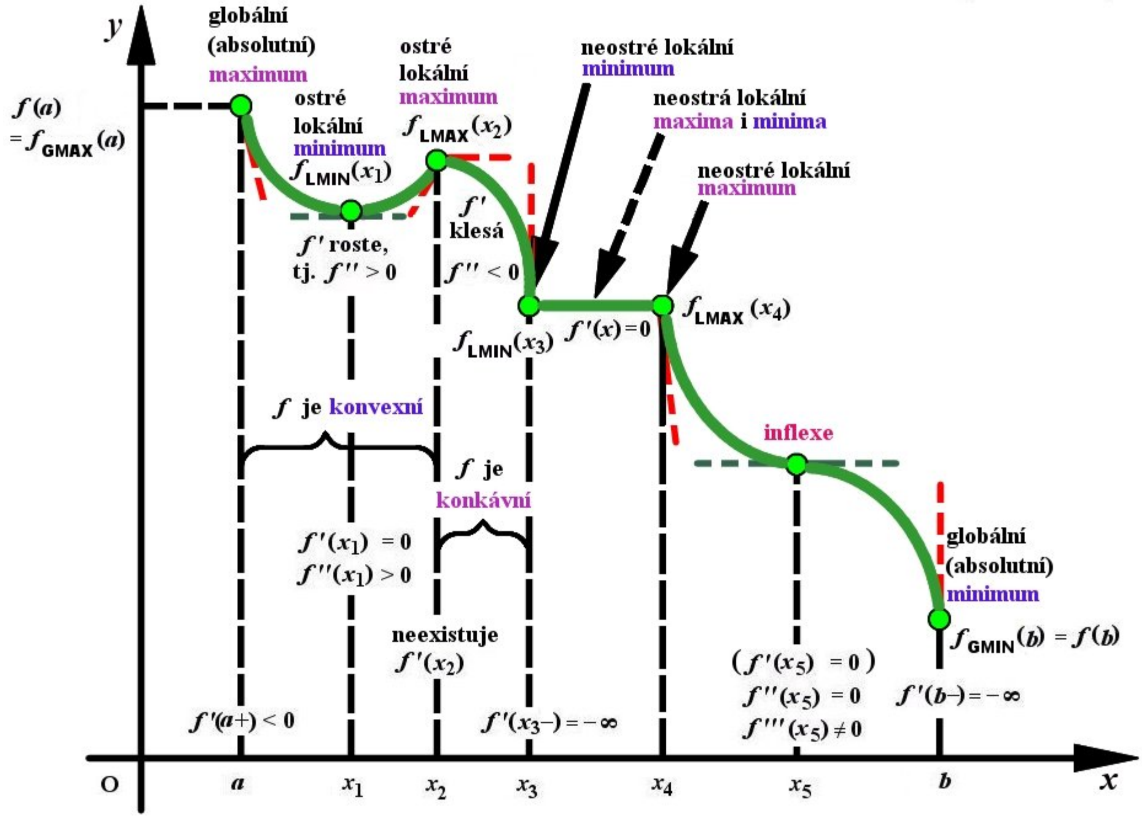
200 $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}}$. $\{\{ ??? \}\}$

4) obrácená implikace však neplatí, neboť *limita posloupnosti* $\{a_n\} = \{ f(n) \}$ *může existovat, i když neexistuje* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Např. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(\pi n) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$, zatímco $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(\pi x)$ neexistuje.

19 LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE

spolu s inflexí dává do souvislosti s derivacemi funkce následující **DŮLEŽITÝ OBRÁZEK**.



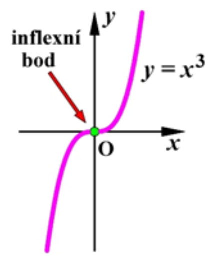
19.1 DEFINICE Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D_f$ (neostré) lokální maximum, resp. lokální minimum, jestliže existuje redukované okolí $O^*(x_0)$ bodu x_0 tak, že v něm pro všechna x platí: $f(x) \le f(x_0)$, resp. $f(x) \ge f(x_0)$.
Jestliže v něm platí ostré nerovnosti, tj. $f(x) < f(x_0)$, resp. $f(x) > f(x_0)$, pak jde o ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum; píšeme

$$f(x_0) = \max_{x \in O^*(x_0)} f(x) \ge f(x) \quad \text{nebo} \quad f(x_0) = \max_{x \in O^*(x_0)} f(x) > f(x) \quad \text{apod.}$$

19.2 VĚTA Fermatova (1601 - 1665) **o nutné podmínce pro lokální extrém** Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém, a nechť v x_0 existuje derivace. Pak (nutně) platí

$$f'(x_0) = 0.$$

19.3 POZNÁMKA Ve Fermatově větě jde o nutnou podmínku lokálního extrému, nikoli postačující, tedy když $f'(x_0) = 0$, pak v x_0 nemusí být lokální extrém – může tam být tzv. „inflexní bod“, jak ukazuje graf funkce $y = x^3$, pro niž platí $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 6 \ne 0$.

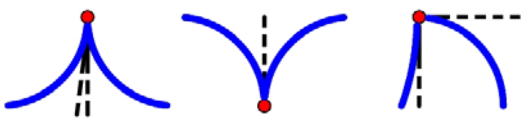


19.4 POZNÁMKA Body $x_0 \in \mathbf{R}$, kde $f'(x_0) = 0$, nazveme stacionárními body funkce $f(x)$.

Lokální extrémy mohou (ale nemusí) nastat v tzv. podezřelých bodech z extrémů, tj. kde:

1) $f'(x_0) = 0$ neboli **ve stacionárních bodech**,

2) neexistuje $f'(x_0)$ spojité funkce f (tj. kde neexistuje tečna, přičemž tam ale existují polotečny **v hrotech**, viz obr.) – říkáme, že 1. derivace tam má „singularitu“.



19.5 VĚTA (o 1. postačující podmínce pro ostrý lokální extrém spojité funkce v bodě, v jehož redukovaných jednostranných okolích má derivace funkce opačné znaménko) Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in (a, b)$.

A) Je-li $f'(x) > 0$ v intervalu (a, x_0) a $f'(x) < 0$ v intervalu (x_0, b), má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

B) Je-li $f'(x) < 0$ v intervalu (a, x_0) a $f'(x) > 0$ v intervalu (x_0, b), má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

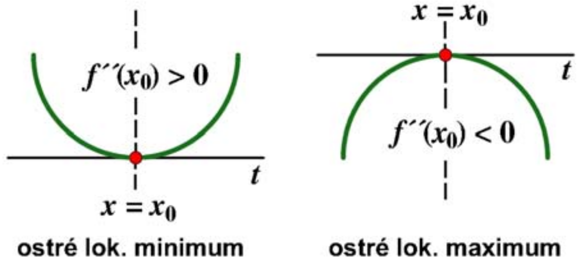
19.6 VĚTA (o 2. postačující podmínce pro existenci ostrého lokálního extrému (spojité) funkce s nenulovou 2. derivací ve stacionárním bodě) Nechť funkce f splňuje $f'(x_0) = 0$ (tj. x_0 je stacionární bod) a má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní 2. derivaci a platí pro ni

$$f''(x_0) \neq 0 .$$

Pak má f v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Je-li

A) $f''(x_0) < 0$, jde o ostré lokální maximum,

B) $f''(x_0) > 0$, jde o ostré lokální minimum.



20 GLOBÁLNÍ (ABSOLUTNÍ) EXTRÉMY FUNKCE

20.1 DEFINICE Řekneme, že funkce $f(x)$ má na množině $M \subseteq D_f$ globální extrém v bodě x_0, když pro každé x z M platí

a) $f(x) \le f(x_0)$, v tom případě se x_0 nazývá globální maximum, resp.

b) $f(x) \ge f(x_0)$, v tom případě se x_0 nazývá globální minimum.

Společně se oba extrémy nazývají globální extrémy.

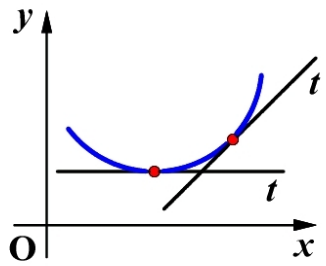
20.2 VĚTA o globálních extrémech funkce spojité na uzavřeném intervalu Jestliže je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak tam nabývá globálních extrémů, které mohou nastat:

1) buď v bodech lokálních extrémů nebo

2) v krajních bodech a, b uzavřeného intervalu.

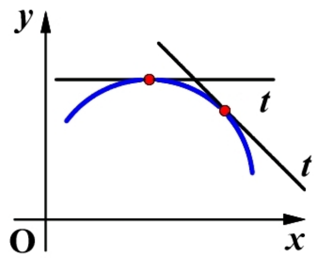
21 KONVEXNOST A KONKÁVNOST FUNKCE

Graf KONVEXNÍ funkce



Tečna je pod grafem konvexní $f(x)$

Graf KONKÁVNÍ funkce



Tečna je nad grafem konkávní $f(x)$

21.1 DEFINICE Řekneme, že v bodě $x_0 \in D_f$ je funkce f (ryze) konvexní, resp. (ryze) konkávní, právě když existuje $f'(x_0)$ (tj. vlastní) a existuje redukované okolí $O^*(x_0)$, v němž $\forall\, x$ platí:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0), \text{ resp. } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

21.2 POZNÁMKA Platí-li příslušné neostré nerovnosti, mluvíme o neryze konvexní, resp. neryze konkávní funkci f v bodě x_0 nebo na intervalu – to v případě, platí-li uvažované nerovnosti v každém bodě intervalu.

21.3 VĚTA (někdy výchozí definice) Funkce je konvexní v daném bodě x_0, právě když existuje redukované okolí bodu x_0, v němž graf funkce leží nad tečnou, a je konkávní, právě když graf funkce leží pod tečnou.
(Věta je ekvivalentní s předešlou definicí, neboť $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ vyjadřuje rovnici tečny t tvořené body, jejichž y-ová souřadnice je v předešlých nerovnostech vždy na pravé straně)

21.4 POZNÁMKA Funkce je konvexní na celém intervalu J, jestliže graf funkce leží nad tečnou v libovolném bodě dotyku, a je konkávní na J, jestliže graf leží pod tečnou v libovolném bodě dotyku z J.
Platí následující **3 věty o konvexnosti či konkávnosti funkce**.

21.5 VĚTA 1 (o ekvivalenci konvexnosti či konkávnosti funkce se svou 1. derivací rostoucí nebo klesající na J) Funkce f je na intervalu J konvexní (konkávní), právě když má na J derivaci f', která je na J rostoucí (klesající).

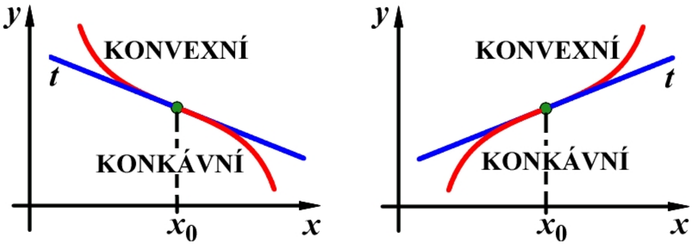
21.6 VĚTA 2 (o konvexnosti či konkávnosti funkce, má-li 2. derivaci kladnou či zápornou) Nechť v bodě x_0 má funkce f 2. derivaci $f''(x_0) > 0$, resp. $f''(x_0) < 0$ pak je f v bodě x_0 konvexní, resp. konkávní. [Věta má **velké využití** v aplikacích]

21.7 VĚTA 3 (o ekvivalenci konvexnosti či konkávnosti funkce třídy C^1 na J se znaménkem své 2. derivace) Nechť na intervalu J má funkce f spojitou 1. derivaci f' (tj. $f(x) \in C^1(J)$) a vlastní nebo nevlastní 2. derivaci f''. Pak funkce f je na J konvexní (konkávní) $\Leftrightarrow$ platí-li na J $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), přičemž však rovnost $f''(x) = 0$ nesmí nastat na žádném podintervalu $J^* \subset J$.

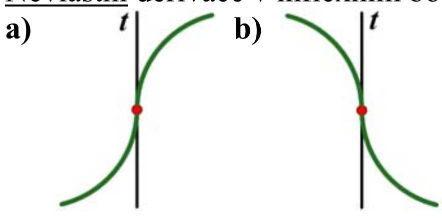
22 INFLEXNÍ BOD – INFLEXE FUNKCE

22.1 DEFINICE Nechť funkce f je spojitá v x_0 a má v x_0 vlastní (konečnou) či nevlastní (nekonečnou) 1. derivaci. [Tedy existuje tečna se směrnicí či tečna vertikální, čímž vyloučíme případy hrotů]. Říkáme, že x_0 je inflexní bod (grafu) funkce f, jestliže existuje redukované levé okolí ${}^{-}O^*(x_0)$, v němž $f(x)$ je konvexní a redukované pravé okolí ${}^{+}O^*(x_0)$, v němž je konkávní nebo naopak.
Říkáme též, že (graf či křivka o rovnici $y = f(x)$ příslušné) funkce má v bodě $(x_0, f(x_0))$ **INFLEXI** nebo někdy se i o tomto bodě říká, že je to „inflexní bod“ (grafu) funkce.

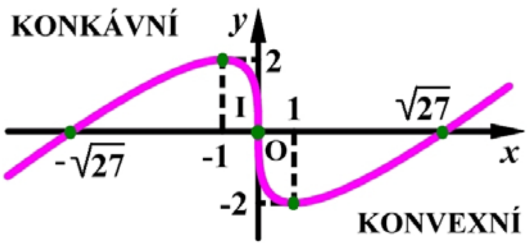
I) Vlastní derivace v inflexním bodě



II) Nevlastní derivace v inflexním bodě



Např. funkce $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$, jejíž průběh určíme později, je lichá, $f \in C(\mathbf{R})$. Pro $x \neq 0$ lze použít vzorec $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, takže limitním přechodem z něj a z teorie máme rovnosti $f'(0-) = f'(0+) = \underline{\underline{-\infty}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{f'(0) = -\infty}}$.
Tj. počátkem prochází vertikální tečna (osa y).



Platí $f''(x) = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. Neexistuje $f''(0)$, neboť v 0 jsou jednostranné 2. derivace různé: $f''(0-) = -\infty \neq +\infty = f''(0+)$.

22.2 POZNÁMKA Inflexemi grafu funkce $f(x)$ jsou body dotyku $(x_0, f(x_0))$, ve kterých tečna sestrojená ke grafu funkce zároveň tento graf protíná, neboli jde o body, v nichž přechází graf funkce $f(x)$ z jedné strany poloroviny vyťaté tečnou do opačné poloroviny.

22.3 VĚTA (o inflexním bodě funkce, v němž má její spojitá derivace lokální extrém) Mějme bod x_0, který je inflexním bodem funkce f, a nechť f' je <u>spojitá</u> v bodě x_0. Pak derivace $f'(x)$ má v bodě x_0 lokální extrém.

22.4 VĚTA o nutné podmínce inflexe Nechť x_0 je inflexní bod funkce f, a nechť v x_0 existuje 2. derivace (tj. vlastní) $f''(x_0)$. Pak (nutně) platí $f''(x_0) = 0$. [Neplatí to obráceně, je to <u>nutná</u>, nikoli postačující podmínka]
[Kontrapozice věty: Existuje-li 2. derivace (tj. vlastní) $f''(x_0) \neq 0$, není x_0 inflexní bod funkce]

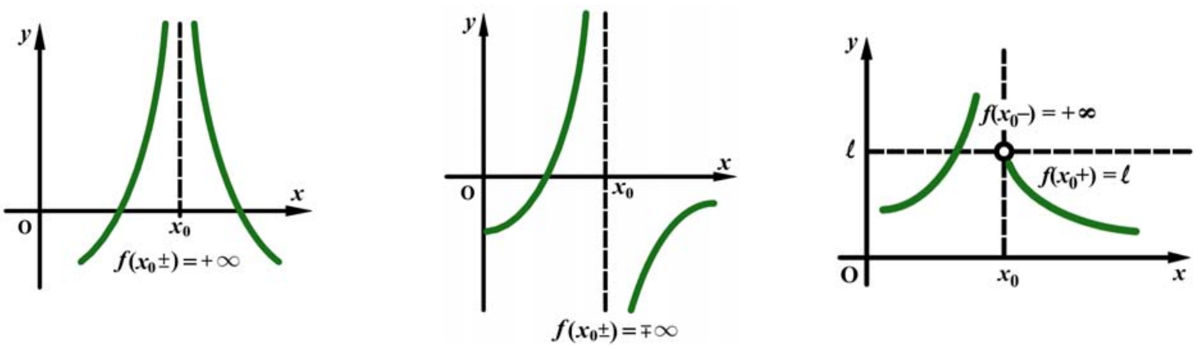
22.5 VĚTA (o 1. postačující podmínce inflexe při změně znaménka f'') Je-li $f''(x_0) = 0$ [popř. $f''(x_0)$ neexistuje, ale derivace $f'(x)$ je v bodě x_0 *spojitá* (tj. popř. i nevlastní – viz předešlý graf)] a mění-li f'' při přechodu přes bod x_0 znaménko, pak má funkce v x_0 inflexní bod.

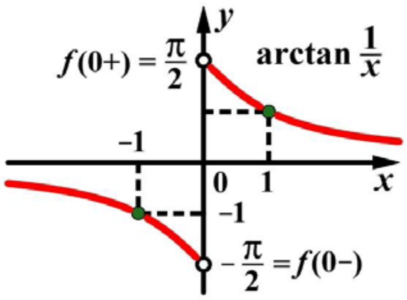
22.6 VĚTA (o 2. postačující podmínce inflexe při nulové f'' a nenulové f''') Nechť $f''(x_0) = 0$. Existuje-li vlastní či nevlastní 3. derivace $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexním bodem funkce $f(x)$.

22.7 VĚTA (o zobecnění postačující podmínky inflexe) [Toto je zahrnuto v pravidle poznámky 8 str. 49]
Je-li $f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, kdežto $f^{(2n+1)}(x_0) = const. \neq 0$, pak má funkce f v bodě x_0 <u>inflexní bod</u>.

23 ASYMPTOTY FUNKCE

23.1 POZNÁMKA **<u>Asymptoty bez směrnice</u>** neboli **<u>vertikální asymptoty</u>** (grafu) funkce jsou přímky $x = x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, v následujících obrázcích.





23.2 PŘÍKLAD Nyní znázorníme situaci, kdy přímka $x = 0$ (osa y) <u>není</u> asymptotou grafu funkce $y = \operatorname{arctan}\dfrac{1}{x}$.

23.3 DEFINICE Řekneme, že přímka $x = x_0$ je <u>asymptota bez směrnice grafu funkce</u> neboli <u>vertikální asymptota</u> (grafu) funkce, jestliže aspoň jedna její jednostranná limita v bodě x_0 je nevlastní, tj. $\pm\infty$.

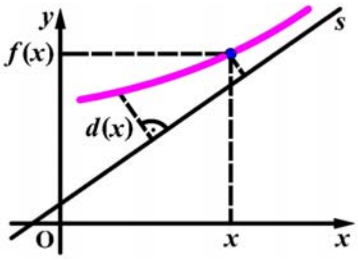
23.4 VĚTA (o vertikální (tj. nesměrnicové) asymptotě) Vertikální asymptota $x = x_0$ (křivky – grafu) funkce dané rovnicí $y = f(x)$ existuje, právě když je

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty, \text{ popř. } \lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

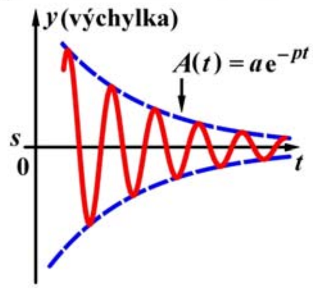
[Tedy může jich být i nekonečně mnoho]

<u>Asymptoty se směrnicí (šikmé asymptoty)</u>

23.5 DEFINICE Nechť s je přímka v rovině $\mathbf{E_2}$ různoběžná s osou y (tj. má vlastní směrnici) a funkce $f(x)$ je definovaná v okolí nevlastních bodů $\pm\infty$. Nechť $d(x)$ je vzdálenost bodu $(x, f(x))$ grafu funkce $f(x)$ od přímky s. Řekneme, že přímka s je asymptotou (grafu) funkce $f(x)$, jestliže platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} d(x) = 0$.



A) Situace, kdy asymptota <u>je limitním případem tečny</u> (ke grafu funkce v nevlastním bodě, tj. kdy dotykový bod se po grafu funkce vzdaluje do nekonečna). Jde o monotónní (asymptotický) charakter přibližování grafu funkce k asymptotě.



B) Situace, kdy asymptota $y = 0$ <u>není limitním případem tečny</u>. Graf kolem asymptoty se směrnicí $k = 0$ „<u>osciluje</u>“ (kmitá).

23.6 POZNÁMKA (fyzikální) Ve fyzice jde o <u>SLABĚ</u> (tj. $p^2 < m^2$) <u>TLUMENÉ HARMONICKÉ</u> (tj. periodické) <u>KMITÁNÍ</u>

$y = f(t) = A(t)\sin(\omega\cdot t + b) = \underbrace{a\cdot e^{-pt}}_{A(t)}\cdot\sin(\omega\cdot t + b)$, [$A(t)$ … je <u>amplituda</u> pohybu], s <u>periodou</u> $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{m^2 - p^2}}$, kde $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 0$, $2p > 0$ … je <u>součinitel odporu prostředí</u>, y je řešením diferenciální rovnice tlumeného harmonického kmitání $\ddot{y} + 2p\dot{y} + m^2 y = 0$, $m = \sqrt{K}$, kde K … je při mechanickém kmitání <u>tuhost</u> pružiny. Funkce $f(t)$ **není periodická**.

23.7 VĚTA (o směrnicové asymptotě) Přímka $y = kx + q$ je asymptotou (se směrnicí k a posunutím q) funkce $f(x)$, právě když pro $x\to+\infty$ (popř. $x\to-\infty$) existují dvě (vlastní) limity

$$\boldsymbol{k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}, \quad \boldsymbol{q = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right)}.$$

[Tedy mohou existovat nejvýše dvě takové]

24 VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE

0) Metoda **<u>ZIP</u>** (**<u>Z</u>**akreslujeme **<u>I</u>**hned **<u>P</u>**růběh), kdy načrtneme systém souřadnic a vše do něj budeme ihned průběžně vyznačovat, je velmi efektivní.

1) Určíme především jakousi <u>globální charakteristiku</u> funkce, tj. definiční obor D_f, zjednodušíme funkci (např. vydělením), určíme, zda je funkce lichá, sudá, či periodická. Dále zjišťujeme její nulové body (v nichž $f(x) = 0$), průsečíky s osou y (v nichž $x = 0$), znaménko. Zjistíme popř.

rovněž asymptoty, zvl. vertikální, v bodech, kdy obvykle $x_0 \notin D_f$, a ihned zakreslíme části grafu funkce v okolí těchto bodů x_0. Určíme limity v krajních bodech D_f.

2) $f'(x)$ upravíme; zjistíme podezřelé body z extrémů, tj. vyšetřujeme

A) stacionární body, kde $f'(x) = 0$. Např. mění-li f' znaménko ze záporného na kladné, popř. obráceně, pak v bodě $(x, f(x))$ ihned vyznačíme lokální extrém  popř. 
nebo vyšetřujeme

B) podezřelé body - hroty, kde $f'(x)$ neexistuje, ale existují (obecně různé) jednostranné derivace $f'(x+)$, $f'(x-)$.

3) Vypočítáme $f''(x)$ a upravíme; inflexe nastane, je-li $f''(x) = 0$, a navíc je $f'''(x) \neq 0$ (popř. i nevlastní) nebo využijeme změnu znaménka f''. Jestliže $f''(x) \neq 0$ není „komplikovaná“, lze též až nyní pomocí jejího znaménka určit lokální extrémy ve stacionárních bodech.

4) Zjistíme popř. až nyní asymptoty svislé, resp. se směrnicí a limity v krajních bodech D_f.

5) Odstraníme nesrovnalosti, spojíme lokální části grafu, popř. dosadíme vhodné kontrolní hodnoty argumentu, např. $x = 0, \pm 1, \pm\frac{\pi}{2}$ atd.

24.1 PŘÍKLAD NA VYŠETŘENÍ PRŮBĚHU FUNKCE $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$.

0) Metodou „**ZIP**“:

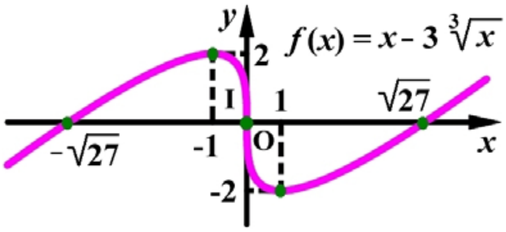
1) $D_f = \mathbf{R}$

$f(-x) = -x + 3\sqrt[3]{x} = -f(x)$ *lichá*

$f(x) = 0: \; x = 3\sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; x(x^2 - 27) = 0$

nulové body (*popř. asymptoty*):

$x_1 = 0,\, x_{2,3} = \pm\sqrt{27}$.



2) $$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \quad \textit{stacionární body}.$$

Mohlo by se „zdát“, že f' „neexistuje“ v bodě $x = 0$, ale zde je

$$f'(0-) = f'(0+) = -\infty \;\Leftrightarrow\; f'(0) = -\infty.$$

Tedy sjednocení polotečny zprava t_+ i zleva t_- dá tečnu t v počátku, která je kolmá k ose x.
V bodě $x = 0$ může být ještě inflexe.

3) $f''(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$. Je třeba vyšetřit f'' v bodě $x = 0$. Platí $f'' < 0$ pro $x < 0$, $f'' > 0$ pro $x > 0$, tj. f se mění z *konkávní* na *konvexní* a v bodě 0 jsou jednostranné 2. derivace různé (a nevlastní): konkrétně $f''(0-) = -\infty \neq +\infty = f''(0+)$. Proto podle 1. věty o postačující podmínce inflexe je v bodě $x = 0$ *inflexe* $\mathsf{I} = (0, 0)$. V bodě $x = 1$ je $f'' > 0 \;\Rightarrow\; f_{\mathrm{LMIN}\,(1)} = -2$, a jelikož je to lichá funkce $\Rightarrow f_{\mathrm{LMAX}\,(-1)} = 2$.

4) Asymptoty mohou být už jedině se směrnicí. Jelikož

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 - 3x^{\frac{1}{3}-1} \to 1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \to \underset{=}{1}, \text{ ale } q = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - k\cdot x] \to -3\sqrt[3]{x} \to \mp\infty,$$

asymptoty neexistují. Platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to x(1 - 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}) \to \pm\infty$, což je zřejmé i ze znaménka f''.

5) Nesrovnalosti nejsou.

Zajímavosti příkladu Hlavně typ inflexe s vertikální tečnou protínající graf v inflexním bodě. Derivace $f'(0) = -\infty$ je nevlastní a neexistuje $f''(0)$, neboť $f''(0-) = -\infty \neq +\infty = f''(0+)$.

V bodě O = (0, 0) je inflexe, což je ve shodě s definicí inflexního bodu. Je vidět, že rovnost jednostranných derivací (vč. nevlastních) je nutnou i postačující podmínkou existence derivace.

25 ✦ *CVIČENÍ* G ✦

201 Jeden z bývalých vysokoškolských učitelů oboru vinařství a vinohradnictví, nyní úspěšný podnikatel na Moravě ve stejném oboru, nabídl ve svém sklepě prémii z archivu skupině studentů oslavujících zkoušku z matematiky, jestliže za několik minut pomohou sklepmistrovi vyřešit následující úkol. Nepřiznal, že jeho řešení zná. Měli poradit, jak zhotovit pro dolití burčáku provizorní trychtýř o maximálním objemu z fólie, kterou bude kruhová výseč daného poloměru s neznámým středovým úhlem α ve stupních. Svinutím fólie vznikne plášť rotačního kužele – trychtýř. Po načrtnutí situace a krátkém výpočtu se studenti dožadovali odměny, neboť věděli, že sklepmistr musí z kruhu odstranit nepotřebnou kruhovou výseč o středovém úhlu $\beta = (360 - \alpha)$ o něco větším než $60°$ a samozřejmě věděli, jak oněch $60°$ bez úhloměru změřit. Určete α (už bez prémie). {{ ??? }}

202 Horní a dolní okraj obrazu na stěně je o a resp. b výše než optické čidlo robota $(a > b > 0)$. V jaké vzdálenosti má robot zastavit, aby výšku obrazu snímal (viděl) pod největším úhlem? {{ $\sqrt{ab}$ }}

203 Nedaleko firmy A vede po vytčené přímce k městu B železnice. Pod jakým úhlem α k železniční trati je nutné vést přímou silnici od A, aby doprava z A do B byla nejlevnější, bude-li dlouhodobě přeprava na silnici za 1 t / km oproti železnici m-krát dražší? {{ $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$, avšak musí platit $\frac{1}{m} \le \frac{l}{\mathrm{AB}}$, kde l je velikost kolmého průmětu AB do směru železniční trati }}

204 Provedli jste n měření neznámé hodnoty x určované veličiny a získali tak její hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ukažte, že součet $S(x) = \sum_{k=1}^{n}(x - x_k)^2$ čtverců všech odchylek $(x - x_k)^2$ (pro $k = 1, 2, \ldots, n$) bude minimální, je-li $x = (x_1 + x_2 + \ldots x_n)/n$, tj. pokládáte-li za hodnotu x určované veličiny **aritmetický průměr** výsledků vašich měření (tzv. **metoda nejmenších čtverců**, známá z mnoha oblastí matematiky).

205 Ve kterém bodě má graf funkce $y = \exp(x)$ nejmenší poloměr křivosti, víme-li, že $R = (1 + y'^2)^{3/2} \big/ |y''|$ je známý poloměr křivosti *oskulační kružnice*.[5)] {{ ??? }}

■ Vyšetřete průběh následujících funkcí (jenž bude samozřejmě završen náčrty jejich grafů)

206 $f(x) = x^{2/3}$ 215 245 {{ $D_f = \mathbf{R}$, sudá, v $x = 0$ je (ostré) $\mathrm{LMIN}(0) = \mathrm{GMIN}(0) = \mathrm{HROT}(0)$, v němž jak polotečna zleva t_-, tak polotečna zprava t_+ splývá s kladnou částí osy Oy, přičemž $f'(0\mp) = \mp\infty$, konkávní (pro $x \neq 0$); **graf „semikubické paraboly“** }}

207 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ {{ $f(x) = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, lichá, $f_{\mathrm{LMIN}}(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} = -f_{\mathrm{LMAX}}(-2\sqrt{3})$, inflexe $\mathrm{I} = (0, 0)$, $f(2\mp) = \mp\infty \Rightarrow$ symetricky pro $x = -2$, asymptoty $x = \pm 2$, $y = x$ }}

208 $y = x^4 + 4x^3$ {{ $(D_f = \mathbf{R})$, $f(-4) = 0$, $f_{\mathrm{LMIN}}(-3) = -27$, $\mathrm{I}_1 = (-2, -16)$, $\mathrm{I}_2 = (0, 0)$ }}

209 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ {{ ???; **Gaussova pravděpodobnostní křivka** }}

210 $f(x) = x + \arctan x$ {{ $D_f = \mathbf{R}$, lichá, rostoucí, $\mathrm{I} = (0, 0)$, asymptoty $y = x \pm (\pi/2)$ }}

211 $f(t) = 3t^{2/3} - 2t$ {{ $D_f = \mathbf{R}$, $f(0) = f(27/8) = 0$, $\mathrm{LMIN}(0) = \mathrm{HROT}(0)$, $f'(0\mp) = \mp\infty$, $f_{\mathrm{LMAX}}(1) = 1$ }}

212 $f(x) = \arcsin \sin x$ {{ $D_f = \mathbf{R}$, lichá, zákl. perioda $p = 2\pi$ „pilových kmitů“ z v hrotech pod pravým úhlem „lomených úseček“ (jež leží na polotečnách hrotů) a s „amplitudou“ $\pi/2$ }}

213 $f(x) = 4\ln x + x^2 - 6x$ {{ $D_f = \mathbf{R}^+$, $f(0+) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$, $f_{\mathrm{LMAX}}(1) = -5$, $f_{\mathrm{LMIN}}(2) = 4\ln 2 - 8$, $\mathrm{I} = (\sqrt{2}, 2 + 2\ln 2 - 6\sqrt{2})$, má nulový bod (najdeme graficky nebo pomocí Maple) $x_0 \doteq 4{,}68$ }}

[5)] Oskulační kružnice $y(x)$ má v jistém svém bodě $\mathrm{T} = (x^*, y^*)$ s grafem funkce $y = f(x)$ styk 2. řádu, tj. tyto funkce mají v příslušném bodě x^* stejné hodnoty i stejné derivace až do 2. řádu včetně.

214 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$ {{ $D_f=\mathbf{R}$, v hrotu $\mathrm{H}(0)=\mathrm{LMAX}$, je $f_{\mathrm{H}}(0)=0$, $f'(0\mp)=\pm\infty$, kdy obě polotečny v něm splývají se zápornou částí osy Oy, $f_{\mathrm{LMIN}}(4)=-2\sqrt[3]{4}$, v 6 je nulový a inflexní bod s **vertikální tečnou** (protínající graf), kde $f'(6)=+\infty$, **graf protíná asymptotu** $y=x-2$ v bodě $(2/3,-4/3)$ }}

215 přičemž zde vyšetřujte funkci f^*, která vznikne spojitým rozšířením (prodloužením spojitosti) funkce $f(x)=x\arctan(1/x)$ v jejích bodech odstranitelné nespojitosti.

{{ graf f^* na $\mathbf{R}$ připomíná graf z příkladu **206** s tím, že $f'(0\mp)=\mp\pi/2$, asymptota $y=1$ }}

216 Hmotnost m částice závisí podle Einsteinovy teorie relativity na rychlosti v vzhledem ke vztažné soustavě podle vztahu $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, kde $v\geq 0$; $m_0, c\in\mathbf{R}^+$. Vyšetřete průběh funkce $m(v)$ (a načrtněte jej). {{ ??? }}

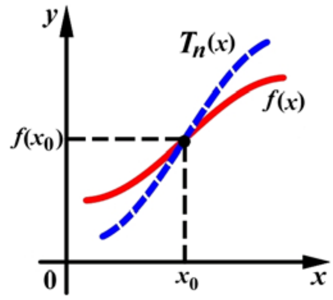
217 Zkuste si vyřešit průběh funkce $y=\dfrac{\left|(x-1)^3\right|}{2(x+1)^2}$. {{ $D_y=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $f(-1\mp)=+\infty$, tj. svislá asymptota $x=-1$, $f_{\mathrm{LMIN}_1}(-5)=\dfrac{27}{4}$, $f_{\mathrm{LMIN}_2}(1)=0$, konvexní; (šikmé) asymptoty $y=\mp\dfrac{x}{2}\pm\dfrac{5}{2}$ }}

26 TAYLORŮV POLYNOMICKÝ ROZVOJ FUNKCE A POZNÁMKY K JEHO VÝZNAMU

26.1 MOTIVACE Zabývejme se úlohou, zda lze „komplikovanou“ funkci $f(x)$, která má v jistém okolí bodu x_0 vlastní derivace do určitého řádu $n+1$

1) v „dostatečně malém“ okolí bodu x_0

2) s „dostatečnou“ přesností



aproximovat (aproximace = přibližnost), tj. přibližně nahradit polynomem $T_n(x)$ n-tého stupně. Důvod k této časté úloze v přibližných, tj. v numerických metodách je ten, že s polynomy se dobře pracuje. Mají mj. derivace všech řádů, rovněž integrace je snadná a ovšem i vyčíslení hodnot polynomu je snadné. Chceme tedy, aby pro polynom (jehož graf prochází bodem $(x_0, f(x_0))$) ve tvaru

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n \quad \text{neboli ve tvaru}$$

$$T_n(x)=a_n(x-x_0)^n+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\ldots+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_1(x-x_0)^1+a_0$$

v bodě $x=x_0$ platilo

$$f(x_0)=T_n(x_0),\ f'(x_0)=T_n'(x_0),\ f'(x_0)=T_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=T_n^{(n)}(x_0),\ \text{tj. obecně, aby}$$

$$\underline{f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0)\ \text{ pro } k=0,1,2,\ldots,n.}$$

Říkáme, že polynom $T_n(x)$ má s křivkou (grafem) $y=f(x)$ v bodě x_0 **styk (dotyk)** alespoň n-tého řádu. Vypočítáme-li derivace $T_n^{(k)}(x_0)$, dostáváme

$$\begin{array}{llllll}
T_n(x) & = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots & & +a_n(x-x_0)^n & \Rightarrow & T_n(x_0)=a_0\\
T_n'(x) & = \quad a_1 \quad +2a_2(x-x_0)+\ldots & & +n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1} & \Rightarrow & T_n'(x_0)=a_1\\
T_n''(x) & = & 2a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+\ldots & +n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-2} & \Rightarrow & T_n''(x_0)=2a_2\\
T_n'''(x) & = & 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3+\ldots & +n\cdot(n-1)(n-2)\cdot a_n(x-x_0)^{n-3} & \Rightarrow & T_n'''(x_0)=3!\,a_3\\
\bullet\bullet\bullet & & & & & \bullet\bullet\bullet\\
T_n^{(n)}(x)= & & & n!\,a_n & \Rightarrow & T_n^{(n)}(x_0)=n!\,a_n.
\end{array}$$

Dostáváme tedy, že pro styk n-tého řádu $T_n(x)$ s grafem funkce $f(x)$ musí být

$$T_n^{(k)}(x_0)=k!a_k=f^{(k)}(x_0)\Rightarrow \underline{\underline{a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}},\quad \text{pro } k=0,1,2,\ldots,n.$$

Hledaný Taylorův polynomický rozvoj funkce lze proto zapsat ve tvaru (vzestupném)

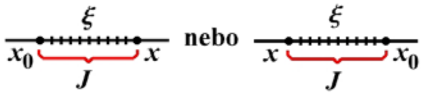
$$\underline{\underline{T_n(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =}}$$

$$\underline{\underline{= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{26.1}$$

a nazývá se **Taylorův polynom** (Angličan Brook Taylor 1685 - 1731) $T_n(x)$ stupně n funkce $f(x)$ na okolí $O(x_0)$ bodu x_0, též v bodě x_0.

26.2 POZNÁMKA 1 K VÝZNAMU TAYLOROVY VĚTY Protože $T_n(x) \approx f(x)$, tj. $T_n(x)$ je pouze aproximace funkce $f(x)$ na okolí $O(x_0)$, je rozdíl $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ na $O(x_0)$ funkcí proměnné x. Pak rozdíl $\boldsymbol{R_n(x)}$ se nazývá **Taylorův zbytek** funkce $f(x)$ na okolí $O(x_0)$ bodu x_0. Velikost chyby ε aproximace je vlastně $|\varepsilon| = |R_n(x)|$ na $O(x_0)$.

26.3 VĚTA TAYLOROVA[2.12] Nechť $x_0, x \in \mathbf{R}$ jsou dvě různá čísla, tj. $x_0 \neq x$, která jsou zároveň krajními body uzavřeného intervalu J, tj. $J = [x_0, x]$, když $x_0 < x$ nebo $J = [x, x_0]$, když $x < x_0$.



Nechť funkce $f(x)$ má na J spojité derivace do n-tého řádu včetně ($n \geq 0$), což označíme $f \in C^{(n)}(J)$, a navíc aspoň uvnitř intervalu J existuje derivace $f^{(n+1)}(x)$. Potom existuje bod $\xi \in (x_0, x)$, popř. $\xi \in (x, x_0)$ (tj. mezi body x_0, x), že platí **Taylorův vzorec** $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, podrobněji

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)}, \tag{26.2}$$

kde $R_n(x)$ je zbytek po n-tém Taylorově polynomu $T_n(x)$ v bodě x_0; lze jej vyjádřit v některém ze čtyř tvarů (zbytek = remainder – anglicky, = (der) Rest – německy)

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}} \qquad \text{LAGRANGEŮV tvar zbytku} \tag{26.3}$$

[[$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}$, kde $\theta \in (0,1)$ (Cauchyův tvar)

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n-1)}(\xi)}{n!} \dfrac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p}(x-x_0)^{n+1}$ (Schlömilchův tvar, z nějž pro

1) $p = n + 1$ dostaneme Lagrangeův tvar,
2) $p = 1$ dostaneme Cauchyův tvar)

$R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t$ (integrální tvar)]],

přičemž blíže neurčený bod $\xi \in J$ lze vyjádřit pomocí blíže neurčeného čísla $\theta \in (0, 1)$ ve tvaru

$$\underline{\underline{\xi = x_0 + (x - x_0)\cdot\theta, \quad 0 < \theta < 1,}}$$

kde θ je při dané funkci $f(x)$ závislé na n, x, x_0 (popř. na p u Schlömilchova tvaru).

26.4 POZNÁMKA 2 Při předešlém označení lze Taylorův vzorec psát v diferenciálním tvaru

$$\underline{\underline{f(x)}} = f(x_0) + \frac{\mathrm{d} f(x_0)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{n!} + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{k!} + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}}}, \tag{26.4}$$

neboť víme, že $\mathrm{d}^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)\cdot(x - x_0)^k$.

26.5 POZNÁMKA 3 Pro $n = 0$ dostáváme z Taylorovy věty $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, což je vzorec z **Lagrangeovy věty o střední hodnotě** (též: o přírustku funkce) **diferenciálního počtu**, uvedené dále.

26.6 POZNÁMKA 4 Lze ukázat, že existuje-li Taylorův polynom $T_n(x)$, existuje vždy právě jeden, a navíc ze všech polynomů $Q_n(x)$ stupně n procházejících uvažovaným bodem x_0 nejlépe aproximuje funkci $f(x)$ v uzavřeném okolí J bodu x_0, tj. platí:

$|f(x) - T_n(x)| \le |f(x) - Q_n(x)|$ $\forall\, Q_n(x)$ $\forall\, x \in J$, tedy je to nejlepší lokální aproximace.

26.7 POZNÁMKA 5 – VÝZNAM Taylorova vzorce spočívá v možnosti odhadu velikosti chyby $|\varepsilon|$ aproximace, tj. $|\varepsilon| = |R_n(x)|$, na uzavřeném intervalu J.

26.8 POZNÁMKA 6 Je-li výchozí bod $x_0 = 0$ (tj. leží v počátku), pak jde o speciální, tzv. Maclaurinův vzorec [Colin Maclaurin (1698 - 1746), skotský matematik (stejně jako Rowan Hamilton)]

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{\text{Maclaurinův polynom } M_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)}, \text{ kde } \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1).} \qquad (26.5)$$

26.9 PŘÍKLAD Pomocí výpočtu derivací a Lagrangeových tvarů zbytku lze vyjádřit Maclaurinovy polynomické rozvoje vhodné k zapamatování následujících tří elementárních funkcí takto:

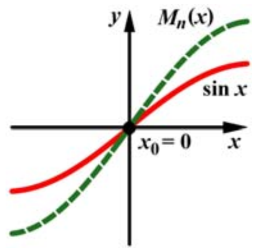
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \overbrace{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]!}\cdot\cos(\theta x)}^{\boldsymbol{R_n(x)}}, \quad \theta \in (0, 1), x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\cdot\cos(\theta x), \quad \theta \in (0, 1), x \in \mathbf{R},$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad \theta \in (0, 1), x \in \mathbf{R},$$

kde $n \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbf{N}$ atd. Přitom $\theta \in (0, 1)$ je pro různé funkce různé.

26.10 PŘÍKLAD Aproximujme funkci $y = \sin x$ v okolí počátku polynomem 4. stupně a odhadněme velikost chyby $|\varepsilon|$.



Řešení: Protože $x_0 = 0$, užijeme Maclaurinův polynom $M_4(x)$ a Lagrangeův tvar zbytku $R_4(x)$ pro určení chyby ε.

Tedy $\sin x \approx M_4(x)$

$\sin x = M_4(x) + R_4(x)$ ($R_4(x)$…zbytek po 4. mocnině x)

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin x \,\big|_{x=0} = 0 \\ f'(x) &= \cos x \,\big|_0 = 1 \\ f''(x) &= -\sin x \,\big|_0 = 0 \\ f'''(x) &= -\cos x \,\big|_0 = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \,\big|_0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4(x).$$

Pro zbytek $R_4(x)$ potřebujeme 5. derivaci v bodě $\xi = x_0 + (x - x_0)\theta = 0 + (x - 0)\theta = \theta x$, $(0 < \theta < 1)$. Tedy

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \underline{\underline{\frac{\cos\theta x}{5!}x^5}}, \ (0 < \theta < 1).$$

Dále je $|\cos(\theta x)| \le 1$. Uvažujme pro jednoduchost uzavřený symetrický interval podle počátku o poloměru 1/10, tj. nechť $x \in [-1/10,\ 1/10] = J$. Pro velikost chyby $|\varepsilon|$ aproximace je

$$|\varepsilon| = |f(x) - M_4(x)| = |R_4(x)| \le \frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{12\,000\,000} = 8{,}3\cdot 10^{-8} < 50\cdot 10^{-8} =$$

$0{,}5\cdot 10^{-6} = 0{,}5\cdot 10^{-D}, \,|\,\varepsilon\,| < \underline{\underline{0{,}5\cdot 10^{-D}}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{D} = 6$ **je počet přesných číslic** (za desetinnou čárkou).

Tedy na uvažovaném uzavřeném intervalu J je polynomem $M_4(x)$ dosaženo přesnosti aproximace na 6 desetinných míst, tj. na miliontiny, je-li zanedbatelný vliv zaokrouhlovacích chyb.
Pro vyšší přesnost (tj. menší chybu ε) bychom museli buď zmenšit interval J (zmenší se x) nebo vzít více členů polynomu (zvětší se faktoriál).

26.11 POZNÁMKA 7 [217] V aplikacích se často využívá **zobecněná binomická věta**: Platí

$$\boxed{(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \ldots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x),\ r\in\mathbf{R}!!,\ x\in J\ \text{(Viz další poznámku o } J)}\,, \tag{26.6}$$

kde $R_n(x) = \binom{r}{n+1}(1+\theta x)^{r-n+1}\cdot x^{n+1},\ \ \theta\in(0,1)$, a kde zobecněný binomický koeficient $\binom{r}{n}$ definujeme (jelikož $r\in\mathbf{R}$, nemusí obecně $r!$ existovat) takto $\binom{r}{n} := \dfrac{\overbrace{r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}^{r-(n-1)}}{n!}$.

Věta je vlastně jen Maclaurinův rozvoj funkce $(1+x)^r$. Pro $r = n \in \mathbf{N}^*$ jde o klasickou větu.

26.12 PŘÍKLAD Jestliže např.

$$r = -\sqrt{2} \Rightarrow \binom{-\sqrt{2}}{3} = \frac{-\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}-1\right)\left(-\sqrt{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{6}\left(2+\sqrt{2}\right)(-1)\left(\sqrt{2}+2\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}+2\right)^2}}\text{, atd.}$$

26.13 POZNÁMKA Pomocí teorie mocninných řad lze ukázat, že v zobecněné binomické větě je $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, jestliže

a) pro $r > 0$ je $x \in [-1, 1] = J$ a
b) pro $r < 0$ je (pouze) $x \in (-1, 1) = J$. Říkáme pak, že na odpovídajícím intervalu J příslušná (nekonečná) binomická řada (rozvoj) konverguje a píšeme

$$\underline{\underline{(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n \text{ pro } x\in J.}}$$

26.14 PŘÍKLAD Rozveďme funkci $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}$ v (nekonečný) binomický rozvoj (řadu)

s využitím vzorce $(a+b)^r = a^r\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^r = a^r(1+x)^r$, v němž $0 < |\,b\,| < a$.

Ad **b**) Protože $r = -2/3 < 0$, musíme uvažovat jen otevřený interval. Podle vzorce máme $y = \left(2+x^3\right)^{-2/3} = \left[2\left(1+x^3/2\right)\right]^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1+x^3/2\right)^{-2/3}$.

Dále ad b) musí být $-1 < \dfrac{x^3}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x^3 < 2 \Rightarrow \underline{\underline{x\in\left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)}}$. Binomické koeficienty jsou

$$\binom{-2/3}{1} = -\frac{2}{3},\quad \binom{-2/3}{2} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}-1\right)}{2!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{9},$$

$$\binom{-2/3}{3} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}-2\right)}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{40}{81} \quad \text{atd. Tedy}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1+z\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1-\frac{2}{3}z+\frac{5}{9}z^2-\frac{40}{81}z^3+\ldots\right) \overset{\left(z=x^3/2\right)}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{36}x^6-\frac{5}{81}x^9+\ldots\right) \quad \text{pro } x\in\left(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right).$$

26.15 PŘÍKLAD Zkuste si napsat binomický rozvoj funkce $y=\sqrt[5]{\left(3-x^2\right)^4}$. Zde může $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

26.16 POZNÁMKA 8 – POUŽITÍ TAYLOROVA VZORCE [41] k vyšetřování průběhu funkce v okolí bodu vyššími derivacemi umožňuje následující tvrzení:

26.17 PRAVIDLO k určení lokálních vlastností funkce z první nenulové *k*-té derivace v bodě
Zkoumáme-li lokální extrémy funkce *f*, pak počítáme derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, … tak dlouho, až obdržíme první číslo (konečné) $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, $k\in\mathbf{N}^*$, [tj. je $f'(x_0)=0,\ldots,f^{(k-1)}(x_0)=0$].

1) Je-li k <u>sudé</u> číslo ($k\geq 2$), pak
- **a)** pro $f^{(k)}(x_0)>0$ má f v bodě x_0 (ostré) lokální <u>MINIMUM</u>,
- **b)** pro $f^{(k)}(x_0)<0$ má f v bodě x_0 (ostré) lokální <u>MAXIMUM</u>.

2) Je-li k <u>liché</u> číslo ($k\geq 3$), pak v bodě x_0 nemá f extrém a je zde <u>INFLEXNÍ BOD</u>, přitom
- **a)** pro $f^{(k)}(x_0)>0$ je f v bodě x_0 <u>ROSTOUCÍ</u>,
- **b)** pro $f^{(k)}(x_0)<0$ je f v bodě x_0 <u>KLESAJÍCÍ</u>.

Pravidlo nelze použít, když **1)** $f^{(k)}(x_0)$ <u>neexistuje</u>.
2) $f^{(k)}(x_0)=0$ pro libovolná k. [6)]

26.18 PŘÍKLAD Ověřte pravidlo na známých funkcích $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$, tj. na parabolách 3. a 4. stupně. Načrtněte si.

27 ✦ *CVIČENÍ* H ✦

27.1 POZNÁMKA Mimořádný význam Taylorova vzorce pro matematiku a aplikované obory, zvl. však pro numerickou matematiku spočívá v následujících 3 typech přibližných výpočtů, jež můžeme pro danou funkci $f(x)$ splňující na uzavřeném intervalu J s koncovými body x_0, x předpoklady Taylorovy věty i pro její Taylorův polynom $T_n(x)$ n-tého stupně v bodě x_0, dále pro velikost $|\varepsilon|$ chyby aproximace ε a pro (horní) odhad velikosti uvažované chyby $|\varepsilon_0|$ (odhad zbytku $R_n(x)$), formulovat takto:

1. Najít co možná nejmenší n pro dané x, aby
$$|\varepsilon|=|f(x)-T_n(x)|<|\varepsilon_0|. \quad [49] \qquad (27.1)$$
2. Najít takové n, aby nerovnost (27.1) platila pro všechna x z daného intervalu $[a,b]$.
3. Najít interval při daném n, v němž platí nerovnost (27.1).

Poznamenejme, že zatímco úloha 3 má vždy řešení, úlohy 1, 2 nemusí mít řešení [6)].

■ Odvoďte níže uvedený Taylorův vzorec (vč. odhadu Lagrangeova zbytku $R_n(x)$ po $T_n(x)$) pro níže uvedenou funkci $f(x)$, jestliže

218 $f(x)$ je polynom n-tého stupně, pro jehož Taylorův rozvoj podle mocnin $(x-x_0)$ platí
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$
$\{\!\{$ jelikož $f^{(n+1)}(x)=0$, je $R_n(x)=0$ $\}\!\}$

219

[6)] jak dokládá příklad *Cauchyho funkce* $C(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ definované na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ a dodefinované (spojitým rozšířením) v nule takto $C(0):=0$. V bodě $x_0=0$ nelze totiž $C(x)$ vyjádřit Maclaurinovým polynomem $M_n(x)$, neboť $M_n(x)$ je roven nule $\forall n\in\mathbf{N}^*$ $\forall x\in\mathbf{R}$. Graf funkce $C(x)$ připomínající „dolů otočenou" Gaussovu pravděpodobnostní křivku $y=\mathrm{e}^{-x^2}$, který má ostré lokální minimum v $x=0$ a je shora ohraničen asymptotou $y=1$, má v počátku O s osou Ox styk řádu $n\to+\infty$, takže v okolí O s touto osou téměř splývá.

$f(x)$ je r-tá mocnina lineárního dvojčlenu $(1+x)$, $r \in \mathbf{R}$, $x \in (-1, 1)$, pro kterou je

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \ldots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x), \quad R_n(x) = \binom{r}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{r-n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

⦃ jde, viz 26.11, o Maclaurinův vzorec alias zobecněnou binomickou větu ⦄

220 $f(x) = \ln(1+x)$, pro niž při $x \in (-1, 1]$ má Maclaurinův vzorec tvar

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1).$$

⦃ pro odhad zbytku je $|R_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$ ⦄

■ Využijte známý Maclaurinův polynom pro funkci $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$ a určete opět Maclaurinův polynom $M_n(x)$ pro následující funkci tak, že do známého vzorce dosadíte zcela formálně vhodný argument proměnné x (správnost počínání si lze ověřit vyjádřením všech derivací a dosazením do obecného vzorce), je-li

221 $f(x) = e^{-x}$ ⦃ $e^{-x} \approx M_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^k}{k!}$ ⦄

222 e^{-x^2} ⦃ $e^{-x^2} \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{k!}$ ⦄

223 $\cos 3x$ ⦃ $\cos 3x \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$ ⦄

224 $\sin x \cos x$ ⦃ $\dfrac{1}{2}\sin(2x) \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$ ⦄

225 $x^3 \ln(1+x)$ ⦃ $x^3 \ln(1+x) \approx x^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ ⦄

■ Pomocí Taylorova polynomu $T_n(x)$ n-tého stupně funkce f v bodě x_0 a Lagrangeova zbytku $R_n(x)$ po $T_n(x)$ určete následující funkci

226 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 5$, $n = 3$ ⦃ $f(x) = T_n(x) + R_n(x) =$

$$[\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2}(x-5) + \frac{1}{5^3}(x-5)^2 - \frac{1}{5^4}(x-5)^3] + (x-5)^4 \cdot \frac{1}{\xi^5} = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k 5^{-(k+1)}(x-5)^k + (x-5)^4\xi^{-5}$$ ⦄

227 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $x_0 = 0$, $n = 6$ ⦃ $\cosh x = [1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!}] + \dfrac{e^\xi - e^{-\xi}}{2 \cdot 7!}x^7 =$

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\sinh \xi}{7!}x^7$$ ⦄

228 $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$, $n = 3$ a výsledek využijte k možnosti vyjádřit Ludolfovo číslo π tak, že do polynomického rozvoje, jejž určíte, dosadíte za x vhodnou hodnotu, kterou je $x = 1$. Tím zjistíte, že číslo $\pi/4$ je součtem nekonečně mnoha členů číselné řady se střídavými znaménky – tzv. *alternující řady*, jinak řečeno, ta *řada konverguje* k $\pi/4$, což vyjadřují rovnosti

$$(\arctan 1 =)\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \overbrace{\frac{1}{2n-1}}^{a_n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k-1} + R_n.$$

Stanovte, jaký počet n členů této alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/(2n-1)$ musíte sečíst, aby $\pi/4$ bylo přesné na 2 desetinná místa, víme-li podle věty o odhadu zbytku $R_n(x)$ konvergentní alternující řady, že pro tuto řadu (mj.) platí

$$|R_n| < a_{n+1} \quad (\text{ kde v našem příkladě je } a_n = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1})$$

neboli, že *zbytek* $R_n(x)$ *alternující řady* (což je opět nekonečná řada vzniklá vynecháním prvních n členů alternující řady) *je v absolutní hodnotě menší než první z vynechaných členů*[7]. Stanovte počet n též pro číslo π.

---

[7] neboť jsou splněny oba předpoklady věty, že posloupnost členů $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ je klesající a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/(2n-1) = 0$

{{ $\arctan x = [\,x - \dfrac{x^3}{3}\,] - 24\dfrac{(\xi^2-1)\xi}{(\xi^2+1)^4}x^4 = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dots$; pro $\pi/4$ je třeba sečíst aspoň 100 členů; ??? }}

229 Nalezněte horní odhad velikosti chyby ε_0, aproximujeme-li funkci e^x jejím Taylorovým polynomem $T_3(x)$ v bodě $x_0 = \dfrac{1}{2}$ na intervalu $[0, 1]$.

{{ $\mathrm{e}^x \approx T_3(x) = \sqrt{\mathrm{e}} \cdot \sum\limits_{n=0}^{3} \dfrac{1}{n!}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^n$ s přesností na 1 desetinné místo, je-li $0 \le x \le 1$ }}

28 DERIVACE FUNKCE DANÉ PARAMETRICKY. POJEM IMPLICITNÍ FUNKCE

28.1 PŘÍKLAD Známe např. parametrické rovnice elipsy $K : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,, \; t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

28.2 DEFINICE Mějme dvě spojité funkce $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definované pro parametr t z oboru parametru, tj. $t \in [\alpha, \beta] = M$ (je interval). Pak množina K všech bodů v $\mathbf{E_2}$ tvaru $K = \{(\varphi(t), \psi(t));\ t \in [\alpha, \beta]\}$ se nazývá křivka K v rovině. Rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in M$, se nazývají parametrické rovnice křivky K a bod $\mathsf{A} = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, resp. $\mathsf{B} = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$ se nazývá počáteční, resp. koncový bod křivky při daných parametrických rovnicích a oba jsou krajními body křivky. Je-li $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, resp. $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$, nazývá se K uzavřená, resp. otevřená křivka.

28.3 POZNÁMKA Předešlá **definice křivky** K v rovině $\mathbf{E_2}$ **je velmi obecná**. Uvědomme si rovněž, že každou křivku lze zapsat (parametrizovat) nekonečně mnoha dvojicemi parametrických rovnic. Např. úsečku $K = \mathsf{OA}$ danou body $\mathsf{O} = (0, 0)$, $\mathsf{A} = (1, 1)$ v $\mathbf{E_2}$ lze vyjádřit **bodovým zobrazením** $\Phi : M \to \mathbf{E_2}$ oboru parametru M do $\mathbf{E_2}$, kde $K = \Phi(M) = \{\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbf{E_2} \,|\, t \in M\}$, např. jako $\Phi_1 :\ x = t,\ \ y = t,\ \ t \in [0, 1] = M_1$ nebo jako $\Phi_2 :\ x = 1 - t,\ \ y = 1 - t,\ \ t \in [0, 1] = M_1$ nebo $\Phi_3 :\ x = 2t,\ \ y = 2t,\ \ t \in [0, 1/2] = M_3$ atd. Abychom vyloučili, že by nějaká křivka K obsahovala dva různé body (x, y_1) a (x, y_2) se stejnou 1. a různými 2. souřadnicemi pro $t_1 \neq t_2$, tj. aby jistá podmnožina křivky mohla vůbec **být grafem funkce** y argumentu x, musí být v našem případě první **složka zobrazení** Φ, tj. funkce $x = \varphi(t)$, na nějakém intervalu $J \subseteq M$ **prostá**. Dále se obvykle přinejmenším vyžaduje, aby na grafu takové explicitní funkce $h(x)$ **existovala jediná tečna**. Takové požadavky respektuje následující

28.4 VĚTA 30.12 90 **o derivaci funkce dané parametricky** **1)** Nechť funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ v rovnicích $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, jsou spojité na intervalu M (tj. definují na M rovinnou křivku K), a nechť první z funkcí $\varphi(t)$ je prostá na podintervalu $J \subseteq M$. Pak existuje spojitá funkce $h(x)$ (jejíž graf je podmnožinou křivky K) argumentu x

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) =: h(x),$$

o které říkáme, že je **daná parametricky** rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$, a která je definovaná na oboru $D_h = \varphi(J) \equiv H(\varphi|_J)$, kde D_h je obor hodnot funkce $\varphi(t)$, a kde $\varphi^{-1}(x)$ je inverzní funkce k funkci $\varphi(t)$ (definovaná na D_h). **2)** Nechť funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ mají na intervalu J_1 derivace $\dot\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, $\dot\psi(t) = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ (tj. jsou tam spojité), přičemž první z funkcí má $\dot\varphi(t) \neq 0$ pro každé t z J_1 (tj. φ je na J_1 prostá). Pak existuje diferencovatelná funkce $h(x)$ **daná parametricky** rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J_1$, která je definovaná na oboru $D_h = \varphi(J_1)$ a její derivaci $h'(x)$ počítáme vzorcem

$$\boxed{h'(x)=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}}\,,\quad t\in J_1\,.$$

(Skutečnost, že rovněž h' je dána parametricky dvěma následujícími parametrickými rovnicemi, vyjádří zápis

$$h':\ x=\varphi(t)\,,\quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\,,\quad t\in J_1\,)$$

DŮKAZ: První část věty je snadným důsledkem vyjádření $y=h(x)=\psi(\varphi^{-1}(t))$, věty o spojitosti složené funkce a věty o spojitosti inverzní funkce. Druhá část věty plyne z věty o derivaci složené funkce a z věty o derivaci inverzní funkce, kdy

$h'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\left(\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\right)\cdot\underline{\underline{\left(\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}\right)}}=\dot\psi(t)\cdot\left[\varphi^{-1}(x)\right]'=\dot\psi(t)\cdot\underline{\underline{\dfrac{1}{\dot\varphi(t)}}}$, neboť víme, že inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$

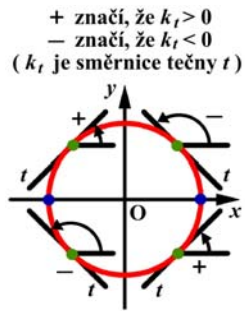
má derivaci $\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{\dot\varphi(t)}$ pro $\dot\varphi(t)\neq 0$.

28.5 POZNÁMKA Podobně odvodíme (přes derivaci funkce složené a inverzní), že pro druhou derivaci platí

$$\boxed{h''(x)=\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{\ddot\psi\,\dot\varphi-\dot\psi\,\ddot\varphi}{(\dot\varphi)^2}\cdot\frac{1}{\dot\varphi}}\,,$$

jsou-li $\ddot\varphi(t),\ddot\psi(t)$ spojité na J_2 a na J_2 je stále $\dot\varphi(t)\neq 0$, $D_{h''}=\varphi(J_2)$.

DŮKAZ:
$$h''(x)=\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)\cdot\underline{\underline{\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x}}}=\frac{\ddot\psi\,\dot\varphi-\dot\psi\,\ddot\varphi}{\dot\varphi^2}\cdot\frac{1}{\dot\varphi}\,.$$



28.6 PŘÍKLAD [252] Mějme rovinnou křivku K_h: $x=\overbrace{a\cos t}^{\varphi}$, $y=\overbrace{a\sin t}^{\psi}$, $t\in[0,\pi]=M_h$, $a>0$. Jelikož je funkce $\varphi(t)=a\cos t$ klesající na M_h, existuje k ní inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)=\arccos(x/a)$ na $[-a,a]$. Vyloučením parametru t dostaneme funkci $h(x)$ danou parametricky v explicitním tvaru vzhledem k x ve vyjádření $y=h(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))=a\sin(\arccos(x/a))=$

$a\sqrt{1-(x/a)^2}=\sqrt{a^2-x^2}$ a s definičním oborem $D_h=[-a,a]$. Grafem funkce h je **horní polokružnice** K_h. Podobně pro křivku K_d s týmiž parametrickými rovnicemi, avšak pro $t\in[\pi,2\pi]=M_d$, bychom našli (s využitím toho, že $\sin t\le 0$ pro $t\in M_d$) funkci $y=d(x)=$ $-\sqrt{a^2-x^2}$, definovanou opět pro $x\in D_h$, jejímž grafem je **dolní polokružnice** K_d. Tedy celou kružnici K nelze získat jedinou funkcí, ale pouze sjednocením grafů dvou funkcí $h(x)$, resp. $d(x)$ daných parametricky, tj. $K=G_h\cup G_d$. Nyní vyjádříme derivaci h'.

1) Podle vzorce z předešlé věty je

$h'(x)=\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\dfrac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=\underline{\underline{-\cot t}}$, přitom $\dot\varphi(t)=-a\sin t\neq 0$ pro $t\notin\{0,\pi\}$, tedy pro $x\neq\pm a$.

Parametrické vyjádření derivace h' je tedy

$$h':\ x=a\cos t\,,\quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\cot t\,,\quad t\in(0,\pi)\,.$$

Zkoumejme ještě h' v krajních bodech $D_h=D_{h'}$. V bodě $x=a$ platí $t=0$, $\dot\varphi=0$, $\dot\psi=b$. V dostatečně malém pravém okolí bodu $t=0$, kde $x<a$, je $\dot\varphi<0$ a $\dot\psi>0$, tedy je $h'(a-)=-\infty$.

Analogicky obdržíme $h'(-a+) = +\infty$ (pro $t \to \pi-$), což je v souladu s obrázkem. Funkce h má v krajních bodech definičního oboru (jak vzhledem k $t \in M_h$, tak vzhledem k $x \in D_h$) nevlastní jednostranné derivace.

2) Derivací funkce složené $y = h(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = a \sin\left(\arccos \frac{x}{a}\right)$ máme rovněž:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h'(x) = a \underbrace{\cos\left(\arccos(x/a)\right)}_{\equiv(x/a)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\right) \cdot \frac{1}{a} = -\frac{x}{a} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{a^2}}^{=|a|=a}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \underline{\underline{-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}} =$$

$$-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}} = -\frac{\cos t}{|\sin t|} = \underline{\underline{-\cot t}},$$ což je formálně totéž, přičemž jsme využili toho, že $\sin t > 0$ pro $t \in (0, \pi)$, kde t je směrový úhel tečny.

28.7 POZNÁMKA [3.7] Druhý způsob výpočtu derivace jsme ukázali jen pro porovnání. Často ani není realizovatelný, a to v případech, kdy inverzní funkce $\varphi^{-1}(x)$ k funkci $\varphi(t)$ sice existuje, když je $\varphi(t)$ prostá, avšak funkci φ^{-1} nelze explicitně vzhledem k argumentu x vyjádřit. Z příkladu 3.7 víme, že nelze k funkci $f(t) = \mathrm{e}^{-t} - t$ vyjádřit inverzní funkci $\varphi^{-1}(x)$ žádným zápisem, přestože její existence je zaručena. Z rovnice $x = \mathrm{e}^{-t} - t$ totiž nelze vyjádřit t.

28.8 POZNÁMKA O IMPLICITNÍ FUNKCI [155.1] V matematice i aplikacích často nevystačíme s funkcemi danými rovnicí $y = f(x)$, kde f jsou funkce, jimiž jsme se až po tuto kapitolu zabývali, a kterým též říkáme *explicitní* funkce. Víme, že např. *anulovanou rovnicí* $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, kde a je kladná konstanta, je v rovině dána křivka – **kružnice** (se středem v počátku $(0, 0)$ a poloměrem a). Víme také, že kružnici nelze vyjádřit jako graf jediné *explicitní funkce*, ale lze ji definovat *parametrickými rovnicemi* (a to nekonečně mnoha způsoby).

V předmětu Matematika II (skriptum **[3]**) budeme uvažovat případy vztahů mezi proměnnými x a y (popř. dalšími proměnnými), pro jejichž popis bude vhodná následující definice:

Mějme anulovanou rovnici $F(x, y) = 0$ a množinu všech bodů $\mathsf{X} = (x, y)$ roviny, které jí vyhovují, označme M. Řekneme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje implicitně funkci jedné proměnné $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$ na „okolí“ bodu $\mathsf{X}_0 = (x_0, y_0) \in M$ nebo obráceně, že na onom okolí je funkce $y = \varphi(x)$, resp. $x = \psi(y)$ daná implicitně, či stručně, že je to implicitní funkce určená rovnicí $F(x, y) = 0$ na okolí bodu X_0, jestliže platí (identická) rovnost

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x),\ \text{resp. } x = \psi(y), \quad \text{pro každý bod z okolí bodu } \mathsf{X}_0.$$

[*Implicitně* znamená nepřímo vyjádřeně, skrytě, *explicitně* znamená přímo vyjádřeně, zřetelně]

29 ✦ *CVIČENÍ* I ✦

■ Eliminujte parametr t z parametrických rovnic křivky

230 $x = \sqrt{3}\,t$, $y = 9t^2 - \sqrt{3}\,t$, $t \in \mathbf{R}$ {{ ??? }}

231 $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sin 2t$, $t \in \mathbf{R}$. {{ $y = x\sqrt{2-x^2}$, $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,]$ }}

232 Ukažte, že každá (spojitá) funkce $y = f(x)$, $x \in [a, b] = M$ je zároveň dána parametricky na M, tedy ji tak zapište a stanovte její derivaci. {{ $x = t$, $y = f(t)$, $t \in M$; $\underline{\underline{h(x)}} = f(t(x)) = \underline{\underline{f(x)}}$, navíc, formálně je podle vzorce věty $h'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dot{f}(t) \cdot 1 = \underline{\underline{f'(x)}}$ }}

■ Ověřte, zda je níže uvedenými rovnicemi na jistém intervalu funkce $y = h(x)$ daná parametricky. V kladném případě najděte parametrické vyjádření její derivace h', je-li

233 $x = e^{-t} - t\,,\ y = t\,e^{t}\,,\ t \in \mathbf{R}$ $\{\!\{$ ano; h': $x = e^{t} + t\,,\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(t+1)\,e^{2t}}{e^{t}+1}\,,\ t \in \mathbf{R}$ $\}\!\}$

234 $x = 1 + e^{t}\,,\ y = 1 + e^{-t}\,,\ t \in \mathbf{R}$ [241] $\{\!\{$ ano; h': $x = 1 + e^{t}\,,\ y' = -e^{-2t}\,,\ t \in \mathbf{R}$ $\}\!\}$

235 $x = \cos^3 t\,,\ y = \sin^3 t\,,\ t \in (0,\ \pi/2)$ $\{\!\{$ ano; h': $x = \cos^3 t\,,\ y' = -\tan t\,,\ t \in (0,\ \pi/2)$ $\}\!\}$

236 $x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\,,\ t \in (0, 2\pi)\,,\ a > 0$ $\{\!\{$??? $\}\!\}$

237 $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}\,,\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}\,,\ t \in (0, +\infty)$. $\{\!\{$ ne $\}\!\}$

■ Najděte maximální intervaly M, na nichž je funkce $y = h(x)$ daná parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ prostá. Stručně zapište 1. a 2. derivaci funkce h na každém z příslušných intervalů, je-li

238 $x = \ln t\,,\ y = t^5$ $\{\!\{$ $y' = 5t^5\,,\ y'' = 25t^5\,,\ t \in M_{y'} = M_{y''} = \mathbf{R}^+$ $\}\!\}$

239 $x = t^2 + 6t + 9\,,\ y = t$ $\{\!\{$ $M_1 = (-\infty, -3]\,,\ M_2 = [-3, +\infty)$; h', h'': $x = (t+3)^2\,,\ y' = \dfrac{1}{2(t+3)}\,,$

$y'' = -\dfrac{1}{4(t+3)^3}\,,\ t \in (-\infty, -3)\,,\ t \in (-3, +\infty)$ $\}\!\}$

240 $x = \arctan|t|\,,\ y = t + 5$. $\{\!\{$ $M_1 = (-\infty, 0]\,,\ M_2 = [0, +\infty)$; h', h'': $x = \arctan|t|\,,\ y' = (t^2 + 1)\operatorname{sgn} t\,,$

$y'' = 2(t^2 + 1)\,t\,,\ t \in (-\infty, 0)\,,\ t \in (0, +\infty)$ $\}\!\}$

241 Odvoďte vzorec pro třetí derivaci h''' funkce h dané parametricky. Formulujte o h''' příslušnou větu.

Potom určete parametrické vyjádření h''' pro zadání z příkladu $\boxed{234}$. $\{\!\{$ ano; h''': $x = 1 + e^{t}\,,$

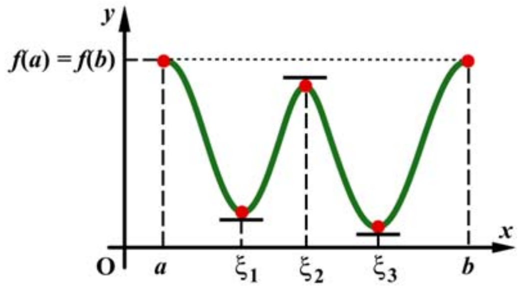
$y''' = -6e^{-4t}\,,\ t \in \mathbf{R}$ $\}\!\}$

242 Napište rovnici tečny τ a normály n ke křivce, která je grafem funkce $x = 3e^{t}\,,\ y = e^{-t}$ v bodě T, v němž parametr $t = 0$. $\{\!\{$ T $= (3, 1)\,,\ \tau:\ x + 3y - 6 = 0\,,\ n:\ 3x - y - 8 = 0$ $\}\!\}$

243 Funkce $y = h(x)$ je daná parametricky. Přesvědčte se, že na svém definičním oboru vyhovuje uvedené diferenciální rovnici, platí-li $x = e^{t}\sin t\,,\ y = e^{t}\cos t\,,\ t \in (3\pi/4,\, 7\pi/4)\,,\ \dfrac{d^2y}{dx^2}(x+y)^2 = 2\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)$.

30 ZÁKLADNÍ VĚTY DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

A) <u>Základní věty o střední hodnotě</u>



30.1 VĚTA Rollova (Francouz Michel Rolle (1652 - 1719))

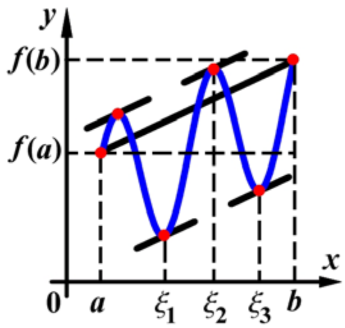
Nechť

1. funkce $f(x)$ je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, tj. stručněji $f \in C\,[a, b]$,
2. $f(x)$ má vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x)$ v otevřeném intervalu (a, b),
3. platí rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak existuje alespoň jeden bod $\xi \in (a, b)$, pro nějž $f'(\xi) = 0$.

30.2 POZNÁMKA Pokud $f(x)$ je konstantní, pak existuje nekonečně mnoho takových ξ.

30.3 POZNÁMKA Vynecháním 3. předpokladu Rollovy věty získáme obecnější, tzv. Lagrangeovu větu:



30.4 VĚTA Lagrangeova (1. věta o střední hodnotě, též **věta o přírůstku funkce)** (1736 - 1813) Nechť platí jen 1. a 2. předpoklad Rollovy věty. Pak existuje aspoň jeden bod (číslo) $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

[Rollova věta je tedy speciálním případem Lagrangeovy věty]

30.5 <u>GEOMETRICKÝ VÝZNAM</u> Rollovy a Lagrangeovy věty znamená, že **na oblouku** $\widehat{AB}$ křivky – **grafu spojité funkce** $y = f(x)$ [kde $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$], **v jehož každém bodě je definována tečna a který neobsahuje žádný hrot, existuje vnitřní bod, v němž je tečna rovnoběžná se sečnou** AB.

30.6 POZNÁMKA o přírůstku funkce Větu o přírůstku funkce lze též psát ve tvaru

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\Delta f(a)} = f'(\xi)(b - a),$$

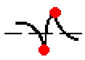
kde $\Delta f(x_0)$ je v matematické analýze <u>přírůstek</u> neboli <u>diference</u> funkce f v bodě x_0 (může být kladný i záporný), jenž jsme zmínili v poznámce 9.2 na str. 20. V numerické matematice však toto označení znamená tzv. <u>diferenci vpřed</u> (zde 1. *řádu*) funkce f v bodě x_0, která je definována vztahem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad \text{(kde } h > 0 \text{ je vzdálenost } \textit{uzlových bodů } x_0,\ x_0 + h\text{).}$$

Pro přírůstek funkce f v bodě x_0, která na intervalu J s koncovými body $\{x, x_0\}$ splňuje předpoklady Lagrangeovy věty, platí

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)}, \quad \text{kde bod (body) } \xi \in J.$$

30.7 POZNÁMKA Číslo $f'(\xi)$ se nazývá <u>střední</u> (též průměrná) <u>hodnota derivace funkce</u> $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

30.8 DŮSLEDEK Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na $[a, b]$, a nechť v otevřeném intervalu (a, b) existuje $f'(x) \neq 0$ [při existenci hrotů:  nemusí být f prostá]. Pak je funkce f na $[a, b]$ <u>prostá</u>. (Neplatí však, že f musí být rostoucí či klesající, tj. nemusí být (ryze) monotónní)

30.9 <u>FYZIKÁLNÍ INTERPRETACE</u> Lagrangeovy věty umožňuje tvrdit, že *během přímočarého pohybu hmotného bodu, jehož dráha* s *je v čase* t *z intervalu* $[t_0, T]$ *popsána rovnicí* $s = r(t)$, *nastane nejméně v jednom okamžiku* t_ξ *situace, že hmotný bod se právě pohybuje okamžitou rychlostí* $\dot{r}$, *která je rovna průměrné rychlosti v uvažovaném intervalu, tj. kdy platí*

$$\dot{r}(t_\xi) = \frac{r(t) - r(t_0)}{T - t_0}.$$

30.10 VĚTA Cauchyho (2. věta o střední hodnotě neboli **zobecněná věta o střední hodnotě)**[252] 30.12 (1789 - 1857)

Nechť pro funkce $f(x)$, $g(x)$ platí

1. f, g jsou spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

2. v otevřeném intervalu (a, b) nechť existuje vlastní nebo nevlastní derivace $f'(x)$ a vlastní (konečná) derivace $g'(x) \neq 0$.

Pak existuje bod (číslo) $\xi \in (a, b)$, pro něž platí

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

30.11 POZNÁMKA Pro $g(x) = x$ dostáváme speciálně Lagrangeovu větu.

30.12 <u>GEOMETRICKÝ VÝZNAM</u> Cauchyho věty[252] Splňují-li funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ na oboru parametru $t \in [\alpha, \beta]$ předpoklady věty, pak **na oblouku** $\overset{\frown}{\mathsf{AB}}$ **křivky** K **dané parametrickými rovnicemi** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, jehož body odpovídají hodnotám $t \in [\alpha, \beta]$, **existuje vnitřní bod** T, **v němž je tečna rovnoběžná s příslušnou sečnou** AB určenou bodem $\mathsf{A} = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ a bodem $\mathsf{B} = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$.

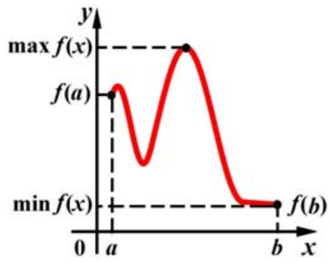
Tvrzení plyne částečně z věty 28.4 o derivaci h' funkce $h(x)$ dané parametricky pro $t \in [\alpha, \beta]$, podle níž je směrnice k_τ tečny τ ke grafu funkce h (její graf je podmnožinou křivky K) pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ dána vzorcem $k_\tau = h'(t) = \dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}$ (existují-li derivace $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ pro $t \in (\alpha, \beta)$ a je-li tam rovněž $\dot{\varphi} \neq 0$). Pro $t = \gamma$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$ je tedy $k_\tau = \dfrac{\dot{\psi}(\gamma)}{\dot{\varphi}(\gamma)}$. Pro směrnici k_{AB} sečny AB platí $k_{\mathsf{AB}} = \dfrac{y_{\mathsf{B}} - y_{\mathsf{A}}}{x_{\mathsf{B}} - x_{\mathsf{A}}} = \dfrac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}$. Podle Cauchyho věty 30.10 existuje hodnota γ mezi body α, β, pro kterou platí $\dot{\psi}(\gamma)/\dot{\varphi}(\gamma) = (\psi(\beta) - \psi(\alpha))/(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$, což značí, že pro ni též $k_\tau = k_{\mathsf{AB}}$, tj. tečna τ ve vnitřním bodě $\mathsf{T} = (\varphi(\gamma), \psi(\gamma))$ oblouku $\overset{\frown}{\mathsf{AB}}$ křivky K je rovnoběžná se sečnou AB.

B) <u>Základní věty o spojitosti funkce</u>

1. VĚTA Weierstrassova (o ohraničenosti funkce) Je-li funkce $f(x)$ <u>spojitá</u> na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je tam <u>ohraničená</u>. (Tj. existují konstanty k_1, k_2 tak, že $k_1 \leq f(x) \leq k_2 \; \forall \; x \in [a, b]$ neboli existuje $k = \max\{\,|k_1|, |k_2|\,\}$ tak, že platí $|f(x)| \leq k$)

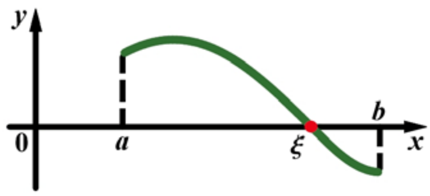
2. VĚTA Weierstrassova (o globálních extrémech) Je-li funkce $f(x)$ <u>spojitá</u> na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak tam funkce $f(x)$ nabývá v aspoň jednom bodě ξ_1 svého globálního <u>minima</u> a aspoň v jednom čísle ξ_2 svého globálního <u>maxima</u>.

1. VĚTA Bolzanova (mezihodnotová) (Bernard Bolzano (1781 - 1848), největší český matematik a významný filozof)
Nechť funkce $f(x) \in C[a, b]$. Pak $f(x)$ nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$, kde se předpokládá, že $f(a) \neq f(b)$.
Poznámka k větě Tvrzení se často formuluje též takto:
Jestliže funkce $f(x) \in C[a, b]$, pak nabývá všech hodnot mezi svou hodnotou nejmenší: $\min f(x)$ a největší: $\max f(x)$ (alespoň 1-krát na $[a, b]$).



2. VĚTA Bolzanova (speciální mezihodnotová)
Nechť $f(x) \in C[a,b]$. Jestliže platí, že $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ nebo obráceně), pak existuje (aspoň 1) bod $\xi \in (a, b)$ tak, že platí

$$f(\xi) = 0.$$



30.13 VÝZNAM 2. Bolzanovy věty Za daných předpokladů věta zaručuje existenci tzv. <u>kořenů</u> (nulových bodů) <u>funkce</u> f, též <u>kořenů rovnice</u>, tj. bodů x, v nichž platí nelineární rovnice $f(x) = 0$, které hledáme přibližnými metodami na PC, a s nimiž se lze setkat v inženýrských aplikacích. Kořeny x nelineární rovnice $f(x) = 0$ (popř. soustavy takových rovnic) řešíme <u>graficky</u> nebo častěji numericky na PC tzv. <u>metodou tečen</u>, <u>metodou sečen</u> atd. vhodnými systémy počítačové algebry (Maple, Matlab, Mathematica apod.). Pro hledání kořenů polynomů jsou vyvinuty speciální metody.

30.14 DEFINICE Funkce $f(x)$ se nazývá <u>stejnoměrně spojitá</u> na intervalu $J \subseteq D_f$, jestliže

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tak, že $\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in \boldsymbol{J}$ platí implikace:

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

30.15 POZNÁMKA

1. Zatímco u (obyčejné) spojitosti funkce na intervalu J je $\delta = \delta(\varepsilon, x)$, u stejnoměrné spojitosti funkce je $\delta = \delta(\varepsilon)$, tj. δ už není závislé na $x \in J$ neboli k danému $\varepsilon > 0$ existuje „*univerzální*“ $\delta > 0$ takové, že je splněna podmínka spojitosti s tímto δ **v každém bodě** $x \in J$.

2. Jestliže je funkce $f(x)$ stejnoměrně spojitá, pak je spojitá, ale opačně to neplatí, neboť funkce $y = 1/x$ je na otevřeném intervalu $(0, +\infty)$ spojitá, ale ne stejnoměrně. Platí však

30.16 VĚTA Heine-Cantorova (o stejnoměrné spojitosti) (Němec Georg Cantor (1845 - 1918))
Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je tam také stejnoměrně spojitá.

30.17 POZNÁMKA Pro otevřený interval (a, b) věta neplatí.

31 ✦ *CVIČENÍ* J ✦

■ Zkoumejte, zda daná funkce $y = f(x)$ splňuje na daném uzavřeném intervalu $J = [a, b]$ předpoklady Rollovy věty. V kladném případě najděte pomocí ní bod či body $\xi \in (a, b)$, v nichž $f'(\xi) = 0$, jsou-li dány

244 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, $J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $\{\!\{\ f'(x)|_\xi = \sinh x|_\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0\ \}\!\}$

245 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$, $J = [-1, 1]$, přičemž k vyřešení úlohy využijte informaci z výsledku příkladu **206**, která mj. říká, že $f(x)$ má v $x = 0$ ostré lokální minimum a hrot, přičemž $f'(0\mp) = \mp\infty$. $\{\!\{\ ???\ \}\!\}$

246 Pomocí pojmu „kořen funkce“ f vyslovte speciální znění Rollovy věty pro případ, kdy $f(b) = f(a) = 0$.
$\{\!\{$ „mezi dvěma kořeny a a b funkce $f(x)$ leží aspoň jeden kořen její derivace $f'(x)$, je-li $f(x)$ spojitá na …“ $\}\!\}$

247 Užitím Rollovy věty dokažte tvrzení: *Má-li polynom $p_n(x)$ n-tého stupně n různých reálných kořenů, potom jeho derivace má $(n-1)$ různých reálných kořenů.*

248 Najděte bod $\xi \in (a, b)$, v němž je tečna ke grafu funkce f rovnoběžná se sečnou grafu jdoucí body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Použijte Lagrangeovu větu o střední hodnotě, přičemž $f(x) = x^3$, $[a, b] = [-2, 3]$.
$\{\!\{\ \xi_{1,2} = \pm\sqrt{7/3} \doteq 1{,}53,\ \mathsf{T}_{1,2} \doteq (\pm 1{,}53; \pm 3{,}56)\ \}\!\}$

249 Odhadněte velikost přírůstku $|\Delta f| = |\arctan b - \arctan a|$ funkce $y = \arctan x$, využijete-li Lagrangeovu větu o střední hodnotě. $\{\!\{\ |\Delta f| \le b - a\ \}\!\}$

250 Určete průměrnou (též „střední“) rychlost $\overline{v}$ hmotného bodu při svislém vrhu vzhůru v časovém intervalu od $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ do $t_2 = 4\,\mathrm{s}$. Dráha s (v metrech) vyhovuje vztahu $s = 80t - 5t^2$. Dokažte, že existuje aspoň jeden okamžik t_ξ, v němž je okamžitá rychlost právě rovna průměrné, tj. $v(t_\xi) = \overline{v}$, a stanovte t_ξ.
$\{\!\{\ \overline{v} = 55\,\mathrm{m \cdot s^{-1}};\ t_\xi = 2{,}5\,\mathrm{s}\ \}\!\}$

251 Přesvědčte se, zda funkce $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ splňují předpoklady Cauchyho věty o střední hodnotě na intervalu $[0, \pi/2]$. V kladném případě určete bod (body) ξ, v němž mají f, g střední hodnotu.
$\{\!\{\ \xi = \pi/4\ \}\!\}$

252 Zvolte pro vyjádření dolního oblouku K_d kružnice K se středem v počátku a poloměrem a vhodné parametrické rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ a vhodný obor M parametru t. S přihlédnutím k poznámce 30.12 o geometrickém významu Cauchyho věty a k příkladu 28.6 ověřte, zda jsou splněny pro zvolené funkce φ, ψ předpoklady Cauchyho věty 30.10. V kladném případě najděte na vnitřku oblouku K_d bod dotyku $\mathsf{T} = (\varphi(\gamma), \psi(\gamma))$, v němž je tečna τ oblouku rovnoběžná se sečnou AB oblouku, kde $\mathsf{A} = (-a, 0)$, $\mathsf{B} = (0, -a)$. Najděte tečnu τ a normálu n oblouku v bodě T. Načrtněte situaci.
$\{\!\{\ \mathsf{T} = (\varphi(5\pi/4), \psi(5\pi/4)) = (-a/\sqrt{2}, -a/\sqrt{2}),\ \ \tau: y = -x - \sqrt{2}a,\ \ n: y = x\ \}\!\}$

II INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Jeho základy položili kolem roku 1670 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) a Isaac Newton (1643 - 1727). Princip integrace používal už Archimedes (287 - 212 př. n. l.) k určení obsahů obrazců, délek křivek, těžišť těles atd. Pomocí integrálů lze takové veličiny snadno definovat.

32 NEURČITÝ INTEGRÁL

V jistém smyslu jde o obrácení derivování. Avšak zatímco derivování funkcí lze použitím vhodných vzorců dost dobře algoritmizovat, neexistuje obecný algoritmus pro integraci libovolné funkce. Seznámíme se nyní s nejjednoduššími postupy.

32.1 DEFINICE Nechť funkce $f(x)$ je definována v intervalu J s krajními body $a, b,$ kde je $a < b,$ přičemž hodnoty a, b mohou být i nevlastní. Říkáme, že $F(x)$ je primitivní funkce (též *antiderivace*) k jisté funkci $f(x)$ na intervalu J (otevřeném či uzavřeném a ohraničeném či neohraničeném), když platí

a) $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b),$

b) $F'(a+) = f(a)$ (patří-li bod a do intervalu J),

c) $F'(b-) = f(b)$ (patří-li bod b do intervalu J),

což stručně vyjádříme zápisem $F' = f$ na J.

32.2 VĚTA Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na J, $C \in \mathbf{R}$. Pak je funkce $F(x)$ spojitá a funkce $F(x) + C$ je primitivní k funkci $f(x)$ v J.

DŮKAZ: Nechť F je primitivní funkcí k f např. na $J = (a, b)$. Pak pro všechna $x \in J$ platí rovnost $F'(x) = f(x)$, tj. má derivaci všude v J, a proto je spojitá (podle **věty** 11.9 z diferenciálního počtu). V případě uzavřeného intervalu $J = [a, b]$ by v bodě a, resp. b šlo o spojitost zprava, resp. zleva. Zbylá část tvrzení plyne z toho, že platí
$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, kde $x \in J$, $C \in \mathbf{R}$. (C je libovolná konstanta)

32.3 POZNÁMKA [32.7] Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ v intervalu J, pak lze pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě snadno dokázat, že množina $\{F(x) + C \mid C \in \mathbf{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$. Tedy primitivních funkcí existuje nekonečně mnoho k téže funkci a liší se pouze o aditivní (tj. přičtenou) konstantu C.

32.4 DEFINICE Nechť $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na intervalu J, pak *Leibnizův výraz* vlevo v rovnosti $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $C \in \mathbf{R}$, se nazývá (Newtonův) neurčitý integrál z funkce $f(x)$ na intervalu J. Symbol $\int$ se nazývá znak neurčitého integrálu, funkce $f(x)$ se nazývá integrand, $\mathrm{d}x$ je diferenciál integrační proměnné x, C je integrační konstanta.

32.5 VĚTA [59] **(o postačující podmínce existence neurčitého integrálu neboli množiny všech primitivních funkcí)** Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu J, tj. $f(x) \in C(J)$, pak existuje neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ na J.

32.6 POZNÁMKA Derivování a integrování jsou navzájem komplementární operace a platí

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

32.7 PŘÍKLAD Platí

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C \qquad (32.1)$$

[32.7]

(kde C je libovolná (reálná) konstanta, např. -777). Derivujeme-li totiž funkci na pravé straně rovnosti (32.1), dostaneme integrand x^3 a podle poznámky 32.3 jsou funkce tvaru $\frac{x^4}{4} + C$ jediné, které požadovanou vlastnost primitivní funkce mají.

32.8 POZNÁMKA [76] **Předešlá věta** 32.5 sice zaručuje existenci neurčitého integrálu ke každé funkci spojité na jistém intervalu, tedy i k elementární funkci, ale **nezaručuje** (na rozdíl od derivování), že to opět bude funkce elementární [tj. buď základní elementární funkce (polynom, funkce obecná mocnina $y = x^r$ ($r \in \mathbf{R}$), exponenciální, logaritmická, goniometrická, cyklometrická, hyperbolická a hyperbolometrická) nebo funkce z nich vzniklá konečným počtem operací, jimiž jsou operace algebraické (+, –, ·, /), a dále operace přípustného skládání oněch funkcí], ale může to být tzv. vyšší transcendentní funkce (např. funkce Laplace-Gaussův integrál)

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

33 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI NEURČITÉHO INTEGRÁLU

Základní vlastností neurčitého integrálu je **LINEARITA:**

$$\int \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)\right) \mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(integrál lineární kombinace funkcí = lineární kombinaci neurčitých integrálů), kde $c_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), a kde předpokládáme, že existují neurčité integrály z funkcí $f_1, \ldots, f_n$. Pro
$n = 1$: $\int c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x$ nastává tzv. **homogenita** neurčitého integrálu, a pro
$n = 2$: $c_1 = c_2 = 1$: $\int (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$ **aditivita** neurčitých integrálů.

33.1 ZÁKLADNÍ VZORCE PRO INTEGROVÁNÍ ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ (TABULKOVÉ INTEGRÁLY)

1) $\int \mathbf{0}\,\mathrm{d}x = C$, kde $C \in \mathbf{R}$ 2) $\int \mathbf{1}\,\mathrm{d}x = x + C$ ($x \in \mathbf{R}$, *což dále neuvádíme*)

3) $\int x^r \mathrm{d}x = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, kde $r \neq -1$ ($r \in \mathbf{R}$) (x se určí podle uvažovaného r)

[Např. pro $r \geq 0$ celé (tj. přirozené) je $x \in (-\infty, +\infty)$,
pro $r < -1$ celé je $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,
pro r nikoli celé (racionální nebo iracionální) je $x \in (0, +\infty)$]

4) $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$, $x \neq 0$ (avšak též $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(kx)$, je-li $kx > 0$)

5) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$ 6) $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $a > 0 \wedge a \neq 1$

7) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$ 8) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$

9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$; $x \neq k\pi$; $k \in \mathbf{Z}$ 10) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$; $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $k \in \mathbf{Z}$

11) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C^*$; $C^* \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $|x| < a$

12) $\int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\mathrm{arccot}\dfrac{x}{a} + C^*$; $C^* \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$; $x^2 + a > 0$ ($a \neq 0$, tj. může být $a < 0$)

14) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$; $f(x) \neq 0$

15) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$; $a \neq 0$, kde F je primitivní funkce k f, přičemž integrand f je lineární funkcí argumentu x neboli $(ax + b)$ je lineární funkce.

33.2 PŘÍKLAD $\int 2\sin x \cos t \, dx = -2\cos t \cos x + C.$ [Vidíme zde důležitost role diferenciálu dx]

33.3 PŘÍKLAD $\int \cos(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x-2)+C$, $\int \sqrt[3]{-2x+1}\,dx = -\frac{3}{8}(-2x+1)\sqrt[3]{-2x+1}+C.$

33.4 ÚMLUVA Aditivní konstantu C u neurčitého integrálu BUDEME psát!

34 ✦ *CVIČENÍ* K ✦

■ V následujících rovnostech na levých stranách doplňte vynechaná místa. Potom za znak $\int$ neurčitého integrálu napište celé pravé strany rovností a takto zapsané integrály určete; tedy např. $\int 3x^2\,dx$, $\int dx$ atd.

253 $d(\quad) = 3x^2 dx$ **254** $d(\quad) = dx$ **255** $d(\quad) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ **256** $d(\quad) = \frac{dx}{x}$.

■ Pomocí základních vzorců a vlastností neurčitého integrálu vyjádřete následující integrály

257 $\int x^{2006}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{2007}x^{2007}+C \right\}\!\right\}$ **258** $\int \frac{dx}{2x}$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{2}\ln|x|+C \right\}\!\right\}$ **259** $\int x^{\sqrt{2}}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^{\sqrt{2}+1}+C \right\}\!\right\}$

260 $\int \frac{dx}{x^2}$ $\left\{\!\left\{ -\frac{1}{x}+C \right\}\!\right\}$ **261** $\int t^x dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{t^x}{\ln t}+C \quad (t>0,\ t\neq 1) \right\}\!\right\}$

262 $\int x^{0,2006}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{x^{1,2006}}{1,2006}+C \right\}\!\right\}$ **263** $\int x^2\sqrt[3]{x}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}+C \right\}\!\right\}$

264 $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx$ $\left\{\!\left\{ 2\sqrt{x}+C \right\}\!\right\}$ **265** $\int (x^2-\sqrt[3]{x})^3\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{7}x^7-\frac{9}{16}x^5\sqrt[3]{x}+\frac{9}{11}x^3\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2}x^2+C \right\}\!\right\}$

266 $\int \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x}\right)^2 dx$ $\left\{\!\left\{ \ln x+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C \right\}\!\right\}$

267 $\int (5x-4)^{99}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{500}(5x-4)^{100}+C \right\}\!\right\}$ **268** $\int \frac{dz}{\sqrt[7]{(a^2-14z)^6}}$ $\left\{\!\left\{ -\frac{1}{2}\sqrt[7]{a^2-14z}+C \right\}\!\right\}$

269 $\int A\omega\cos(\omega t-\varphi)\,dt$ $\left\{\!\left\{ A\sin(\omega t-\varphi)+C \right\}\!\right\}$ **270** $\int \frac{3u^2-14u}{u^3-7u^2+4}\,du$ $\left\{\!\left\{ \ln\left|u^3-7u^2+4\right|+C \right\}\!\right\}$

271 $\int \frac{y+1}{y+3}dy$ $\left\{\!\left\{ y-2\ln|y+3|+C \right\}\!\right\}$ **272** $\int \frac{x^3-x^2+1}{x+2}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+6x-11\ln|x+2|+C \right\}\!\right\}$

273 $\int \frac{x}{3x-1}dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\ln|3x-1|+C \right\}\!\right\}$ **274** $\int \frac{2^x}{2^x+1}\,dx$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+1)+C \right\}\!\right\}$

275 $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\left\{\!\left\{ \ln|\ln x|+C \right\}\!\right\}$ **276** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$ $\left\{\!\left\{ \ln|\arcsin x|+C \right\}\!\right\}$

277 $\int \frac{t-2}{t^2-4t+7}\,dt$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{2}\ln(t^2-4t+7)+C \right\}\!\right\}$

278 $\int \frac{dx}{x^2+2}$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctan}\frac{x}{\sqrt{2}}+C \right\}\!\right\}$ **279** $\int \frac{dz}{1+9z^2}$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{3}\operatorname{arctan}3z+C \right\}\!\right\}$

280 $\int \frac{dx}{25+4x^2}$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{10}\operatorname{arctan}\frac{2x}{5}+C \right\}\!\right\}$ **281** $\int \frac{du}{7+(2u-5)^2}$ $\left\{\!\left\{ \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{2u-5}{\sqrt{7}}+C \right\}\!\right\}$

282 $\int \frac{dv}{2v^2-3v+2}$ $\left\{\!\left\{ \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctan}\frac{4v-3}{\sqrt{7}}+C \right\}\!\right\}$ **283** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ $\left\{\!\left\{ \ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C \right\}\!\right\}$

284 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ $\left\{\!\left\{ \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C \right\}\!\right\}$ **285** $\int \frac{dx}{\sqrt{(-3x+2)^2-5}}$ $\left\{\!\left\{ -\frac{1}{3}\ln\left|2-3x+\sqrt{9x^2-12x-1}\right|+C \right\}\!\right\}$

286 $\int \dfrac{d\varphi}{\sqrt{-2+5\varphi^2}}$ $\left\{\!\!\left\{ \dfrac{1}{\sqrt5}\ln\left|\sqrt5\varphi+\sqrt{5\varphi^2-2}\right|+C \right\}\!\!\right\}$

287 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ $\left\{\!\!\left\{ \dfrac{1}{5}\arcsin\dfrac{5x}{3}+C \right\}\!\!\right\}$

288 $\int \dfrac{\sqrt{3-x^2}}{3-x^2}dx$ $\left\{\!\!\left\{ \arcsin\dfrac{x}{\sqrt3}+C \right\}\!\!\right\}$

289 $\int \dfrac{du}{\sqrt{-u^2+3u+3}}$ $\left\{\!\!\left\{ \arcsin\dfrac{2u-3}{\sqrt{21}}+C \right\}\!\!\right\}$

290 $-\int \dfrac{dz}{\sqrt{1+7z-z^2}}$ $\left\{\!\!\left\{ \arccos\dfrac{2z-7}{\sqrt{53}}+C \right\}\!\!\right\}$

291 $\int \cot x\, dx$ $\left\{\!\!\left\{ \ln|\sin x|+C \right\}\!\!\right\}$

292 $\int 3\tan(3x+\pi/4)\, dx$ $\left\{\!\!\left\{ -\ln|\cos(3x+\pi/4)|+C \right\}\!\!\right\}$

293 $\int \cos\dfrac{2\pi n t}{b-a}\, dt$ $\left\{\!\!\left\{ \dfrac{b-a}{2\pi n}\sin\dfrac{2\pi n t}{b-a}+C \right\}\!\!\right\}$

294 $\int \dfrac{\cos\omega\, d\omega}{1-\sin\omega}$ $\left\{\!\!\left\{ -\ln|\sin\omega-1|+C \right\}\!\!\right\}$

295 $\int \dfrac{3x^2-\cos x}{x^3-\sin x}dx$ $\left\{\!\!\left\{ \ln\left|x^3-\sin x\right|+C \right\}\!\!\right\}$

296 $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ $\left\{\!\!\left\{ C-\tan x-\cot x=C-\dfrac{2}{\sin 2x} \right\}\!\!\right\}$

297 $\int 12\sin^2 3x\, dx$ $\left\{\!\!\left\{ 6x-\sin 6x+C \right\}\!\!\right\}$

298 $\int 20\cos^2(5t+\pi)\, dt$ $\left\{\!\!\left\{ 10t+\sin(10t+2\pi)+C \right\}\!\!\right\}$

299 $\int \dfrac{2\, dt}{\sin 2t\, \cos 2t}$ $\left\{\!\!\left\{ \ln|\tan 2t|+C \right\}\!\!\right\}$

300 $\int \dfrac{2\sin 2x\, dx}{\sin^2 x-\cos^2 x}$ $\left\{\!\!\left\{ \ln|\cos 2x|+C \right\}\!\!\right\}$

301 $\int 3\sqrt{1+\cos 3t}\, dt$ $\left\{\!\!\left\{ 2\sqrt2\sin(3t/2)+C \right\}\!\!\right\}$

302 $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ $\left\{\!\!\left\{ -\sqrt2\cos x+C \right\}\!\!\right\}$

303 $\int \dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ $\left\{\!\!\left\{ \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\arccos x+C \right\}\!\!\right\}$

304 $\int \dfrac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx\,.$ $\left\{\!\!\left\{ \dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C \right\}\!\!\right\}$

35 INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

35.1 POZNÁMKA [352] V této kapitole se omezíme jen na výpočet integrálů, v nichž lze integrovanou funkci (integrand) vyjádřit jako součet racionálních funkcí následujících typů

$$\frac{A}{x-\alpha},\ \frac{A}{(x-\alpha)^n},\ \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c},\ \frac{B}{ax^2+bx+c},\ \text{kde } n\in\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\dots\},\ b^2-4ac\neq 0,\ A\neq 0,\ B\neq 0\,.$$

Ve zmíněném součtu racionálních funkcí by se mohl objevit ještě jeden typ racionální funkce, který však nezahrneme do příkladů, a jenž by vedl na někdy i zdlouhavější výpočet následujícího integrálu

$$I_n=\int\frac{1}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^n}dx\,,\qquad n\geq 2\,,\ n\in\mathbf{N}^*,\ \gamma\neq 0\,.$$

Pro tento integrál lze snadno (metodou per partes) odvodit tzv. *rekurentní* neboli *redukční vzorec*, který vyjádří I_n pomocí integrálu I_{n-1} obsahujícího integrand $1/[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{n-1}$.

Po potřebném počtu kroků bychom výpočet I_n postupně redukovali až na

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2}=\frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma}+C\,.$$

(V příkladu 352 na str. 70 je zadán návod k odvození speciálního případu integrálu I_n)

35.2 VĚTA [35.4] **1)** Nechť polynom n-tého stupně $Q(x)$ s reálnými koeficienty je pro určitost tvaru $Q_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$, kde vedoucí koeficient $a_0\neq 0$, a má k_1-násobný reálný kořen α_1, k_2-násobný reálný kořen $\alpha_2,\dots$, k_i-násobný reálný kořen α_i, dále l_1-násobné komplexně sdružené kořeny $\beta_1\pm i\gamma_1$, l_2-násobné komplexně sdružené kořeny $\beta_2\pm i\gamma_2,\dots$, l_j-násobné komplexně sdružené kořeny $\beta_j\pm i\gamma_j$. Pak každý takový polynom se dá v oboru $\mathbf{R}$ reálných čísel ($x\in\mathbf{R}$)

jednoznačně (až na pořadí činitelů) rozložit v součin reálných činitelů (lineárních – ty mají mocnitele $k_1, \dots, k_i$ a kvadratických – ty mají mocnitele $l_1, \dots, l_j$)

$$Q_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_i)^{k_i}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\dots\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}, \quad (35.1)$$ [35.3]

kde mocnitelé $k_1, \dots, k_i, l_1, \dots, l_j$, jsou kladná celá čísla, přičemž platí
$k_1 + k_2 + \dots + k_i + 2\,(l_1 + l_2 + \dots + l_j) = n$, kde $p_1, q_1, \dots, p_j, q_j$ jsou reálná čísla, a uvedené (od sebe různé) kvadratické trojčleny nejsou v **R** rozložitelné v reálné lineární činitele (tj. jejich diskriminant $(p_s/2)^2 - q_s < 0$, pro $s = 1, \dots, j$).

2) Nechť zlomek $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ nebo stručněji $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je **ryze** lomená racionální funkce (tj. je $m < n$), kde $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně s reálnými koeficienty, nechť lze polynom $Q_n(x)$ rozložit podle 1. části věty, a nechť polynomy $P(x)$, $Q(x)$ nemají společné kořeny (tj. nelze je vykrátit). Pak existuje právě n reálných čísel nazvaných koeficienty parciálních zlomků (částečných zlomků) $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1k_1}; \dots; A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik_i}; B_{11}, C_{11}, \dots, B_{1l_1}, C_{1l_1}; \dots; B_{j1}, C_{j1}, \dots, B_{jl_j}, C_{jl_j}$, které (ta čísla) jsou určeny ryze lomenou racionální funkcí $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ jednoznačně tak, že pro všechna (reálná) čísla x různá od nulových bodů neboli kořenů $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ jmenovatele $Q(x)$ platí rozklad této funkce:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \left[\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}\right] + \dots + \left[\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)^1} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}\right] +$$
$$\left[\frac{B_{11}x + C_{11}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}}\right] +$$
$$\dots + \left[\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^1} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}}\right]. \quad (35.2)$$ [63]

35.3 POZNÁMKA [35.8] Při menším počtu kořenů jmenovatele $Q(x)$ označujeme samozřejmě koeficienty parciálních zlomků jednoduše různými písmeny bez použití dvojitých indexů. Věta říká, že v rozkladu polynomu (35.1) se každý reálný kořen α ($\alpha \in$ **R**) polynomu $Q(x)$ s násobností k musí objevit právě k-krát, tedy dostaneme pro něj právě k parciálních zlomků:
$\dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$. Pokud $k = 1$ (kořen α je jednoduchý), pak se objeví jen zlomek $\dfrac{A}{x-\alpha}$. Analogicky to platí pro nerozložitelné kvadratické trojčleny polynomu $Q(x)$, tj. pro ty, které jsou ve tvaru $x^2 + px + q$ a mají vždy dvojici (imaginárních) komplexně sdružených kořenů, např. $\beta \pm i\gamma$, neboť jejich diskriminant $D < 0$. Lze pak v komplexním oboru **C** též psát (ověřte si) $[x-(\beta+i\gamma)]\cdot[x-(\beta-i\gamma)] = x^2 + \underbrace{(-2\beta)}_{p}x + \underbrace{(\beta^2+\gamma^2)}_{q} = (x-\beta)^2 + \gamma^2$. Vyskytne-li se tedy naopak v polynomu $Q(x)$ např. mocnina $((x-\beta)^2 + \gamma^2)^l$, pak to znamená, že komplexní čísla $\beta + i\gamma$, $\beta - i\gamma$, jsou l-násobnými kořeny polynomu $Q(x)$ a obráceně.

Rozklad polynomu (35.1) je důsledkem tzv. *základní věty algebry*, podle níž *každý polynom stupně $n \ge 1$ má v oboru komplexních čísel* **C** *aspoň 1 kořen*. První ze svých pěti jejích důkazů podal v r. 1797 Němec C. F. Gauss (1777 - 1855). Dalším důsledkem základní věty algebry je následující **Věta d'Alembertova** (Francouz Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783)) *Počítáme-li každý k-násobný kořen za k kořenů, má algebraická rovnice $Q_n(x) = 0$ stupně $n \ge 1$ v komplexním* *oboru* **C** *právě* n (*komplexních*) *kořenů*; *označíme-li tyto kořeny* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *je možno polynom* $Q_n(x)$ *rozložit na tvar* $Q_n(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$.

35.4 POSTUP PŘI INTEGRACI RACIONÁLNÍ FUNKCE, tj. při $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$, je následující:

1. Zjistíme, zda $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ je ryze lomenou racionální funkcí či neryze lomenou racionální funkcí. Pokud není ryze lomenou, tj. $m \ge n$, musíme provést **dělení polynomů** (zopakujte si je) $P_m(x)/Q_n(x) = M_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}$, kde $M_{m-n}(x)$, stručněji $M(x)$, je polynom stupně $m-n$ (neboli je to celistvá racionální funkce) a je podílem polynomů, přičemž o stupni polynomu $R(x)$, tzv. zbytku při uvedeném dělení, víme jen to, že má stupeň menší jak n.

2. Ryze lomenou racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nebo až tu po vydělení, tj. funkci $\frac{R(x)}{Q(x)}$, **rozložíme** podle věty 35.2 **na součet parciálních zlomků** a **vyčíslíme** (viz níže) **jejich koeficienty**.

3. Určíme integrály polynomu $M(x)$ a jednotlivých parciálních zlomků.

35.5 POZNÁMKA Pro výpočet dosud neurčených koeficientů parciálních zlomků použijeme často kombinaci dvou metod:

I Metoda dosazovací (většinou je efektivnější) – vynásobíme rovnost (35.2) definující rozklad na parciální zlomky jmenovatelem $Q(x)$ a do takto vzniklé rovnosti dvou polynomů dosazujeme postupně všechny reálné kořeny jmenovatele $Q(x)$, tj. čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, popř. další malá celá čísla, abychom dostali právě tolik lineárních rovnic, kolik je neznámých. (Podle definice: *Polynomy se sobě rovnají, právě když mají tytéž hodnoty pro libovolné* x)

II Metoda neurčitých koeficientů – opět vynásobíme rovnici (35.2) definující rozklad na součet parciálních zlomků jmenovatelem $Q(x)$ a v takto vzniklé rovnosti dvou polynomů porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x na levé a pravé straně této rovnosti. (Jde o využití tvrzení: *Polynomy se sobě rovnají, právě když mají u stejných mocnin proměnné* x (*vč. nulté*) *stejné koeficienty*)

35.6 VĚTA [305] (Důsledek věty, kterou objevil kolem r. 1600 francouzský matematik **François Viète** (1540 - 1603)) Má-li polynom $Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ s celočíselnými koeficienty (tj. $a_i \in \mathbf{Z}$) $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kde vedoucí koeficient $a_0 \ne 0$, celočíselné kořeny, pak jsou to dělitelé koeficientu a_n (tj. absolutního členu).

35.7 POZNÁMKA [35.8] Kteří dělitelé jsou zároveň i kořeny daného polynomu $Q_n(x)$ pro jeho potřebný rozklad, určíme pro malé hodnoty x jejich dosazením do $Q_n(x)$, ale efektivněji např. Ruffini-Hornerovým schématem [italský matematik Paolo Ruffini (1765 - 1822) jej objevil r. 1804, Angličan William George Horner (1786 - 1837) nezávisle r. 1819], viz dále. Schéma lze mj. použít k vyčíslení hodnoty $Q_n(\xi)$ polynomu $Q_n(x)$ v bodě $x = \xi$ na základě rovnosti

$$Q_n(\xi) = \{[\ldots[(a_0 \times \xi + a_1) \times \xi + a_2] \times \xi + \ldots + a_{n-1}] \times \xi + a_n\}.$$

35.8 PŘÍKLAD Platí $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\underbrace{x^5 + x^4 - 9x^3 - 13x^2 + 8x + 12}_{Q_5(x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)(x+2)^2(x-3)} =$

($a_5 = 12$ je zde absolutní člen)

[Tedy Ruffini-Hornerovým schématem a dosazováním dělitelů absolutního členu $a_5 = 12$ (podle důsledku Vietovy věty) se předtím určily tyto kořeny: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = -2$, $x_5 = 3$]

$$\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \underbrace{\frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}}_{\text{dvojnásobnému kořenu } -2 \text{ přísluší dva parciální zlomky}} + \frac{E}{x-3} \right) \mathrm{d}x,$$

přičemž dělitelé jsou: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Kořeny $1, -1, -2, -2, 3$ lze najít Ruffini-Hornerovým schématem – tabulkou. Ta pro $\xi = 1$ dává (V seminářích bude schéma probráno, je možnost se zeptat, popř. tento pracnější příklad dopočítat)

	$1\ (= a_0)$	1	-9	-13	8	$12\ (= a_5)$
$\xi = \mathbf{1}$	$1\ (= b_0 \equiv a_0)$	2	-7	-20	-12	$\underline{\underline{0}} = Q_5(\mathbf{1})$

kde pro prvky 2. řádku tabulky, jež tvoří koeficienty jistého polynomu o jeden stupeň nižšího
$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}, \text{ platí } \ 1 = \underline{\underline{b_0 \equiv a_0}}, \ 2 = \underline{\underline{b_1 = a_1 + \xi \cdot b_0}} = 1 + 1 \cdot 1,$$
$-7 = \underline{\underline{b_2 = a_2 + \xi \cdot b_1}} = -9 + 1 \cdot (-7)$, atd. Označíme-li poslední číslo druhého řádku b_n, je současně hodnotou $Q_5(\xi)$, jak je zmíněno v předešlé poznámce 35.7. Je to zřejmé též z (35.3), dosadíme-li tam $x = \xi$. V obecném případě mohou pro polynom $Q(x)$ nastat v tabulce dva případy:

I) Je-li hodnota $b_n = Q(\xi) = 0$, je číslo ξ kořenem (prozatím jednoduchým) polynomu $Q(x)$ a označíme jej α. Na takový řádek tvořený koeficienty polynomu $q(x)$ lze schéma znovu použít, neboť kořen polynomu $q(x)$ je i kořenem polynomu $Q(x)$, a je-li na konci následujícího řádku tabulky opět 0, je číslo α už dvojnásobným kořenem atd. Níže to ukážeme pro číslo $x = \xi = -2$.

II) Vyjde-li v tabulce $b_n = Q(\xi) \neq 0$, není číslo ξ kořenem $Q(x)$. V obou případech však platí
$$Q(x) = (x - \xi) \cdot \underbrace{(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1})}_{q(x)} + b_n, \tag{35.3}$$
takže počítaný řádek schématu určuje buď *podíl* $q(x) = Q(x)/(x - \alpha)$ [ad I, kdy $b_n = 0$], nebo *částečný podíl* $q(x) = Q(x)/(x - \xi) - b_n/(x - \xi)$ [ad II, kdy $b_n \neq 0$] se *zbytkem* b_n při dělení polynomu $Q(x)$ lineárním dvojčlenem $x - \xi$. V našem příkladu nastal pro dělitele $\xi = 1$ koeficientu 12 případ I, tj. platí $Q_5(x) = (x-1) \cdot q_4(x) = (x-1)(x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12)$.

Pro zjištění, zda $\xi = 1$ je též dvojnásobným kořenem polynomu $q_4(x)$, tj. i kořenem polynomu $Q_5(x)$, a v případě že ano, pak též pro zjištění jeho násobnosti, by tabulka využívající R-H schéma pro kořeny $-1, -2, 3$ pokračovala následovně (znovu navíc ještě opíšeme potřebný předešlý řádek)

$\xi = 1$	1	2	-7	-20	-12	$0 = Q_5(1)$	$\Rightarrow Q_5(x) = (x-1) \cdot q_4(x)$
$\xi = 1$	1	3	-4	-24	$-36 \neq 0$		$\Rightarrow$ je jen jednoduchým kořenem (zkusíme -1)
$\xi = -1$	1	1	-8	-12	0		$\Rightarrow Q_5(x) = (x-1)(x+1)(x^3 + x^2 - 8x - 12)$
$\xi = -2$	1	-1	-6	0			$\Rightarrow Q_5(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x^2 - x - 6)$
$\xi = -2$	1	-3	0				$\Rightarrow Q_5(x) = (x-1)(x+1)(x+2)^2(x-3)$

Řádek tabulky, jenž nemá na konci nulu, obvykle škrtneme.

35.9 PŘÍKLAD Vypočítejme $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2(\underbrace{x^2 + 2x + 2}_{=(x+1)^2+1})}\,dx$. (Vidíme, že 0 je dvojnásobný kořen jmenovatele)

Platí
$$\frac{1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2} \qquad \Big| \cdot x^2(x^2 + 2x + 2) \neq 0$$
$$1 = Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2.$$
Dosazovací metoda dává

$x=0$: $1 = B\cdot 2 \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{1}{2}}}$

$x=1$: $1 = 5A + \frac{5}{2} + C + D \quad (1)$

$x=-1$: $1 = -A + \frac{1}{2} - C + D \quad (2) \mid \times \mathbf{8}$

$x=2$: $\underline{1 = 20A + 5 + 8C + 4D}$ (3). Pak naznačené součty dvou rovnic (popř. vynásobených) dají

$(1)+(2)$: $\quad 2 = 4A + 3 + 2D \quad \Rightarrow \quad 4A + 2D = -1$ takže nakonec dostáváme

$\underline{\mathbf{8}\times(2)+(3)\text{: } 9 = 12A + 9 + 12D \Rightarrow \quad A + D = 0}$

$A = -D$

$\underline{\underline{D = \frac{1}{2}}}$ $\qquad I = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\overbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}^{=\frac{1}{4}(2x+2)}}{x^2+2x+2} \right) \mathrm{d}x =$

$\underline{\underline{A = -\frac{1}{2}}}$ $\qquad -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x =$

$\underline{\underline{C}} = -\frac{1}{2} - A + D = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, $\qquad -\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln(\underbrace{x^2+2x+2}_{\geq 1}) + C$.

35.10 PŘÍKLAD Najděme $\quad I = \int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + x - 1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$.

Neryze lomenou racionální funkci v integrandu musíme vydělit

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^3 + x^2 + x - 1)/(x^3+1) = x^2 + 1 + \frac{x-2}{x^3+1}. \\
\underline{-x^5 \qquad -x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad x^3 \qquad +x-1 \\
\qquad \underline{-x^3 \qquad\quad -1} \\
\qquad\qquad\quad x-2
\end{array}$$

Důsledek Viètovy věty říká, že ***celočíselné kořeny polynomu ve jmenovateli*** x^3+1 ***ryze lomené racionální funkce*** $\frac{x-2}{x^3+1}$ **se nachází (*pokud existují*) *mezi děliteli absolutního členu*** (zde je = 1) ***toho polynomu*** (zde $Q_3(x) = x^3+1$). Jsou zde dva dělitelé jedničky, a to –1, 1. Který z nich je zároveň kořenem polynomu x^3+1, ověříme následujícím **RUFFINIOVÝM-Hornerovým schématem**:

a)

	1	0	0	1
$x = \mathbf{-1}$	1	−1	1	$\underline{\underline{0}} = Q_3(\mathbf{-1})$

kde v 2. řádku jsme v důsledku toho, že má na konci 0, získali koeficienty podílu $q_2(x) = x^2 - x + 1 = \frac{x^3+1}{x+1}$, takže platí $\quad x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$; přitom jsme mohli místo R-H-schématu použít též následující:

b) první ze vzorců $(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, který dá totéž. Dosazovací metodou máme (Metoda neurčitých koeficientů by zde nebyla tak efektivní)

$$x - 2 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x+1)$$

$x=-1$: $\quad -3 = 3A \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A = -1}}$

$x=\ 0$: $\quad -2 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C = -1}}$

$x=\ 1$: $\quad -1 = -1 + (B-1)\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B = 1}}$. Rozklad na součet parciálních zlomků dává

$$\frac{x-2}{x^3+1}=\frac{x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad = \quad \frac{-1}{x+1}+\underbrace{\frac{x-1}{x^2-x+1}}_{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)-1}{x^2-x+1}}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}}\ .$$

Tedy
$$I=C+\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{arctan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=$$

$$\underline{\underline{\frac{x^3}{3}+x+\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C}}\ .$$

35.11 POZNÁMKA V aplikacích se lze setkat s mnohem složitějšími případy rozkladu polynomu $Q_n(x)$ na činitele i rozkladu ryze lomené racionální funkce $P_m(x)/Q_n(x)$ na parciální zlomky než jsme na jednoduchých příkladech v principu ukázali. Metody nalezení kořenů polynomů a řešení soustav lineárních rovnic (pro neznámé koeficienty parciálních zlomků) v obecném případě však už náleží do speciálních partií algebry a matematické analýzy, zvláště však do numerických metod.

35.12 ZÁVĚR KAPITOLY V r. 1826 dokázal Nor Niels Henrik Abel (1802 - 1829) Gaussovu hypotézu, že ***obecná algebraická rovnice*** $Q_n(x)=0$ ***není pro stupeň*** $n\ge 5$ ***polynomu*** $Q_n(x)$ ***algebraicky řešitelná***. Neuvažují se tedy speciální případy, např. *binomická rovnice* $x^5-32=0$, která se řeší na střední škole. Přitom algebraické řešení dané algebraické rovnice je takové řešení, kdy její kořeny jsou dány vzorci, jež obsahují výrazy s konečným počtem operací s jejími koeficienty (od sčítání až do odmocňování), podobně, jak je známe v jednodušší formě u vzorců pro kořeny kvadratického polynomu. V praxi počítáme na PC některou z numerických metod s požadovanou přesností kořeny algebraických rovnic nejen při $n\ge 5$, ale někdy už při $n=4$ či $n=3$, kdy se použití existujících vzorců (např. *Cardanových vzorců* při $n=3$) stává nepraktickým.

36 ✦ *CVIČENÍ* L ✦

■ Je-li nutné pří výpočtu následujících integrálů rozložit polynom (s celočíselnými koeficienty), jenž se nachází ve jmenovateli ryze lomené racionální funkce, pak nalezení množiny jeho celočíselných kořenů (existují-li) potřebných pro určení mocnin příslušných lineárních kořenových činitelů v rozkladu polynomu můžete převést díky důsledku 35.6 Vietovy věty na určení množiny dělitelů absolutního členu polynomu. Zjištění, který z dělitelů je i kořenem polynomu, pak ověřte spíše Ruffini-Hornerovým schématem, než jen dosazováním zkusmo do polynomu. Počítejte integrály

305 $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ ⦃ $\displaystyle\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctan}x+C$ ⦄

306 $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ ⦃ $\displaystyle\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ ⦄

307 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$, $a\ne 0$ ⦃???⦄

308 $\displaystyle\int\frac{t^3-8}{t^2-3t+2}\,\mathrm{d}t$ ⦃ $\displaystyle\frac{t^2}{2}+3t+7\ln|t-1|+C$ ⦄

309 $\displaystyle\int\frac{1+u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$ ⦃ $\displaystyle -u+\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$ ⦄

310 $\displaystyle\int\frac{8\,\mathrm{d}x}{(x+1)^3(x-1)}$ ⦃ $\displaystyle\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ ⦄

311 $\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5}$ ⦃ $\displaystyle\ln\sqrt{x^2+3x+5}-\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctan}\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+C$ ⦄

312 $\int \frac{33x-3}{3x^2-5x-2}\,dx$ $\quad\{\{\ 2\ln|3x+1| + 9\ln|x-2| + C\ \}\}$

313 $\int \frac{dz}{z^3+1}$ $\quad\{\{\ \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C\ \}\}$

314 $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$ $\quad\{\{???\}\}$

315 $\int \frac{t^3-2t+5}{t^4+3t^3+5t^2}\,dt$ $\quad\{\{???\}\}$

316 $\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)}\,dx$ $\quad\{\{\ \int\frac{x\,dx}{x^2+2x+3} + \int\frac{(x-1)\,dx}{x^2-2x+3} =$

$\frac{1}{2}\ln(x^4+2x^2+9) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C\ \}\}$

317 $\int \frac{u^4-6u^3+12u^2+6}{u^3-6u^2+12u-8}\,du$ $\quad\{\{\ \frac{u^2}{2} - \frac{11}{(u-2)^2} - \frac{8}{u-2} + C\ \}\}$

318 $\int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13}\,dx$ $\quad\{\{\ 3\ln|x+1| + 2\ln(x^2-4x+13) + 2\arctan\frac{x-2}{3} + C\ \}\}$

319 $\int \frac{5t-1}{t^3-3t-2}\,dt\,.$ $\quad\{\{\ \ln\left|\frac{t-2}{t+1}\right| - \frac{2}{t+1} + C\ \}\}$

37 INTEGRACE SUBSTITUCÍ

37.1 POZNÁMKA Jak je integrace per partes „obrácením“ vzorce pro derivování součinu dvou funkcí, je i substituční metoda „obrácením“ (a důsledkem) vzorce pro derivování složené funkce.

37.2 VĚTA (o integraci substitucí) Nechť funkce $f(x) \in C(I)$. Nechť funkce $x=\varphi(t) \in C^1(J)$ [tj. má spojitou derivaci na otevřeném intervalu J], a navíc interval J zobrazuje na interval I.
Pak platí $\quad \int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \quad$ pro $x \in I,\ t \in J,\ x=\varphi(t)$.

37.3 POZNÁMKA Rovnost je třeba chápat ve smyslu rovnosti množin odpovídajících primitivních funkcí tak, že dosadíme-li nalevo v rovnosti do každé funkce $f(x)$ v množině všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$, definovaných na intervalu I, za x následovně: $x=\varphi(t)$, pak tato množina splyne s množinou napravo všech primitivních funkcí k funkci $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, definovaných na intervalu J.

37.4 POZNÁMKA A UPOZORNĚNÍ [48.6] Rovnost používáme dvěma způsoby, kdy složitější integrál vlevo převedeme na výpočet integrálu vpravo, je-li jednodušší, nebo obráceně, složitější integrál vpravo počítáme výpočtem jednoduššího integrálu vlevo. Při použití vzorce („*zleva doprava*“ – pozor, vše je relativní) musíme navíc žádat (čtenář může zformulovat příslušné tvrzení sám), **aby funkce $\varphi(t)$** definovaná rovností $x=\varphi(t)$ **byla ryze monotónní** na intervalu J (tj. rostoucí či klesající), čímž v tomto případě zaručíme **existenci inverzní funkce** φ^{-1} na intervalu I k funkci φ. Inverzní funkci φ^{-1} totiž potřebujeme v závěrečné fázi výpočtu daného integrálu, kdy při zpětném dosazování („*zpětné substituci*“) musíme z rovnosti $x=\varphi(t)$ vyjádřit t: $t=\varphi^{-1}(x)$. Tento postup ukážeme až po následujícím příkladu.

37.5 PŘÍKLAD Je $\int \cos^5 t \sin t\,dt = \int x^5\,(-dx) = -\int x^5\,dx = -x^6/6 + C = -(\cos^6 t)/6 + C$.
Použili jsme substituci $\cos t = x$ (a vzorec „*zprava doleva*“) z čehož máme $-\sin t\,dt = dx$, a do výsledku jsme dosadili za x ze substituce $\cos t = x$. Čtenáři doporučujeme, aby tento příklad „znovu“ počítal jako $\int \cos^5 x \sin x\,dx$ a rychleji si tak osvojil použití substituční metody.

37.6 PŘÍKLAD [48.6] Vypočítejme na intervalu $[-5,5]$ integrál $\int\sqrt{25-x^2}\,dx$.

Integrand $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ je funkce spojitá na intervalu $[a, b]=[-5, 5]$. Položíme $x=\varphi(t)=5\sin t$ pro $t\in[-\pi/2, \pi/2]=[\alpha,\beta]$. Funkce φ má na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ derivaci $(5\sin t)'=5\cos t>0$, je zde tedy rostoucí funkcí a zobrazuje tento interval na interval $[-5, 5]$. Lze tedy použít tuto substituční metodu („*druhý typ*“), kdy dosadíme do integrálu kromě substituce $x=5\sin t$ rovněž za $dx=\varphi'(t)\,dt=5\cos t\,dt$. Dále je $\sqrt{25-25\sin^2 t}=5\sqrt{\cos^2 t}=5|\cos t|=$ $5\cos t$, neboť pro $t\in[-\pi/2, \pi/2]$ je $\cos t\ge 0$. Dosazením do vzorce obdržíme

$$\int f(x)\,dx=\int\sqrt{25-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=5\sin t\\ dx=5\cos t\,dt\end{array}\right|=\int 5\sqrt{\cos^2 t}\;5\cos t\,dt=25\int|\cos t|\cdot\cos t\;dt=$$

$$25\int\cos^2 t\;dt=\left|\underbrace{\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}}_{\text{vzorec}}\right|=25\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{25}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left|\begin{array}{c} x=5\sin t\\ t=\underbrace{\arcsin(x/5)}_{\varphi^{-1}(x)}\\ \sin 2t=2\sin t\cos t\end{array}\right|=$$

$$\frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{x}{5}+\frac{1}{2}2\sin t\cos t\right)+C=\left|5\sin t=x\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}>0\right|=\underline{\underline{\frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{x}{5}+\frac{x}{5}\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}\right)+C}}.$$

Použili jsme též toho, že pro $t\in[-\pi/2, \pi/2]$ platí $x=5\sin t$ právě tehdy, platí-li $t=\arcsin(x/5)$. Tento integrál vyřešíme v následující kapitole rovněž metodou per partes.

38 ✦ *CVIČENÍ* M ✦

■ Počítejte následující integrály

320 $\int\frac{x}{\sqrt[3]{5-4x^2}}\,dx$ $\{\!\{\, C-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(5-4x^2)^2}$; totiž $x\,dx$ je (až na činitel $2a$) diferenciálem funkce (ax^2+c) bez lineárního členu bx, a ta v integrandu je, a to pod 3. odmocninou. Tj. po substituci $t=-4x^2+5$ počítáme integrál $const.\cdot\int t^{-1/3}\,dt$, který umíme; obor existence integrálu získáme z podmínky $5-4x^2\neq 0$, tj. $x\in\mathbf{R}\setminus\{-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2\}\,\}\!\}$

321 $\int\sqrt{5x^2-2}\;x\,dx$ $\{\!\{\,(1/15)(5x^2-2)^{3/2}+C\,\}\!\}$

322 $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$ $\{\!\{\,C-1/(2\sin^2 x)\,\}\!\}$

323 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7-3x^4}}$ $\{\!\{\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,x^2\right)+C\,\}\!\}$

324 $\int\sin^{2006}t\,\cos t\,dt$ $\{\!\{\,\frac{1}{2007}(\sin t)^{2007}+C\,\}\!\}$

325 $\int e^{-3\cos x}\sin x\,dx$ $\{\!\{\,\frac{1}{3}e^{-3\cos x}+C\,\}\!\}$

326 $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ $\{\!\{\,\arctan e^x+C\,\}\!\}$

327 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ $\{\!\{\,2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C\,\}\!\}$

328 $\int\frac{x^2\,dx}{x^6+4}$ $\{\!\{\,\frac{1}{6}\arctan\frac{x^3}{2}+C\,\}\!\}$

329 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $\{\!\{$???; volíme $x=a\cos t$ či $x=a\sin t\,\}\!\}$

330 $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x}\,dx$ $\{\!\{$???; položíme $1+\sqrt[3]{x}=t^2\,\}\!\}$

331 $\int\frac{\sqrt[3]{\cot z}}{\sin^2 z}\,dz$ $\{\!\{\,-\frac{3}{4}(\cot z)^{4/3}+C\,\}\!\}$

332 $\int\frac{dx}{x\sqrt{4+3\ln x}}$ $\{\!\{\,\frac{2}{3}\sqrt{4+3\ln x}+C\,\}\!\}$

333 $\int\frac{u\,du}{\sqrt{u+4}}$ $\{\!\{$??? $\}\!\}$

334 $\int\frac{dv}{v\sqrt{v^2-4}}$ $\{\!\{$??? $\}\!\}$

335 $\int e^{e^x+x}\,dx$ $\{\!\{$??? $\}\!\}$

336 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2^x+1}}$. $\left\{\!\left\{ \dfrac{1}{\ln 2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2^x+1}-1}{\sqrt{2^x+1}+1}\right) + C \quad (x\in\mathbf{R}) \right\}\!\right\}$

337 Přesvědčte se, že snadno odvodíte vzorec $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$ (v intervalu, kde $x^2+a>0$), použijete-li tzv. 1. Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+a} = t-x$.

338 Na závěr zkuste $\int \dfrac{\sqrt{x-2}}{x+2}\,dx$. {{ ???; vede na integraci 4 parciálních zlomků }}

39 INTEGRACE PER PARTES (PO ČÁSTECH)

39.1 VĚTA Mají-li funkce $u(x)$, $v(x)$ v otevřeném intervalu J spojité první derivace (tj. $u, v \in C^{(1)}(J)$), platí: $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$.

DŮKAZ: je založen na integraci vzorce pro derivaci součinu.

39.2 POZNÁMKA Pomocí této metody lze vždy integrovat následující typy funkcí, v nichž $P(x)$ je polynom stupně $n\ge 0$ (tj. i konstanta). **Typ 1:** $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\,a^{bx}\,dx$, kde $a\neq 0$, $b\neq 0$, kdy klademe $v=P(x)$, tj. $v'=P'(x)$, kdežto u integrálů **typu 2:** $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int x^r\cdot \ln^n x\,dx$ ($r\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}^*$), $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\arctan x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arccot}\,x\,dx$, klademe $u'=P(x)$, tj. $u=\int P(x)\,dx$, resp. $u'=x^r$, tj. $u=x^{r+1}/(r+1)$. **Další typy:** Např. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ i různé rekurentní (redukční) vzorce

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \dots,\qquad I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \dots$$ atd., lze touto metodou získat.

39.3 PŘÍKLAD Vypočítejme
$$\int \arctan x\,dx = \int \overset{u'}{1}\cdot \overset{v}{\arctan x}\,dx = \left| u=x\,;\ v'=\frac{1}{1+x^2}\right| = x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \underline{\underline{x\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C}}.$$

39.4 PŘÍKLAD Vypočítejme $I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. Metoda per partes zde povede na rovnici pro řešený integrál I:

$$I = \underset{\left(u=x,\ v'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\int \overset{u'}{1}\cdot\overset{v}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{\left(-x^2+1\right)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x \;\Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$$

40 ✦ *CVIČENÍ* N ✦

■ Počítejte následující integrály

339 $\int x\sin x\,dx$ {{ $\sin x - x\cos x + C$ }}

340 $\int x^2\cos x\,dx$ {{ $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$ }}

341 $\int x\ln^2 x\,dx$ {{ $(x^2/4)(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$ }}

342 $\int x^r\ln x\,dx$ $(r\neq -1)$ {{ $[\,x^{r+1}/(r+1)^2\,]\cdot[\,(r+1)\ln x - 1\,] + C$ }}

343 $\int \sqrt{x}\ \ln^2 x\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ (2/27)\, x\sqrt{x}\ (9\ln^2 x - 24\ln x + 8) + C\ \}\!\}$

344 $\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ \mathrm{e}^{ax}/(a^2 + b^2)\ [\, a\cos(bx) + b\sin(bx)\,] + C\ \}\!\}$

345 $\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ ???\ \}\!\}$ **346** $\int (1/\sqrt{x})\ln^2 x\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ ???\ \}\!\}$

347 $\int \sqrt{x^2 + a}\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ (1/2)\,(\, x\sqrt{x^2 + a} + a\ln\left| x + \sqrt{x^2 + a}\right|\,) + C\ \}\!\}$ **348** $\int \arcsin t\, \mathrm{d}t$ $\{\!\{\ ???\ \}\!\}$

349 $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ 2\sqrt{x+1}\,\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C\ \}\!\}$

350 $\int x\, \operatorname{arccot} x\, \mathrm{d}x$ $\{\!\{\ (1/2)\,(x^2 + 1)\operatorname{arccot} x + x/2 + C\ \}\!\}$

351 $\int \cos\ln u\ \mathrm{d}u$. $\{\!\{\ (u/2)\,(\cos\ln u + \sin\ln u) + C\ \}\!\}$

352 Zkuste si odvodit metodou per partes rekurentní vzorec pro integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n} \equiv I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\ (2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\ \right] + C \quad (n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}^*)$$

(obecnější typ integrálu jsme zmínili v poznámce 35.1) tak, že začnete počítat integrál I_{n-1} a položíte v něm $u' = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$, $v = 1$. Z obdržené rovnice pak vyjádříte I_n.

41 INTEGRACE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

I) ZE ZÁKLADNÍCH VZORCŮ

41.1 PŘÍKLAD Známe už tabulkové integrály $\int \sin x\, \mathrm{d}x$; $\int \cos x\, \mathrm{d}x$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

II) UŽITÍM DALŠÍCH VZORCŮ ZE STŘEDNÍ ŠKOLY

a) Pomocí vzorců pro dvojnásobný argument

41.2 PŘÍKLAD Je $\int \sin^2 x\, \mathrm{d}x = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C}}$.

41.3 PŘÍKLAD Je $\int \cos^2 x\, \mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \underline{\underline{\dfrac{1}{4}(2x + \sin 2x) + C}}$.

41.4 PŘÍKLAD Je $\int \cos^2 3x\, \mathrm{d}x$ řešíme analogicky.

41.5 PŘÍKLAD Je $\int \sin^4 x\, \mathrm{d}x = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x =$

$$\frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C = \underline{\underline{\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + C}}\,.$$

41.6 PŘÍKLAD Je $\int \cos^4 x\, \mathrm{d}x = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x =$

$$\int\left(\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}\,x=$$
$$\frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C=\underline{\underline{\frac{1}{32}(12x+8\sin 2x+\sin 4x)+C}}\,.$$

b) Pomocí vzorců pro součin 1. mocnin funkcí sin (αx), resp. cos (βx),
kde $\alpha\neq\beta$ jsou reálná čísla, tj. například $\int\sin\alpha x\,\cos\beta x\,\mathrm{d}\,x$.
Užíváme známých vzorců ze střední školy.

1. $\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)\,x]$

2. $\sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta x)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)\,x-\cos(\alpha+\beta)\,x]$

3. $\cos(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)\,x+\cos(\alpha+\beta)\,x]$.

41.7 PŘÍKLAD Je $\int\sin\overset{\alpha}{\sqrt{2}}\,x\cdot\cos\overset{\beta}{\pi}x\,\,\mathrm{d}\,x\overset{\textbf{1. VZOREC}}{=}\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(\sqrt{2}-\pi\right)x+\sin\left(\sqrt{2}+\pi\right)x\right]\mathrm{d}\,x=$

$$\left|\int f(ax+b)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right|=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\left(\sqrt{2}-\pi\right)x}{\sqrt{2}-\pi}+\frac{-\cos\left(\sqrt{2}+\pi\right)x}{\sqrt{2}+\pi}\right]+C=$$
$$\underline{\underline{=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}-\pi}\cos\left(\sqrt{2}-\pi\right)x+\frac{1}{\sqrt{2}+\pi}\cos\left(\sqrt{2}+\pi\right)x\right]+C}}\,.$$

41.8 PŘÍKLAD Je $\int(\cos x\cdot\cos 2x)\cos 3x\,\mathrm{d}\,x=\int\frac{1}{2}(\overbrace{\cos x}^{\cos(-x)}+\cos 3x)\cos 3x\,\mathrm{d}\,x=$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 4x+\underbrace{\cos 0x}_{1}+\cos 6x)\,\mathrm{d}\,x=\underline{\underline{\frac{1}{4}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}\right)+C}}\,.$$

III) Rekurentními (redukčními) vzorci (Anglicky recurrent, recurring = vracející se)

$$S_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}[\;(n-1)\cdot\underbrace{\int\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x}_{S_{n-2}}-\sin^{n-1}x\cos x\;]+C,\quad n\geq 2$$
$$C_n=\int\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}[\;(n-1)\cdot\underbrace{\int\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x}_{C_{n-2}}+\cos^{n-1}x\sin x\;]+C,\quad n\geq 2\,.$$

Používáme je většinou až pro sudá $n\geq 6$.
DŮKAZ (metodou per partes)

$$S_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}\,x=\int\sin^{n-1}x\sin x\,\mathrm{d}\,x=\begin{vmatrix}u'=\sin x\,, & v=\sin^{n-1}x\\ u=-\cos x, & v'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\end{vmatrix}=$$
$$-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}\,\sin^{n-2}\mathrm{d}\,x\,.$$

Tedy $\quad S_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\cdot\underbrace{\int\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x}_{S_{n-2}}-(n-1)\cdot\underbrace{\int\sin^n x\,\mathrm{d}\,x}_{S_n}\,.$

Na levou stranu k sobě sečteme všechna S_n a obdržíme

$$[\underbrace{1+(n-1)}_{n}]\cdot S_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\cdot S_{n-2}.$$ Odtud získáme S_n.

41.9 PŘÍKLAD Dokažte si sami vzorec pro C_n.

IV) Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$,
kde $m, n \in \mathbf{Z}$, tj. jsou celá čísla, řešíme

a) substitucí: $\boldsymbol{\cos x = t}$, ($-\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$), je-li $\boldsymbol{m}$ liché (slovensky: *nepárne*)

41.10 PŘÍKLAD Je $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (t^2-1)t^2 \, \mathrm{d}t = \cdots$.

b) substitucí: $\boldsymbol{\sin x = t}$, je-li $\boldsymbol{n}$ liché číslo (Příklad uvádíme v 41.14)

c) jsou-li $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ obě sudá (slovensky: *párne*), pak pro snížení těchto mocnin, pokud nejsou vysoké, použijeme **vzorce ze střední školy** pro dvojnásobné argumenty nebo musíme použít rekurentní vzorce, nebo, jak uvidíme dále, lze užít substituci $\tan x = t$, pokud jedno z čísel (sudých) je záporné, tj. integrandem je lomená racionální funkce.

41.11 PŘÍKLAD Je $$\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \text{Vyhneme se} \\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x, \\ \text{tj. vedlo by na } \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C = \underline{\underline{\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x + C}}.$$

41.12 PŘÍKLAD Vypočítejme $$\int \cos^{-1} x \, \mathrm{d}x \overset{[m=0,\ n=-1]}{=} \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{1-\sin^2 x} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C}}.$$

V) Obecná integrace goniometrických funkcí

Výpočet integrálu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální funkcí (většinou lomenou nebo i celistvou) argumentů $\sin x$, $\cos x$ (tj. popř. též funkcí $\tan x$ či $\cot x$) lze následujícími substitucemi převést na integrál $\int R^*(t)\,\mathrm{d}t$, kde integrand R^* je racionální funkce proměnné t, jenž umíme integrovat. Substituci volíme podle následujícího **velmi důležitého schématu:**

a) $\boldsymbol{\cos x = t}$, je-li $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, tj. R je <u>lichá</u> funkce vzhledem k funkci $\boldsymbol{\sin x}$
b) $\boldsymbol{\sin x = t}$, je-li $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, tj. R je <u>lichá</u> funkce vzhledem k funkci $\boldsymbol{\cos x}$
c) $\boldsymbol{\tan x = t}$, je-li $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, tj. R je <u>sudá</u> funkce vzhledem k funkcím $\boldsymbol{\sin x}$, $\boldsymbol{\cos x}$

d) $\boldsymbol{\tan \frac{x}{2} = t}$, **<u>UNIVERZÁLNÍ SUBSTITUCE</u>** se většinou zvolí, pokud nelze použít některou z probraných metod I - IV, i když i v nich je její použití možné, ale často vede ke složitější integraci.

41.13 PŘÍKLAD ad a) Vypočítejme

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} R(-\sin x, \cos x) = \dfrac{(-\sin x)^3}{2+\cos x} = -\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x} = -R(\sin x, \cos x) \\ \\ \text{Tedy položíme } \boxed{\cos x = t} \Rightarrow (-\sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)(-\sin x\,\mathrm{d}x)}{2+\cos x} = \int \frac{t^2-1}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2-4)+3}{t+2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int \left(t-2+\frac{3}{t+2} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(\underbrace{\cos x + 2}_{\geq 1}) + C\,.$$

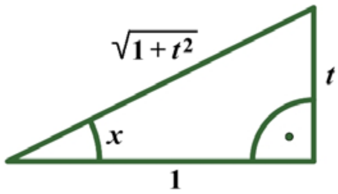
41.14 PŘÍKLAD ad b) Vypočítejme [41.10]

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cos 2x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1-\sin^2 x - \sin^2 x)} = -\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1-\sin^2 x)(2\sin^2 x - 1)} =$$

$$\left| \begin{array}{c} \boxed{\sin x = t} \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)(2t^2-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)(t^2-1/2)} =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)(t+\sqrt{1/2})(t-\sqrt{1/2})} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1/\sqrt{2}} + \frac{D}{t+1/\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}t = \cdots\,.$$

41.15 POZNÁMKA ad c)



$\boxed{\tan x = t}$ je substituce, k níž potřebujeme vzorec pro dosazení za $\sin x$, $\cos x$, čemuž slouží obrázek.

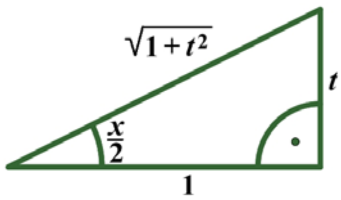
$x = \arctan t$, $\boxed{\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}$ $\boxed{\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}$ $\boxed{\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$

41.16 PŘÍKLAD ad c) substituce $\tan x = t$ umožní vypočítat

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^4 x} = \left| R(-\sin x, -\cos x) = +R(\sin x, \cos x) \right| = \int \frac{\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} \cdot \dfrac{1}{(1+t^2)^2}} =$$

$$\int \frac{t^4+2t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^2+2+t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \cot x + C\,.$$

41.17 POZNÁMKA ad d) $\boxed{\tan\dfrac{x}{2} = t}$ je tzv. **univerzální substituce**.



Odtud $\dfrac{x}{2} = \arctan t$ je $\boxed{\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}$. Přejdeme k polovičním argumentům podle vzorců ze střední školy a využijeme i obrázku:

$$\boxed{\sin x} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \overset{\textbf{obr.}}{=} 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$ **lichá** funkce.

$$\boxed{\cos x} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \overset{\textbf{obr.}}{=} \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$ **sudá** funkce.

Oba vztahy lze odvodit i bez obrázku čistě formálně takto

$$\sin x = \frac{\sin 2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\left(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos 2\dfrac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

41.18 PŘÍKLAD ad d) Je $\displaystyle\int\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x = \left|\tan\frac{x}{2}=t\right| = \int\frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} =$

$$2\int\frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+1)} = 2\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = \underline{\underline{2\ln\left|\frac{\tan\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}+1}\right| + C}}.$$

42 ✦ *CVIČENÍ* O ✦

■ Počítejte následující integrály zásadně bez použití rekurentních vzorců, zato však kde je to výhodné, používejte vzorce pro dvojnásobný (poloviční) argument, vhodnou substituci nebo tak jak doposud úpravu apod.

353 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ {{ $\tan x - \cot x + C$ }} **354** $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ {{ $C - \dfrac{1}{2\sin x}$ }}

355 $\displaystyle\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ {{ $C - x - \cot x$ }}

356 $\displaystyle\int\sin^7 t\,\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ {{ $\dfrac{1}{9}\cos^9 t - \dfrac{3}{7}\cos^7 t + \dfrac{3}{5}\cos^5 t - \dfrac{1}{3}\cos^3 t + C$ }}

357 $\displaystyle\int(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ {{ $C - \dfrac{1}{4}(1+\cos\varphi)^4$ }}

358 $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin x+3}\,\mathrm{d}x$ {{ $C - \dfrac{1}{2}\sin^2 x + 3\sin x - 8\ln|\sin x+3|$ }}

359 $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+1}\,\mathrm{d}x$ {{ $C - \arctan(\cos^2 x)$ }} **360** $\displaystyle\int\sin^4 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$ {{ ??? }}

361 $\displaystyle\int\sin^7 x\,\mathrm{d}x$ {{ ??? }} **362** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\cos^2 x}$ {{ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan x) + C$ }}

363 $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ {{ $\arctan(\tan^2 x) + C$ }} **364** $\displaystyle\int\tan^3 x\,\mathrm{d}x$ {{ $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ }}

365 $\displaystyle\int\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ {{ $\ln\left|\dfrac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + C$ }}

366 $\displaystyle\int\frac{\cot x}{1-\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ {{ $\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\cot\dfrac{x}{2}\right| + C$ }}

367 $\displaystyle\int\frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ {{ ??? }} **368** $\displaystyle\int\frac{\sin x-1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. {{ $C - \ln|\sin x+1|$ }}

43 INTEGRACE DALŠÍCH FUNKCÍ

a) Integrály typu $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) \mathrm{d}x$,

kde R je racionální funkce a p_i, q_i jsou dvojice nesoudělných celých čísel , řešíme substitucí $\boxed{x = t^s}$, odkud $\underline{\mathrm{d}x = s \cdot t^{s-1} \mathrm{d}t}$, kde s je nejmenší společný násobek jmenovatelů $q_1, q_2, \ldots, q_n$, která vede na $\int R^*(t)\,\mathrm{d}t$, přičemž R^* je racionální funkce, kterou už umíme integrovat.

43.1 PŘÍKLAD Vypočítejme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x \overset{(x\geq 0)}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \Rightarrow s = 4 \\ \text{subs. } x = t^4 \\ \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{t^4}\cdot 4t^3\,\mathrm{d}t}{1+\sqrt[4]{t^{12}}} = 4\int \frac{t^2}{1+t^3}\cdot t^3\,\mathrm{d}t = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln\overbrace{(\sqrt[4]{x^3}+1)}^{\geq 1} + C}}\,.$$

b) Integrály typu $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) \mathrm{d}x$

převedeme substitucí $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s}$ [za podmínky, že $(ad-bc)\neq 0$, neboť ta nám zaručí, že lineární polynomy $ax+b$, $cx+d$ v podílu $(ax+b)/(cx+d)$ nejsou soudělné, tj. tento podíl se po příslušném krácení nemůže redukovat na konstantní funkci], kde s je nejmenší společný násobek jmenovatelů $q_1, q_2, \ldots, q_n$, na $\int R^*(t)\,\mathrm{d}t$, kde R^* je racionální funkce, kterou umíme integrovat.

Dostaneme $ax+b = cx\cdot t^s + d\cdot t^s$, tedy $x\left(a - c\cdot t^s\right) = d\cdot t^s - b$

$x = \dfrac{d\cdot t^s - b}{a - c\cdot t^s}$, a pak vypočítáme diferenciál dx =… . Postup demonstruje následující

43.2 PŘÍKLAD Vypočítejme integrál

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} \frac{x-1}{x+2} = t^4 \\ x - 1 = t^4x + 2t^4 \Rightarrow x = \frac{2t^4+1}{1-t^4} \\ \mathrm{d}x = \frac{12t^3\,\mathrm{d}t}{\left(1-t^4\right)^2} \\ x-1 = \frac{3t^4}{1-t^4};\ x+2 = \frac{3}{1-t^4} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^4\right)^2\cdot t\cdot 12t^3\,\mathrm{d}t}{9t^4\cdot\left(1-t^4\right)^2} = \frac{4}{3}\int \mathrm{d}t = \frac{4}{3}t + C = \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x-2}} + C}}\,.$$

c) Integrály typu $\int R(a^x)\,\mathrm{d}x$ převedeme substitucí $\boxed{a^x = t}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ na $\int R^*(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{t\cdot\ln a}$,

kde R^* je racionální funkce, kterou umíme integrovat.

43.3 PŘÍKLAD Je $\int \frac{2^x}{4^x+5\cdot 2^x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 4^x = 2^{2x} = \left(2^x\right)^2 \\ \text{subst. } 2^x = t \quad |\ln(\ ) \\ x\cdot \ln 2 = \ln t \\ dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t}{\ln 2}\cdot\frac{1}{t}\,dt}{t^2+5t} = \frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t(t+5)} =$

$$\frac{1}{5\ln 2}\int\frac{(t+5)-t}{t\,(t+5)}\,dt = \frac{1}{5\ln 2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+5}\right)dt = \frac{1}{5\ln 2}\left[\ln 2^x - \ln\left(2^x+5\right)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{5\ln 2}\cdot\ln\frac{2^x}{2^x+5}+C}}.$$

43.4 POZNÁMKA Zatímco operace derivování vždy dává opět elementární funkci, u integrování tomu tak obecně není – viz poznámka 32.8. V obecném případě také neumíme odpovědět, zda hledanou primitivní funkci $F(x)$ doposud

1) neznáme z důvodu použití nevhodných metod nebo

2) zda jde o vyšší transcendentní funkci, tj. funkci, kterou nelze vyjádřit konečným výrazem obsahujícím elementární funkce.
Vyšší transcendentní funkce jsou často řešeními jistých diferenciálních rovnic a bývají vyjádřeny v integrálním tvaru nebo pomocí nekonečných řad funkcí.

43.5 NAPŘÍKLAD jde o následující vyšší transcendentní funkce

$F(x) = \int e^{-x^2}\,dx$ …Laplace-Gaussův integrál, častěji ve tvaru určitého integrálu $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x)$

$\mathrm{li}(t) = \int\frac{dt}{\ln t} = \int\frac{e^x}{x}\,dx$ …funkce integrállogaritmus neboli logaritmusintegrál

$\mathrm{Si}(x) = \int\frac{\sin x}{x}\,dx$ ……...funkce integrálsinus neboli sinusintegrál

$F(x) = \int \sin x^2\,dx$; $F(x) = \int\cos x^2\,dx$ … Fresnelovy integrály (funkce) atd.

44 ✦ *CVIČENÍ* P ✦

■ Počítejte následující neurčité integrály

369 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$ $\quad\{\{\ 2\left(\sqrt{x-1}-\ln\left|\sqrt{x-1}+1\right|\right)+C\ \}\}$

370 $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\{\{\ 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C\ \}\}$

371 $\int\frac{\sqrt{3x+1}}{x}\,dx$ $\quad\{\{\ \ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right|+2\sqrt{3x+1}+C\ \}\}$

372 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{x}+2)}$ $\quad\{\{\ 3(\sqrt[3]{x}-2\ln\left|\sqrt[3]{x}+2\right|)+C\ \}\}$

373 $\int\frac{a^x}{a^{2x}+1}\,dx \quad (a>0,\ a\neq 1)$ $\quad\{\{\ \frac{1}{\ln a}\arctan(a^x)+C\ \}\}$

374 $\int\frac{du}{e^{2u}-e^u}$ $\quad\{\{\ ???\ \}\}$

375 $\int\frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$ $\quad\{\{\ 2\ln\left|e^x-1\right|-x+C\ \}\}$

376 $\int\frac{3^x}{5+9^x}\,dx$. $\quad\{\{\ \frac{1}{\sqrt{5}\ln 3}\arctan\left(\frac{3^x}{\sqrt{5}}\right)+C\ \}\}$

■ Prokažte přehled při řešení závěrečné desítky smíšených úloh na integrování

377 $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$

378 $\int\sqrt[5]{(1-2x)^3}\,dx$

379 $\int\ln(t+1)\,dt$

380 $\int\frac{u^4}{u^{10}+4}\,du$

381 $\int x\tan^2 x\,dx$

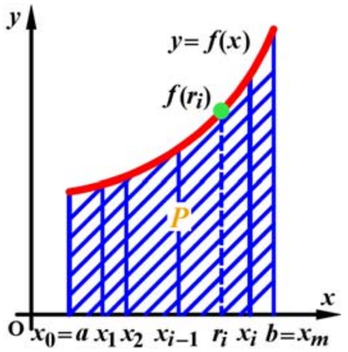
382 $\int\sqrt{1+4e^{2x}/(e^{2x}-1)^2}\,dx$

383 $\int\frac{a^{2x}\,dx}{\sqrt{a^{4x}+3}}$

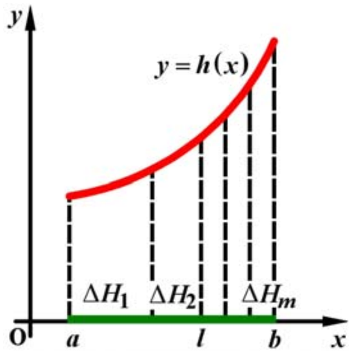
384 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x + 4\cos x}$ **385** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}$ **386** $\displaystyle\int z^3\sqrt{z^2+5}\,\mathrm{d}z$.

45 URČITÝ INTEGRÁL RIEMANNŮV

45.1 MOTIVACE GEOMETRICKÁ A FYZIKÁLNÍ [45.6]



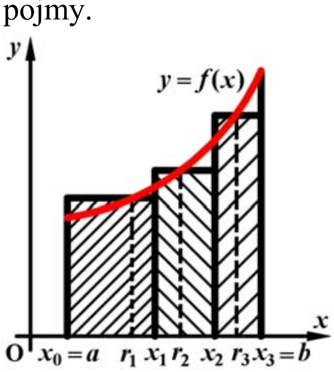
A) Chceme vyčíslit obsah P „nekomplikované“ plochy rovinného obrazce, kterým nechť je *křivočarý lichoběžník* na obrázku, jenž je ohraničen přímkami o rovnicích $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem jisté spojité nezáporné funkce $f(x)$, znázorněné na obrázku.

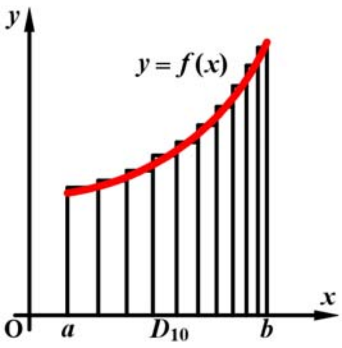


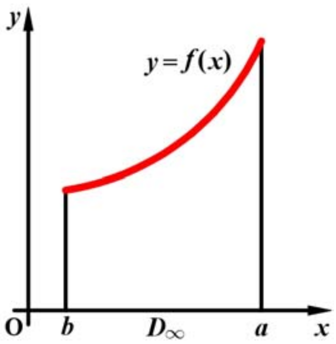
B) Chceme najít hmotnost H nehomogenního tenkého rovného drátu splývajícího s intervalem $[a, b]$ na ose Ox, tj. jehož délka je $l = b - a$, a jenž má spojitě rozloženou hmotnost H o délkové hustotě určené funkcí $h(x)$ a s měřicí jednotkou hustoty $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Nechť $h(x)$ je pro jednoduchost opět spojitá nezáporná funkce.

Vyslovme hypotézu, že $P = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta P_i$, resp. $H = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta H_i$, kde

ΔP_i, resp. ΔH_i je obsah, resp. hmotnost i-té části ($i = 1, 2, \dots, m$) původního *křivočarého lichoběžníka*, resp. *drátu*, kde se, zhruba řečeno, funkce $f(x)$, resp. hustota $h(x)$ „příliš nemění“. Ukážeme, že v **geometrickém** případě A) i **fyzikálním** případě B) lze jak obsah plochy P, tak i hmotnost H drátu definovat symbolem $\int$ integrálu, podrobněji $P := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $H := \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$, jenž vznikl z nedbale psaného písmene S slova SUMA, a jenž označuje jistý, tzv. **integrální součet funkce** f. Nyní se opřeme o přesné pojmy.







45.2 DEFINICE (Dělení kompaktního intervalu [*a*, *b*]) Nechť je dán kompaktní (tj. ohraničený i uzavřený) interval $[a, b]$ a v něm jsou (kromě jeho krajních bodů) zcela libovolně vybrány dělicí body $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$, tzv. <u>uzly nepravidelné sítě</u> tak, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m \le b$, kde m je kladné celé číslo. Řekneme, že sítí uzlů je dáno <u>dělení D</u> $=\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ intervalu $[a, b]$ na dílčí intervaly, stručně na podintervaly $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, m$. Označme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ nebo jen Δ_i <u>délku</u> i-tého podintervalu. Číslo

$$\|D\| = \max_{i=1,2,\dots,m}\{\Delta x_i\}$$

se nazývá <u>norma dělení D</u>.

45.3 DEFINICE (Integrální součet funkce) Nechť je dáno dělení D intervalu $[a, b]$ na podintervaly $[x_{i-1}, x_i]$, a nechť funkce $f(x)$ je <u>ohraničená</u> funkce v $[a, b]$. Zvolme ***zcela***

náhodně v každém podintervalu bod $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, m$, nazvěme jej i-tý reprezentant a jejich množinu $V = \{r_1, \dots, r_m\}$ nazvěme výběr reprezentantů. Číslo

$$s(f,D,V) = \sum_{i=1}^{m} f(r_i)\cdot \Delta x_i$$

pak nazveme Riemannův integrální součet funkce f při dělení D intervalu $[a, b]$ a výběru V reprezentantů (r_i v podintervalech délky Δx_i).

45.4 DEFINICE (Normální posloupnost dělení intervalů) Nechť je dána (nekonečná) posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} = \{D_1, D_2, \dots, D_n, \dots\}$, stručněji $\{D_n\}$, dělení intervalu $[a, b]$ na podintervaly. Tato posloupnost se nazývá normální posloupnost, když příslušná číselná posloupnost norem, tj. posloupnost $\{\|D_n\|\}$ konverguje k nule [tedy je tzv. nulovou posloupností $\{a_n\}$, pro niž $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$] neboli $\lim\limits_{n\to\infty}\|D_n\| = 0$, stručněji $\|D_n\| \to 0+$ nebo jen $\|D\| \to 0$.

Geometricky to znamená, že pro každé $k \ge k_0$ (tj. počínaje jistým indexem k_0) má následující dělení D_{k+1} oproti předešlému D_k v posloupnosti dělení $\{D_n\}$ větší počet dělicích bodů, tj. dělení se neustále zjemňují či zhušťují, tedy norma $\|D\|$ dělení D dává informaci, jak „jemné" je dělení.

45.5 PŘÍKLAD Nechť D_n je speciální dělení intervalu $[a, b]$ na n stejných dílků (stejných zcela výjimečně, jen kvůli jednoduchosti) délky $h_n = \dfrac{b-a}{n} = const.$, tedy **ekvidistantními** dělicími body **pravidelné sítě** při dělení D_n jsou ekvidistantní uzly sítě ${}^{n}x_i = a + i\cdot h_n$, $i = 0, 1, \dots, n$. Posloupnost dělení D_n je normální posloupnost, neboť $\|D_n\| = h_n$ a platí

$$\lim_{n\to+\infty}\|D_n\| = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n} = (b-a)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = (b-a)\cdot 0 = \underline{\underline{0}}.$$

45.6 DEFINICE určitého integrálu Riemannova či krátce **R-integrálu**
[Němec Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)]

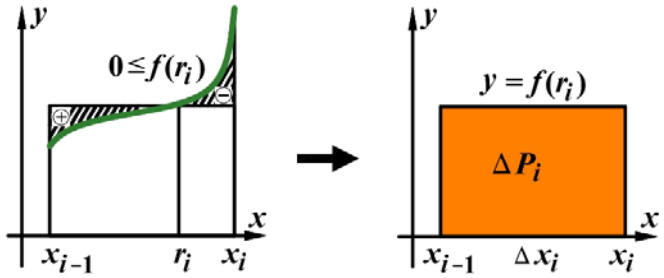
a) Nechť funkce $f(x)$ je *ohraničená* na intervalu $[a, b]$ a pro libovolnou *normální* posloupnost *dělení* $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ (tj. kdy $\|D_n\| \to 0$ neboli posloupnost délek nejširších podintervalů odpovídajících dělení D_n má za limitu 0) a každou posloupnost $\{V_n\}$ odpovídajících *výběrů reprezentantů* (tj. *náhodných* čísel r_i obrázku na str. 77) je posloupnost *Riemannových integrálních součtů* $\{s(f, D_n, V_n)\}$ **konvergentní** (kde velmi podrobně: $s(f,D_n,V_n) = \sum_{i=1}^{m_n} f(r_i)\cdot\Delta x_i$), což znamená, že existuje **konečná** limita posloupnosti Riemannových integrálních součtů $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, D_n, V_n)$. Potom řekneme, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná či integrace schopná (integrabilní) nebo podrobněji: **integrovatelná v Riemannově smyslu**.

b) Je-li f integrovatelná v $[a, b]$, pak zmíněnou (společnou) limitu posloupností Riemannových integrálních součtů nazveme **Riemannův integrál**, nebo častěji jen určitý integrál funkce f na integračním intervalu $[a, b]$ a značíme jej $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$. Říkáme též, že integrál funkce f na intervalu $[a, b]$ existuje (resp. neexistuje, právě když f není integrovatelná). Definujeme tedy limitním přechodem dvěma často používanými stručnými zápisy R-integrál takto

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\|D\|\to 0} s(f,\ D,\ V) = \lim_{\substack{n\to+\infty\\ (\|D\|\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta x_i}\ .$$

Toto vše ekvivalentně stroze shrne **(Cauchy-)Weierstrassova ε – δ definice R-integrálu**:

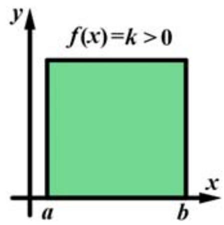
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ existuje } \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall D\ \ \forall V : \|D\| < \delta \Rightarrow \left| s(f,D,V) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon}\ .$$



Přitom a nebo b se nazývá dolní či horní mez integrace (integrálu) z integračního intervalu $[a, b]$.

45.7 POZNÁMKA Intuitivně očekáváme, že kvalita aproximace obsahu ΔP_i *křivočarého* i-tého *lichoběžníka* obdélníkem o stejném obsahu $\Delta P_i = f(r_i) \cdot \Delta x_i$ roste při zmenšování normy $\|D_n\|$. Proto jsme zavedli pojem normální posloupnosti dělení, a dále pak užili limitní přechod. Požadavek nezávislosti R-integrálu na volbě normální posloupnosti dělení a výběru V reprezentantů v podintervalech má totiž reálné pozadí – **nelze připustit**, aby geometrická nebo fyzikální veličina závisela na subjektivním vlivu (na tom, jak dělíme a jak volíme reprezentanty).

45.8 PŘÍKLAD Speciálně nechť f je konstantní funkce na $[a, b]$, tj. např. $f(x) = k$, $k > 0$ pro $x \in [a, b]$. Pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ a každý výběr reprezentantů r_i je integrální součet



$$s(f, D, V) = k \cdot \Delta x_1 + k \cdot \Delta x_2 + \ldots + k \cdot \Delta x_n = k \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = k \cdot (b - a),$$

takže f je integrovatelná v $[a, b]$ a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b k\,\mathrm{d}x = k \cdot (b - a)$,

což pro $k > 0$ odpovídá geometrické i fyzikální představě (interpretaci).

45.9 PŘÍKLAD [45.15] Uvažujme modifikovanou Dirichletovu (neelementární) funkci

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } a \le x \le b, & x \text{ racionální} \\ -1 \text{ pro } a \le x \le b, & x \text{ iracionální.} \end{cases}$$

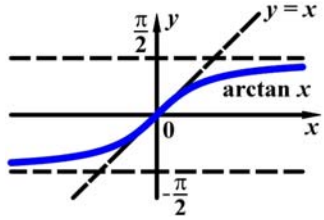
Ukážeme, že takto definovaná, i když ohraničená funkce, není integrovatelná na žádném intervalu $[a, b]$. Uvažujme některou normální posloupnost dělení D_n, $n = 1, 2, \ldots$, intervalu $[a, b]$.
Při dělení D_n a výběru V_n racionálních, resp. výběru V_n iracionálních bodů (reprezentantů) r_i v podintervalech máme integrální součet $s(\chi, D_n, V_n) = b - a$, resp. $s(\chi, D_n, V_n) = (-1) \cdot (b - a)$.
Posloupnost integrálních součtů $\{s(\chi, D_1, V_1), s(\chi, D_2, V_2), \ldots\}$ nemá vzhledem k předešlé definici limitu, takže $\int_a^b \chi(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje. Tedy pouhá ohraničenost funkce nezaručuje její integrovatelnost na $[a, b]$.
Avšak $|\chi(x)| = 1$ je konstantní funkce, takže platí $\int_a^b |\chi(x)|\,\mathrm{d}x = b - a$, tedy $\chi(x)$ je pouze integrovatelná v absolutní hodnotě.

45.10 DEFINICE množiny spočetné, nejvýše spočetné a nespočetné Množina (bodů) se nazývá **spočetná** a říkáme o ní také, že má **spočetně mnoho** prvků, když všechny její prvky lze vzájemně jednoznačně (tj. bijektivně) přiřadit kladným celým číslům $1, 2, 3, \ldots$, tedy uspořádat je v (nekonečnou) prostou posloupnost (v ní se žádný člen neopakuje). Nazývá se **nejvýše spočetná**, též říkáme, že má **nejvýše spočetně mnoho** prvků, když je to množina konečná (vč. prázdné množiny $\emptyset$) nebo spočetná. Množiny, které nejsou nejvýše spočetné, nazýváme **nespočetné množiny** [což je množina všech reálných čísel **R** či libovolný interval reálných čísel nenulové délky (neboli nenulové míry v **R**) jako je např. interval $[0, 1)$, zatímco množina všech bodů reálné osy $\mathbf{E}_1$ s racionálními souřadnicemi (tj. množina **Q** všech racionálních čísel) je ještě spočetná].

45.11 VĚTA (o invariantnosti (neměnnosti) Riemannova integrálu vzhledem ke změně hodnot na množině nejvýše spočetné) Nechť funkce f je integrovatelná na $[a, b]$ a funkce g se liší od f v konečně mnoha (nebo v nejvýše spočetně mnoha bodech) z intervalu $[a, b]$ (popřípadě v některých z těchto bodů dokonce není ani definována). Potom je v $[a, b]$ integrovatelná i funkce g a platí: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

45.12 VĚTA [80] Nechť funkce f je ohraničená na $[a, b]$ a existují takové dělicí body $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s = b$, že f je na každém podintervalu (a_{i-1}, a_i), $i = 1, 2, \ldots, s$, spojitá. Potom je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$.

45.13 PŘÍKLAD



a) Funkce $f(x) = \arctan x$ je integrovatelná v libovolném intervalu $[a, b]$, protože je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$.

b) $\int_0^\pi \tan x\,\mathrm{d}x$ neexistuje, neboť $\tan x$ není ohraničená v intervalu $[0, \pi]$.

45.14 POZNÁMKA [80] Větu 45.12 lze výrazně zobecnit. Je-li f ohraničená v $[a, b]$, pak k její integrovatelnosti v tomto intervalu stačí, aby v každém podintervalu (a_{i-1}, a_i), $i = 1, 2, \ldots, s$, kde s je kladné celé číslo, byla funkce monotónní (tj. rostoucí či klesající nebo nerostoucí nebo neklesající) nebo spojitá.
Větu lze ještě zobecnit a ukázat, že pro funkci ohraničenou na $[a, b]$ a na každém jeho podintervalu (a_{i-1}, a_i) monotónní či spojitou může být dělicích bodů s nespojitostmi 1. druhu (konkrétně dělicích bodů $a_1, \ldots, a_s$) dokonce i **spočetně mnoho** [tj. mohou tvořit (nekonečnou) posloupnost].

45.15 POZNÁMKA V aplikované matematice se dnes využívá tzv. **Lebesgueův (určitý) integrál** [Francouz Lebesgue, Henri Léon (1875 - 1941)], objevený v roce 1902 a zobecňující R-integrál. Teorie L-integrálu je však dost obsáhlá. Připomeňme, že už v diferenciálním počtu v příkladu **1.9** a nyní v příkladu 45.9 zmíněná modifikovaná Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá Riemannův integrál (pouze $|\chi(x)|$ má R-integrál $\int_a^b |\chi(x)|\,\mathrm{d}x = b - a$, tj. $\chi(x)$ je pouze integrovatelná (ve smyslu Riemanna) v absolutní hodnotě), zatímco L-integrál je $\int_a^b \chi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)\cdot(b-a) = a - b$, tj. existuje [konverguje neboli je konečný, neboť množina **Q** všech racionálních čísel má jako každá spočetná množina (Lebesgueovu) míru rovnu 0].

45.16 AKTUÁLNÍ POZNÁMKA Klasickou součtovou definici R-integrálu zobecnil v r. 1957 český matematik **Jaroslav Kurzweil** (1926 -), takže se ve světové literatuře tento jeho „renovovaný R-integrál“ cituje jako K-integrál, popř. Kurzweil-Henstockův integrál. Tento integrál je výrazně jednodušší než L-integrál a odstraňuje některé jeho nedostatky (nevyžaduje tzv. „absolutní“ integrovatelnost funkce).

46 VĚTA NEWTON – LEIBNIZOVA – ZÁKLADNÍ VĚTA INTEGRÁLNÍHO POČTU

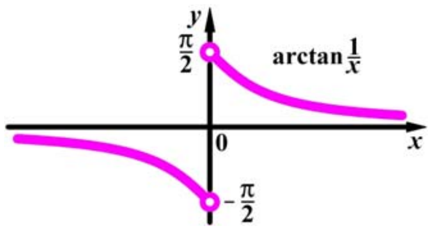
46.1 VĚTA NEWTON – LEIBNIZOVA Nechť funkce ***f*(*x*)** **je integrovatelná na intervalu** **[*a*, *b*]**, a nechť

a) primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ je **spojitá** na $[a, b]$, (tj. $\boldsymbol{F(x) \in C[a, b]}$),

b) rovnost $F'(x) = f(x)$ platí ve všech bodech [a, b] až na konečný počet [Šlo by jistě zobecnit ve smyslu poznámky 45.14]. Potom platí **Newtonova-Leibnizova formule (vzorec)** [81]

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b}\,, \tag{46.1}$$

kde uspořádaná dvojice $[\quad]_a^b$ se nazývá Newtonovy-Leibnizovy závorky.

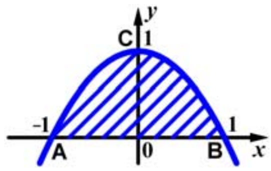


46.2 POZNÁMKA Rovnicí (46.1) je definován tzv. Newtonův určitý integrál, kdy Newtonova definice předpokládá jen existenci primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x)$ pro libovolná čísla $a, b \in J$, kde J je otevřený interval. Přesto lze ukázat, že zmíněný **N-integrál** neexistuje ani pro funkce s body nespojitosti 1. druhu, na jejichž okolí je $f(x)$ ohraničená. Např. neexistuje N-integrál $\int_{-1}^{1} \arctan\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ pro integrand $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$ [k němuž lze primitivní funkci $F(x)$ najít metodou per partes (ověřte si)], jenž je všude (viz obrázek) i na okolí bodu $x = 0$ ohraničen a má v tomto bodě nespojitost 1. druhu, neboť $f(0\pm) = \pm\frac{\pi}{2}$. Existuje příslušná primitivní funkce $F(x) = x \cdot \arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$ pro $x \neq 0$, která však nemá derivaci $F'(0)$, neboť i když nulou dodefinujeme $F(0) = 0$, jednostranné derivace $F(0\pm) = \pm\frac{\pi}{2}$ jsou různé. Přitom Riemannův integrál $\int_{-1}^{1} \arctan\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ existuje, neboť integrand f je na intervalu $[-1, 1]$ funkcí po částech spojitou a pro $x = 0$ klademe $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x) = 0$. Dosazením do vzorce (46.1) se přesvědčte, že R-integrál je roven 0 (Integrand f je lichá funkce).
Avšak pro funkce $f \in C[a, b]$, tj. pro „dostatečně“ mnoho funkcí, integrály Newtonův i Riemannův splývají. V seminářích při počítání příkladů v podstatě vystačíme s Newtonovým integrálem.

46.3 ÚMLUVA Nebude-li uvedeno jinak, **vždy budeme slovy určitý integrál mínit** Riemannův integrál, stručně **R-integrál**.

46.4 VÝZNAM NEWTON-LEIBNIZOVY FORMULE spočívá v tom, že spojuje probraný neurčitý integrál s určitým integrálem, takže známe-li primitivní funkci $F(x)$ k integrandu $f(x)$, pak není nutné tvořit Riemannovy integrální součty $s(f, D, V)$ a hledat jejich limitu, nýbrž stačí určit $F(b) - F(a)$, tj. rozdíl funkčních hodnot primitivní funkce v horní a dolní mezi.

46.5 TŘI PŘÍKLADY [98]

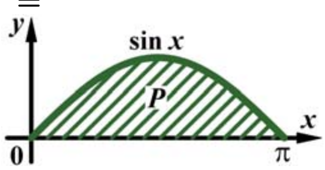


PŘÍKLAD 1 Určeme obsah P plochy parabolické úseče na obrázku. Víme, že parabola je třemi body A, B, C určena jednoznačně. Platí

$y = ax^2 + bx + c$ [popř. $y - y_0 = \lambda(x - x_0)^2$, kde $\mathrm{C} = (x_0, y_0) = (0, 1)$]

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}: 0 &= a - b + c \\ \mathrm{B}: 0 &= a + b + c \end{aligned}\right\} \ (-) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 0 = -2b\text{, tj. } b = 0.\text{ Pak } a = b - c = -1. \\ \text{Tedy} \quad y = -x^2 + 1. \end{aligned}\right\}$$
$$\underline{\mathrm{C}: 1 = \qquad c}$$

$$P = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (-x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 2\left[-\frac{1}{3} + 1 + 0 - 0\right] = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}\ (\mathrm{j}^2).$$



PŘÍKLAD 2 $\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -[\cos\pi - \cos 0] = 2\ (\mathrm{j}^2) = \underline{\underline{P}}.$

Jde o obsah plochy pod půlperiodou sinusoidy.

PŘÍKLAD 3 Formální výpočet $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ … je chybný, i když dá správný výsledek, neboť integrand $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ není v $[0, 1]$ ohraničenou funkcí, tudíž ani integrovatelnou. Při tomto výpočtu je třeba použít tzv. nevlastní integrál, který později probereme, a jenž definici R-integrálu výrazně zobecní.

47 ✦ *CVIČENÍ* Q ✦

387 Načrtněte si pravoúhlý trojúhelník určený body $(-2a, 0)$, $(0, 0)$, $(0, -a)$, kde $a > 0$, a jeho obsah P najděte určitým (Riemannovým) integrálem. $\{\!\{\ P = -\int_{-2a}^{0} (-\frac{x}{2} - a)\ \mathrm{d}x = \ldots = a^2\ \}\!\}$

■ Rozhodněte, zda existují následující Riemannovy integrály

388 $\int_{-5}^{1} \frac{x}{x^2 + 3x - 10}\,\mathrm{d}x$ $\{\!\{\text{ne}\}\!\}$

389 $\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ $\{\!\{\text{ne}\}\!\}$

390 $\int_{-3}^{3} \frac{x+2}{|x+2|}\,\mathrm{d}x$ $\{\!\{\text{ano}\}\!\}$

391 $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. $\{\!\{\text{ano}\}\!\}$

■ Na kterých intervalech jsou následující funkce integrovatelné

392 $f(x) = \frac{x+3}{x^3 - 4x}$ $\{\!\{$na každém $[a, b]$, jenž neobsahuje žádný z bodů 0, -2, 2 $\}\!\}$

393 $f(x) = \frac{\tan x}{2 + \ln x}$. $\{\!\{$na $[a, b]$, $a > 0$, které neobsahují žádný z bodů $x = 0{,}01$, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ $\}\!\}$

394 Využijte nerovnost $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$ platnou pro funkci f, která je na intervalu $[a, b]$ spojitá (tj. i ohraničená), $m \le f(x) \le M$, je-li možné, též pro dolní a horní odhad integrálu $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$.

Pak I vypočítejte. $\{\!\{\ 0{,}447 \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}} \le \frac{1}{2};\ \ I = \ln\frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq 0{,}481\ \}\!\}$

■ Vypočítejte následující integrály

395 $\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ $\{\!\{\ \frac{\mathrm{e}^a - 1}{a}\ \}\!\}$

396 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$ $\{\!\{\ \frac{\pi}{4}\ \}\!\}$

397 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\{\!\{\ \frac{\pi}{6}\ \}\!\}$

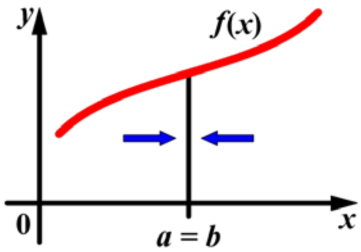
398 $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$ $\{\!\{\ \frac{\pi}{4}\ \}\!\}$

399 Vypočítejte „formálně“ Newton-Leibnizovým vzorcem $\int_{-3}^{3} \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$, a pak zdůvodněte, proč je výpočet nesprávný. Jde o tzv. *nevlastní integrál*, s nímž se seznámíme později. $\{\!\{$nesprávně „$\ln 5$“; Riemannův integrál neexistuje, neboť integrand má v bodě $x = -2$ nespojitost 2. druhu$\}\!\}$

400 S využitím Newtonova gravitačního zákona $F = \varkappa \frac{mM}{r^2}$ vypočítejte práci W vzájemně přitažlivé síly F, jejímž účinkem je hmotný bod A o hmotnosti m přitahován jiným hmotným bodem B o hmotnosti M a přemístěn po spojnici bodů do poloviny jeho počáteční vzdálenosti d od bodu B, víme-li, že velikost práce W je dána integrálem $W = \int_{r_1}^{r_2} F\,\mathrm{d}r$, kde r_1, resp. r_2 je počáteční, resp. výsledná poloha hmotného bodu A měřená pro jednoduchost od bodu B (tzv. *gravitačního centra* O). $\{\!\{\ W = -\varkappa mM/d\ \}\!\}$

48 VLASTNOSTI A VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

48.1 ZOBECNĚNÍ DEFINICE RIEMANNOVA INTEGRÁLU



a) Pro každé číslo $a \in (-\infty, +\infty)$ a libovolnou funkci f položíme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

b) Je-li f integrovatelná v $[a, b]$, definujeme při záměně mezí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x .$$

48.2 VĚTA (o metodě per partes) Nechť funkce $u, v \in C^1[a, b]$ (tj. mají spojité derivace). Potom platí

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x .$$

48.3 POZNÁMKA Jsou-li funkce $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$ na $[a,b]$ spojité jen po částech (definice 9.16) a jsou-li c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ body nespojitosti (1. druhu) funkcí $u(x)$, $v(x)$, využíváme (Viz dále) větu 48.15 o aditivitě integrálu vzhledem k intervalu, podle níž

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_n}^b ,$$

přičemž na každý integrál použijeme metodu per partes a dbáme přitom na limity primitivních funkcí. Např.

$$\int_{c_1}^{c_2} u'v\,\mathrm{d}x = [uv]_{c_1+}^{c_2-} - \int_{c_1}^{c_2} uv'\,\mathrm{d}x \quad \text{atd.}$$

48.4 PŘÍKLAD Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} x\sin x & \text{pro} \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ 4x\sin x & \text{pro} \quad \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} .$$

Pak

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} 4x\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$-[x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}-} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x - 4[x\cos x]_{\frac{\pi}{2}+}^{\pi} + 4\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 4\pi - 4 = 4\pi - 3 .$$

48.5 VĚTA (o integraci substitucí pro Riemannův integrál) Nechť funkce $\varphi \in C^1[a, b]$ a interval $[a, b]$ zobrazuje do intervalu J. Nechť funkce $f \in C(J)$.

Potom

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,\mathrm{d}s .$$

48.6 POZNÁMKA A UPOZORNĚNÍ Tento vzorec používáme dvěma způsoby:

a) Chceme vypočítat integrál vlevo (může mít ovšem i jiné označení argumentu než s, což také použijeme u následujících dvou příkladů, kdy vyjdeme při zadání integrálů z integrační proměnné x při 1. i 2. typu substituce, neboť čtenář se jistě se substituční metodou seznámil u neurčitého integrálu) a jeho výpočet převedeme na výpočet integrálu vpravo, je-li jednodušší, nebo

b) chceme vypočítat integrál vpravo a jeho výpočet převedeme na výpočet integrálu vlevo, je-li jednodušší. Avšak zde u určitého integrálu a tohoto („*druhého*“) typu substituce je oproti neurčitému integrálu (viz 37.4 a příklad 37.6) podstatný rozdíl, neboť použijeme-li nyní opět substituci $x = \varphi(t)$ v integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, při níž je zpravidla funkce φ ryze monotónní v uvažovaném intervalu $I = [a, b]$, **zde již v obecném případě funkce φ nemusí být ryze monotónní** (což je postačující podmínka k existenci inverzní funkce φ^{-1}). U určitého integrálu máme totiž často i několik možností, jak rovnice $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ pro nové integrační meze α, β (nemusí být $\alpha < \beta$) v integrační proměnné t splnit, jak dokládá příklad 48.9.

48.7 PŘÍKLAD Vypočítejme $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx =$ $\left| \begin{array}{c} \sin x = s \\ \cos x \, dx = ds \end{array} \right|$ $= \int_1^0 s^4 \, ds =$

x	$\pi/2$	π
s	1	0

|interval [1, 0] je tzv. **ZÁPORNÝ interval** integrace| $= -1/5\left[s^5\right]_0^1 = \underline{\underline{-1/5}}$. Přitom jsme položili $[a,b]=[\pi/2,0]$, $s=\varphi(x)=\sin x$, $f(s)=s^4$, $J=(-\infty,+\infty)$, tj. předpoklady věty byly splněny . Dále je $\varphi(\pi/2)=\sin(\pi/2)=1$, $\varphi(0)=\sin 0=0$, jak už naznačila tabulka.

48.8 PŘÍKLAD Vypočítejme integrál $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$.

Tento integrál si představíme na pravé straně vzorce s integrační proměnnou označenou x místo s. Na intervalu $I=[a,b]=[0,5]$ je integrand $\sqrt{25-x^2}$ spojitou funkcí, tedy integrál existuje. Pro substituci vezmeme funkci φ: $x=5\sin t$. Odtud pro argument t vypočítáme nové integrační meze α, β tak, aby $0=\varphi(\alpha)=5\sin\alpha$, $5=\varphi(\beta)=5\sin\beta$. Z možných řešení zvolíme $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$. Funkce $\varphi(t)=5\sin t$ ($\varphi\in C^\infty[0,\pi/2]$) zobrazuje interval $[0,\pi/2]$ <u>na</u> interval $[0,5]$ a je rostoucí funkcí na $[0,\pi/2]$. **Všimněme si**, že ve vzorci věty 48.5 dosazujeme do integrálu za dx diferenciál $\varphi'(t)\,dt$, podobně jak tomu bylo u neurčitého integrálu. Tedy $dx=5\cos t\, dt$. Předpoklady věty [včetně těch, které obsahuje za ní následující upozornění – část b)] jsou pro tento postup splněny, takže zmíněný vzorec (použitý zprava doleva) dává

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{25-25\sin^2 t}\; 5\cos t\; dt = 25\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$(25/2)\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\,dx = (25/2)\left[x+(1/2)\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = (25/2)\cdot(\pi/2) = 25\pi/4\,.$$

<u>**Geometrickou interpretací**</u> výsledku příkladu je vypočítaný obsah $25\pi/4$ (j^2) čtvrtkruhu M: $x^2+y^2 \le 5^2$ z 1. kvadrantu (se středem v počátku O a poloměrem 5).

48.9 PŘÍKLAD [48.6] Na základě substituce $x=t^2$ (uváděné jen pro názornost) můžeme integrovat

$$\int_1^4 x\, dx = 2\int_1^2 t^3\, dt = 2\int_{-1}^2 t^3\, dt = 2\int_1^{-2} t^3\, dt = 2\int_{-1}^{-2} t^3\, dt\,,$$

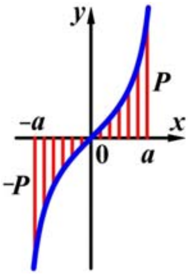
jak lze ověřit výpočtem. Za nové integrační meze lze volit oba kořeny rovnice $t^2=1$, resp. $t^2=4$.

48.10 VĚTA (o invariantnosti integrálu periodické integrovatelné funkce vzhledem k posunutí integračního intervalu s délkou (základní) periody) Nechť f je funkce periodická s (kladnou) periodou T a integrovatelná na intervalu $[0,T]$. Potom f je integrovatelná na $[a,a+T]$ pro libovolné $a\in(-\infty,+\infty)$ a platí

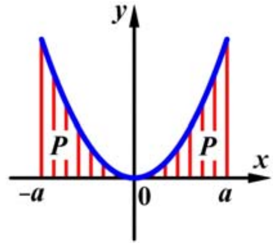
$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx\,.$$

48.11 POZNÁMKA Uvedené obrázky navozují situaci k následující větě.

Graf liché funkce



Graf sudé funkce



48.12 VĚTA (o integraci liché či sudé funkce na symetrickém intervalu) Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[0, a]$ a je <u>lichá</u>, resp. <u>sudá</u> v intervalu $[-a, a]$ (symetrickém podle počátku). Potom je f integrovatelná na intervalu $[-a, a]$ a platí

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \text{ resp. } \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

48.13 PŘÍKLAD Je $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{99} x\,\mathrm{d}x \overset{\text{lichý integrand}}{=} \underline{\underline{0}}$ (bez výpočtu).

48.14 VĚTA (o vlastnostech Riemannova integrálu vzhledem k integrandu) Nechť f, g jsou integrovatelné funkce na $[a, b]$. Potom platí

a) **LINEARITA R-integrálu:** pro libovolná c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$ je funkce $c_1 f + c_2 g$ integrovatelná na $[a, b]$ a platí $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,\mathrm{d}x = c_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + c_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

b) **monotónie integrálů:** když $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

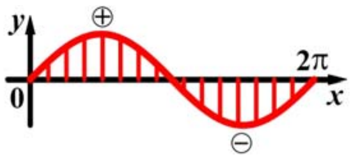
c) **(speciálně) monotónnost integrálu vzhledem k nule:** je-li $f(x) \geq 0$ pro všechna x na $[a, b]$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$;

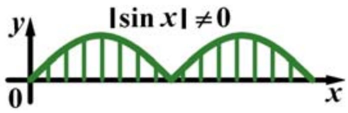
d) **integrovatelnost součinu funkcí:** funkce $f{\cdot}g$ je integrovatelná na $[a, b]$;

e) **integrovatelnost absolutní hodnoty funkce:** funkce $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$, a navíc platí následující nerovnost

f) **absolutní hodnota integrálu funkce je nejvýše rovna integrálu absolutní hodnoty funkce:**

$$\Bigl|\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{něco se může odečíst}}\Bigr| \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}_{\text{zde už NE podle 2. obr.}}\,.$$

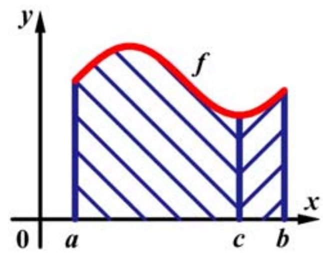




48.15 VĚTA [48.3]

a) **(o aditivitě R-integrálu vzhledem k intervalu)** (tzv. **aditivnost**)
Nechť $a < c < b$. Je-li funkce f integrovatelná na intervalu $[a, c]$ a na intervalu $[c, b]$, pak je integrovatelná na $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$



(Věta se často využívá zvl. u tzv. „nevlastního" integrálu)

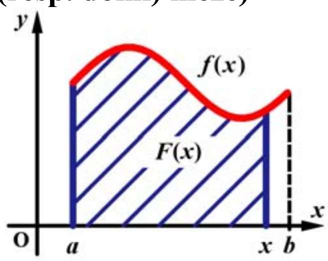
b) (o integrovatelnosti na podintervalu) Nechť f je integrovatelná funkce na $[a, b]$, a nechť je $[c, d] \subset [a, b]$. Potom f je integrovatelná na $[c, d]$.

48.16 VĚTA (1. věta o vlastnostech integrálu jako funkce $F(x)$ horní (resp. dolní) meze)
Nechť funkce f je integrovatelná na $[a, b]$. Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in [a, b]$. Potom platí:

a) funkce F je <u>spojitá</u> na $[a, b]$,

b) je-li integrand f (dokonce) spojitá funkce v bodě $x_0 \in (a, b)$, pak v x_0 existuje derivace funkce F a platí: $F'(x_0) = f(x_0)$.

[<u>**GEOMETRICKY**</u>: V bodě $(x_0, F(x_0))$ a jeho okolí <u>existuje tečna</u> ke grafu funkce F se směrnicí $F'(x_0)$].



48.17 VĚTA (2. věta o vlastnosti integrálu jako funkce $F(x)$ horní meze) Nechť f je spojitá funkce v otevřeném intervalu J (může být i neohraničený) a bod $a \in J$. Potom funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro $x \in J$ je primitivní funkcí k funkci f na intervalu J, tj. platí

$$F'(x) = f(x) \text{ na } J.$$

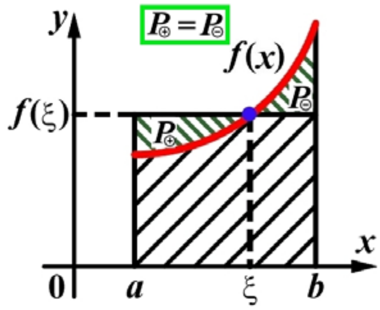
48.18 PŘÍKLAD Funkce $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ v $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dodefinovaná takto: $f(0) = 1$ (neboť $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), je <u>spojitá</u> v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$. Takto v **R** definovaná funkce F a nazývaná integrálsinus ovšem <u>není elementární</u>, je to tzv. **vyšší transcendentní funkce**, kterou lze vyjádřit nekonečným polynomickým rozvojem (tj. mocninnou řadou), přičemž k její tabelaci je nutné využít některou z numerických metod pro výpočet R-integrálu (např. **lichoběžníkové** pravidlo nebo **Simpsonovo** pravidlo).

x_1	x_2	…
$F(x_1)$	$F(x_2)$	…

48.19 VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ INTEGRÁLNÍHO POČTU Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ neboli $f \in C[a, b]$. Potom existuje (aspoň jeden) bod ξ na $[a, b]$ takový, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a) \quad \text{neboli} \quad f(\xi) \equiv \langle f \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Číslo $f(\xi)$, popř. označené $\langle f \rangle$, se nazývá **střední hodnota funkce** f **v intervalu** $[a, b]$.



48.20 POZNÁMKA Je-li $f(x) > 0$ na $[a, b]$, vyjadřuje 1. vzorec <u>**GEOMETRICKY rovnost obsahů**</u>, a to (vlevo) obsahu na obrázku znázorněného *křivočarého lichoběžníka* ohraničeného grafem funkce s (vpravo) obsahem obdélníka o téže základně a výšce $f(\xi)$, která je střední hodnotou výšky.
V nadsázce řečeno, **věta nám** (dodatečně) **ospravedlňuje myšlenku vytvoření Riemannových integrálních součtů** $s(f, D, V)$.

48.21 NUMERICKÝ VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU [418 57.3] je nezbytný v případech, kdy integrovaná funkce $f(x)$ je daná grafem či tabulkou, popř. i v případech kdy je pracné nalezení její primitivní funkce apod. Provádí se tzv. *kvadraturním vzorcem*, což je aproximace (nahrazení) určitého integrálu $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ hodnotou $K(f)$ danou vzorcem $K(f) = \sum_{k=0}^{n} H_k \cdot f(x_k)$, v němž čísla $x_k \in [a, b]$ jsou *<u>uzly</u>* kvadraturního vzorce a čísla H_k jeho *koeficienty* či *váhy*. Chyba $E(f)$ kvadraturního vzorce je pak $E(f) = I(f) - K(f)$. *Řádem* r kvadraturního vzorce rozumíme takové celé číslo, pro něž je chyba vzorce $E(x^j) = 0$, je-li $j = 0, 1, \ldots, r$, avšak $E(x^{r+1}) \neq 0$, tj. kvadraturní vzorec řádu r integruje přesně všechny polynomy až do stupně r včetně. Uvedeme dva typy ze známé skupiny tzv. *Newton-Cotesových kvadraturních vzorců* [8)], tj. vzorců, jež mj. mají *ekvidistantní* uzly, tedy dané předpisem $x_k = a + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, n$, kde $h = (b-a)/n$ je jejich vzdálenost.

1a) Základní lichoběžníkové pravidlo se odvozuje za předpokladu, že v sousedních uzlech x_k, x_{k+1} [přesněji řečeno: v jim odpovídajících bodech $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$] nahradíme funkci f lineárním (interpolačním) polynomem $p_1(x)$, tj. tím, který v nich má tytéž hodnoty. Pro chybu ε aproximace integrálu se vyžaduje, aby $f \in C^2[a, b]$. Pak platí

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\,[\,f(x_k) + f(x_{k+1})\,] + \varepsilon\,, \tag{48.1}$$

kde z teorie plyne $\varepsilon = -\frac{h^3}{12} f''(\xi_k)$ a $\xi \in [x_k, x_{k+1}]$ je blíže neurčený bod, tj. pro praktické výpočty bereme odhad chyby

[8)] Angličan Roger Cotes (1682 – 1716)

$$\left|\varepsilon(h)\right| \le \frac{h^3}{12} M_2^k\,, \ \text{kde}\ \ M_2^k = \max_{x \in [x_k,\, x_{k+1}]} \left| f''(x) \right| . \tag{48.2}$$

1b) Složené lichoběžníkové pravidlo (složený vzorec) pro celý interval $[a, b]$ pak získáme součtem základních vzorců ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \ = \ \frac{h}{2}\,[\, f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\,] \ + \ E(f)\,, \tag{48.3}$$

kde velikost chyby aproximace je $\left|E(f)\right| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$, a kde $M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|$. (48.4)

Obě **lichoběžníková pravidla mají řád** $r = 1$, tj. integrují přesně pouze polynomy 1. stupně (pro něž vždy $f'' = 0$), přičemž $h = (b-a)/n$ se obvykle nazývá *integračním krokem.*

2a) Základní Simpsonovo parabolické pravidlo [9] se za předpokladu, že $f \in C^4[a, b]$, odvodí tak, že na intervalu $[x_k, x_{k+2}]$ délky $2h$ nahradíme funkci f kvadratickým interpolačním polynomem $p_2(x)$, tj. polynomem 2. stupně – parabolou ve třech sousedních uzlech x_k, x_{k+1}, x_{k+2} vzdálených o h. Platí

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\,[\, f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})\,] + \varepsilon\,, \tag{48.5}$$

kde pro praktické výpočty bereme odhad velikosti $\left|\varepsilon(h)\right|$ chyby aproximace ε integrálu ve tvaru

$$\left|\varepsilon(h)\right| \le \frac{h^5}{90} M_4^k\,, \ \text{kde}\ \ M_4^k = \max_{x \in [x_k,\, x_{k+2}]} \left| f^{(4)}(x) \right| . \tag{48.6}$$

2b) Složené Simpsonovo pravidlo získáme nyní tak, že interval $[a, b]$ rozdělíme na **sudý počet** m **podintervalů** (položme $m = 2n$) ekvidistantními dělicími body (uzly) (kdy každý podinterval obsahuje třetí dělicí bod ve svém středu) a na každý interval $[x_{2i}, x_{2i+1}]$, $i = 0, \ldots, \frac{m}{2} - 1$ délky $2h$ se použije Simpsonův vzorec. Výsledkem je pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\,[\, f(x_0) + f(x_{2n}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i})\,] + E(f)\,, \tag{48.7}$$

kde $h = \frac{b-a}{m} = \frac{b-a}{2n}$, $\left|E(f)\right| \le \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$, a kde $M_4 = \max_{x \in [a,\, b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$. (48.8)

Integrační krok je $2h$. Obě **Simpsonova pravidla mají řád** $r = 3$, tj. integrují přesně paraboly 2. ale i 3. stupně (pro něž vždy $f^{(4)} = 0$).

V současné době se z *Newton-Cotesových kvadraturních vzorců* využívá především tzv. ***Rombergova integrace*** založená na lichoběžníkovém pravidle, která je základem adaptivních programů pro integraci, tj. programů, které hustotu uzlů v jednotlivých částech intervalu automaticky přizpůsobují charakteru dané funkce podle stanovené chyby, kterou počítají *Rungeho metodou* polovičního kroku. Uvedené vzorce se jeví jako nejefektivnější tam, kde počítáme jen jeden nebo několik integrálů bez nějaké vnitřní souvislosti. V opačném případě se použije některý vzorec ze skupiny tzv. *Gaussových kvadraturních vzorců.*

---

[9] Angličan Thomas Simpson (1710 – 1761)

49 ✦ *CVIČENÍ* R ✦

401 Vypočítejte $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \le 0 \\ \sin x - 1 & \text{pro } 0 < x\,. \end{cases}$ $\{\!\{\ -1 - \cos 1 \doteq -1{,}54\ \}\!\}$

402 Zjistěte, proč je chybný výpočet následujícího integrálu

$I = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos 2x)/2}\, dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0$ $\{\{\ I = 2$, neboť $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|\ \}\}$

■ Určete obsah P obrazce mezi grafem funkce f a osou x, je-li

403 $f(x) = \cos^2 x \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$ $\{\{\ \frac{1}{3}\ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$ **404** $f(x) = x e^{x-1}$, $x \in [1, 2]$ $\{\{\ \mathrm{e}\ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$

405 $f(x) = 2a^2 x/(x^4 + a^4)$, $0 \le x \le \frac{\sqrt{\pi}}{2} a$, $a > 0$ $\{\{\ a^2\ \}\}$

406 $f(x) = \ln x$, $x \in [\mathrm{e}, 2\mathrm{e}]$ $\{\{\ \mathrm{e} \ln 4\ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$ **407** $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$, $1 \le x \le 2$ $\{\{\ \ln\frac{4}{3}\ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$

408 $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, $x \in [0, 2\pi]$ $\{\{\ 4\sqrt{2}\ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$

409 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$, $a \in \mathbf{R}^+$. Co je obrazem? $\{\{\ \pi a^2/4$; čtvrtkruh $x^2 + y^2 = a^2$ v 1. kvadrantu $\}\}$

■ Určete střední hodnotu funkce f na zadaném intervalu při označení $\langle f \rangle$, resp. $\bar{f}$

410 $f(x) = x^2$ v $[a, b]$ $\{\{\ \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)\ \}\}$ **411** $f(x) = \sin ax$ v $[\,0, \frac{\pi}{a}\,]$, $a \ne 0$ $\{\{\ \frac{2}{\pi}\ \}\}$

412 jde-li o střední hodnotu $\langle TC \rangle$ funkce $TC(t) = 5(3t^2 + 1)$ celkových nákladů pro výrobu nové bezpečnostní technologie v čase t probíhajícím výrobní období $[1, 6]$ a zjistěte, v jakém čase (či časech) t_ξ uvedeného období funkce $TC(t)$ střední hodnotu nabývá $\{\{\ \langle TC \rangle = TC(t_{\xi_{1,2}}) = 220$, $t_{\xi_{1,2}} = \pm\sqrt{43/3}$, vyhovuje $\sqrt{43/3} \doteq 3{,}8\ \}\}$

413 jde-li o RLC - obvod, v němž vlivem harmonického napětí u vzniká harmonický sinusový proud $i = I_m \sin \omega t$, kde I_m je amplituda střídavého proudu. Určete střední hodnotu $\langle I_{av} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\, dt$ (kde perioda $T = 2\pi/\omega$) tohoto periodicky proměnného proudu, která je ekvivalencí hodnoty stejnosměrného proudu, jimž se přenese týž elektrický náboj. $\{\{\ \langle I_{av} \rangle = \frac{2}{\pi} I_m\ \}\}$

414 Stanovte velikost F tlakové síly, kterou působí kapalina o měrné tíze γ na polokruh o poloměru R, jenž je do ní ponořen tak, že jeho průměr se dotýká vodní hladiny. Situaci načrtněte a zkuste si před výpočtem odvodit, proč je element (diferenciál) dF proměnlivé síly F působící na element dP plochy polokruhu, ponořené do hloubky h, dán vztahem $dF = p\, dP = 2\gamma h \sqrt{R^2 - h^2}\, dh$. $\{\{\ F = \frac{2}{3}\gamma R^3\ \}\}$

415 Vypočítejte práci W potřebnou pro vyčerpání kapaliny o měrné tíze γ z válcové nádoby o obsahu podstavy P a výšce v (do výše jeho horní podstavy). Zkuste si před výpočtem odvodit, proč je element (diferenciál) dW práce W nutné pro vyčerpání vertikální vrstvy kapaliny o výšce y ode dna, která má elementární tloušťku dy, roven $dW = \gamma(v - y)P\, dy$. $\{\{\ W = (\pi/2)\gamma(Rv)^2\ \}\}$

416 Zjistěte elektrostatický potenciál φ v bodě A, jenž je ve vzdálenosti d od nabitého disku o poloměru R a leží na ose symetrie disku, má-li plošná hustota σ náboje na disku konstantní hodnotu a víme, že platí $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\text{náboj}}{\text{vzdálenost}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{\sigma \cdot 2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2 + d^2}}$, kde ε_0 je permitivita vakua. Situaci načrtněte a správnost integrálu (integrandu) si před výpočtem zdůvodněte. Potom výpočtem ověřte, zda je $\lim_{d \to +\infty} \varphi$ ve shodě s fyzikální praxí [Potenciál φ v bodě A je práce elektrostatického pole při vzdálení jednotkového náboje (o 1 coulombu) z bodu A do nekonečna]. $\{\{\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + d^2} - d)$, $\varphi(+\infty) = 0\ \}\}$

417 Vypočítejte práci $W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV$ nutnou k adiabatické kompresi jednoho molu ideálního plynu z objemu V_0 (o teplotě T_0) na objem V_1 (o teplotě T_1), využijete-li Poissonova zákona $pV^{\varkappa} = C$ a stavové rovnice, kde $\varkappa$, C jsou konstanty. $\left\{\left\{ \frac{R}{\varkappa-1}(T_0-T_1) \right\}\right\}$

418 Zjistěte Joulovo teplo $Q = R\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t$ střídavého sinového proudu $i = I_{ef}\sin(\omega t)$, kde I_{ef} je efektivní proud. $\{\{???\}\}$

■ Vypočítejte s využitím článku 48.21 níže uvedené integrály numericky pomocí upraveného základního Simpsonova kvadraturního vzorce $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\,[\,f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\,] \equiv K(f)\,.$ [445] (49.1)

Odhadněte velikost chyby aproximace $|E(f)|$ integrálu podle vzorce (48.8) a výsledky porovnejte s přesnými hodnotami integrálu, je-li

419 $\int_1^4 x^3\,\mathrm{d}x$ $\{\{\ \varepsilon(h)=0\,;\ \text{PROČ ?}\}\}$

420 $\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x\,.$ $\{\{$numericky je $K(f)=\frac{20}{3}$; přesně je $I(f)=\frac{32}{5}$; $|\varepsilon(h)|\le\frac{4}{15}$; zajímavé je, že rovněž $|I(f)-K(f)|=\frac{4}{15}$, tj. odhad chyby = velikost skutečné chyby, ta bývá většinou i výrazně menší$\}\}$

50 GEOMETRICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

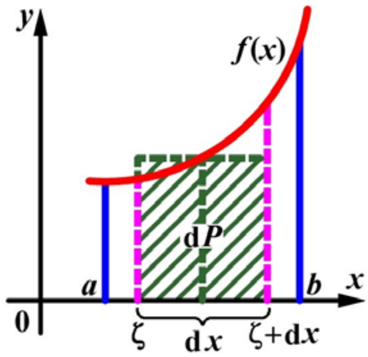
ukážeme několika vzorci a předpokládáme, že použité funkce (vč. potřebných derivací) jsou spojité.

50.1 OBSAH *P* OBRAZCE představovaného zadaným křivočarým lichoběžníkem, ohraničeným grafem kladné (spojité) funkce $f(x)$, osou x a vertikálními přímkami $x = a$, $x = b$, znázorněného např. předešlým obrázkem, lze získat následovně. S využitím dále uvedeného obrázku zavedeme jako mnemotechnickou pomůcku menší *dílčí křivočarý lichoběžník*, jenž bude ohraničen týmž grafem i osou x, avšak vertikálami (ζ je písmeno dzéta) $x = \zeta$, $x = \zeta + \mathrm{d}x$, kde $\zeta \in (a, b)$. Pro jeho obsah zavedeme název **element d*P* (obsahu) rovinné plochy** zmíněného *dílčího křivočarého lichoběžníka* o obsahu $\mathrm{d}P$, jímž můžeme podle věty o střední hodnotě integrálního počtu rozumět stejný obsah $\mathrm{d}P$ jistého obdélníka, jehož výškou je y a délka základny je dána diferenciálem $\mathrm{d}x$ kdekoli na $[a, b]$. Pak

a) V kartézských souřadnicích platí

$$P = \int_a^b \mathrm{d}P = \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $f \ge 0$.



V kartézské soustavě souřadnic je základ všech dalších vzorců!!

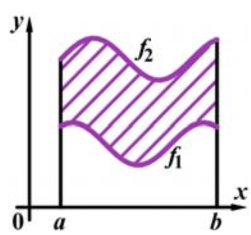
Mění-li funkce $f(x)$ znaménko, „*měli*" bychom psát

$$P = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ při } a < b\,,\ \text{resp. } P = \int_a^b |f(x)\,\mathrm{d}x| \text{ při } a \ne b\,,$$

ale absolutní hodnotu většinou nepíšeme a znaménko před integrálem určíme z dané situace.

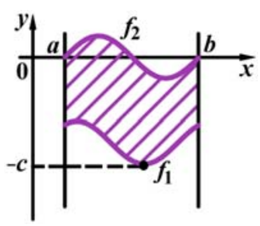
b) Obsah plochy obrazce mezi dvěma grafy funkcí *f*, *g*

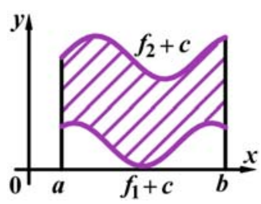
Nechť $f_2, f_1 \in C[a, b]$, $f_2 \ge f_1\ (\ge 0)$ [Předpoklad nezápornosti znázorněných funkcí není nutný]. Pak obsah P plochy mezi grafy je (viz obrázky pod sebou) dán integrálními vzorci



$$\underline{\underline{P}} = \int_a^b f(x_2)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x_1)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,\mathrm{d}x}}\,.$$

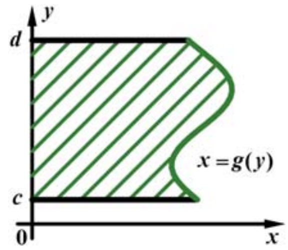
Ujasněte si z předešlého obrázku, že obecně nemusí být $f_1 \ge 0$, $f_2 \ge 0$, a přesto bude $P \ge 0$, je-li stále $f_2 \ge f_1$.





c) ad a) **Pro** někdy výhodnější **inverzní závislost** $\boldsymbol{x = g(y)}$ bude

$$\boldsymbol{P = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}\,y}\,.$$



d) Pro parametrické rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde uvažujeme parametr $t \in [\alpha, \beta]$, je

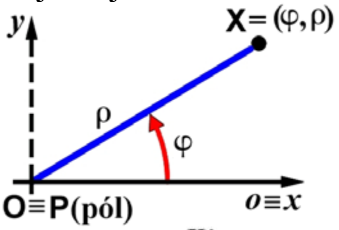
$$\boldsymbol{P = \int_\alpha^\beta \left|\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|}.$$

e) Pro polární souřadnice – Viz následující obrázek. Je-li polární rovnicí $\rho = f(\varphi)$, jednodušeji rovnicí $\rho = \rho(\varphi)$, kde $\rho(\varphi)$ je spojitá funkce, určena křivka K, pak lze odvodit vzorec pro obsah P rovinného obrazce ohraničeného křivkou K a polopřímkami p_1, p_2 o polárních rovnicích $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Následující rovnice

$$\left.\begin{aligned} &x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ &y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\,;\varphi\in[\alpha,\beta]\subseteq[\varphi_0,\varphi_0+2\pi] \end{aligned}\right\}$$

definují vztah mezi polárními souřadnicemi ρ, φ a kartézskými souřadnicemi x, y.

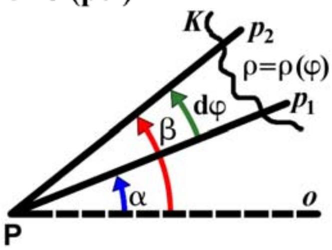
Aby přiřazení bodů (x, y) v rovině k dvojicím čísel – bodům (ρ, φ), určené předešlými dvěma rovnicemi, bylo jednoznačné (s výjimkou pólu P, který vyhovuje nekonečně mnoha bodům roviny, pro něž je $\rho = 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$), musíme volit $\rho > 0$, $\varphi_0 \le \varphi < \varphi_0 + 2\pi$, kde φ_0 je libovolné číslo. Nejčastěji volíme maximální rozsah pro φ tak, že buď $0 \le \varphi < 2\pi$ nebo $-\pi \le \varphi < \pi$.



$0 \le \rho$ … **polární vzdálenost bodu X od pólu** neboli **průvodič bodu** X

φ … **polární úhel (je orientovaný)**

o … **polární poloosa**



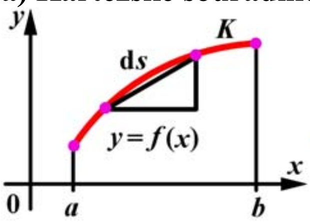
$\mathrm{d}\varphi$ … **element polárního úhlu** φ

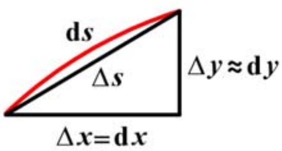
Předešlý **komplikovaný obrazec nahradíme kruhovou výsečí** téže velikosti obsahu s elementem obsahu $\mathrm{d}P = \frac{1}{2}\cdot\rho^2\cdot\mathrm{d}\varphi$, jak lze odvodit. Pak

$$\underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}P = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \boldsymbol{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}\,.$$

50.2 VÝPOČET DÉLKY L ROVINNÉ KŘIVKY K DANÉ FUNKCEMI TŘÍDY C^1

a) Kartézské souřadnice





ds – **element oblouku** křivky, též diferenciál oblouku,

Δs – délka tětivy, $\Delta s \approx \mathrm{d}s$

A = $(a, f(a))$, B = $(b, f(b))$

Je sice $\mathrm{d}s \approx \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$, ale pro $\mathrm{d}x \to 0$ je $\Delta y \to \mathrm{d}y$, $\Delta s \to \mathrm{d}s$.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{L}}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}s \approx \Delta s\right| = \int_a^b \underbrace{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}_{\Delta s} = \int_a^b \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right](\mathrm{d}x)^2} = \boldsymbol{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}\,.$$

b) Parametrické rovnice křivky K určené grafem funkce dané parametricky, o které pojednává v diferenciálním počtu věta 28.4 o derivaci funkce dané parametricky.

Pro $\Delta x \to 0$ je $\Delta y \to \mathrm{d}y$, a tedy $\Delta s \to \mathrm{d}s$. Často píšeme $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$, kde definujeme (označujeme) $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$. Je-li křivka K zadána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pak délka rovinné křivky od bodu $a = \varphi(\alpha)$ do bodu $b = \varphi(\beta)$ je dána vzorci

$$\underline{\underline{L}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t]^2 + [\dot\psi(t)\,\mathrm{d}t]^2} = \underline{\underline{\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi^2(t) + \dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t}}\,.$$

(Nepoužijeme tedy vzorec s jedničkou pod odmocninou)

c) Výpočet délky (= rektifikace) křivky v polárních souřadnicích

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi (x, y) a polárními souřadnicemi bodu (φ, ρ), kde φ je polární úhel, ρ je polární vzdálenost bodu od pólu P, je potom dán dvěma rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big| \quad & x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\Big| \quad & y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi,\ \varphi \in [\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]. \end{aligned}\right\}$$

Jde o parametrické rovnice křivky o rovnici $\rho = \rho(\varphi)$ v polárních souřadnicích.
Derivujme každou stranu rovnic podle φ.

Protože je $\dot x(\varphi) = \dot\rho(\varphi)\cdot\cos\varphi - \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$, $\dot y(\varphi) = \dot\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi + \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$, po umocnění a sečtení dostaneme $\dot x^2 + \dot y^2 = \rho^2 + \dot\rho^2$. Proto

$$\underline{\underline{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot\rho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi}}\ .$$

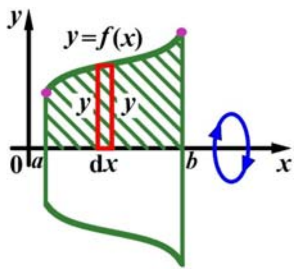
50.3 OBJEMY (KUBATURY) ROTAČNÍCH TĚLES

a) Kartézské souřadnice

α) Rotace kolem osy x:

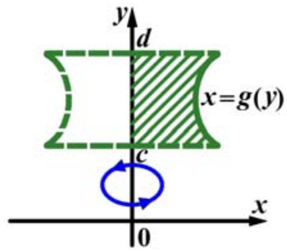
Element objemu $\mathrm{d}V$ tvoří válec, základna má poloměr y, jeho výška je diferenciál $\mathrm{d}x$, takže

$$\underline{\underline{V}} = \int_a^b \mathrm{d}V = \int_a^b \pi y^2\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}}\,.$$



β) Rotace kolem osy y:

$$\underline{\underline{V = \pi\cdot\int_c^d g^2(y)\,\mathrm{d}y}}\,.$$

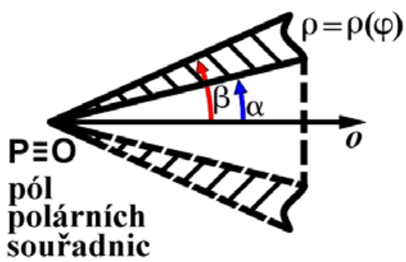


b) Parametrické rovnice

$$\underline{\underline{V = \pi\cdot\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\cdot\underbrace{\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{někdy}\\ \text{bývá}<0}}}}\,.$$

c) Polární souřadnice

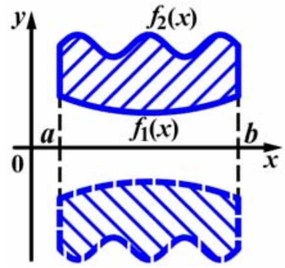
$$\underline{\underline{V = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot\int_\alpha^\beta \rho^3\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}}\,.$$



V – je v jednoduchém případě např. objem materiálu kuželovité nádoby s vnitřním vrcholovým úhlem 2α, vnějším 2β s vrcholem v pólu P.

50.4 POZNÁMKA Podobně jako byl obsah P, také objem V rotačního tělesa vzniklého rotací obrazce ležícího mezi dvěma grafy funkcí $f_2(x)$, $f_1(x)$ na intervalu $[a, b]$ a rotujícího kolem osy x je (Viz obrázek) dán vztahem

$$\underline{\underline{V = \pi \cdot \int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] \mathrm{d}x}}$$



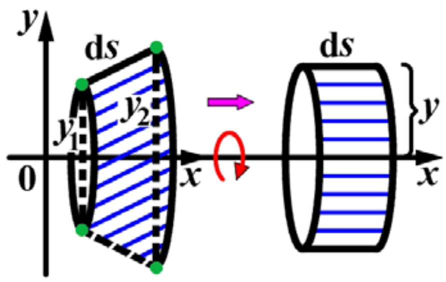
(Vzorec se též vyskytuje v příkladech).

50.5 URČENÍ OBSAHU (neboli komplanace) PLÁŠTĚ ROTAČNÍHO TĚLESA

a) Kartézské souřadnice

Nechť $\boldsymbol{f(x) \in C^1[a, b]}$, tj. je tzv. **hladká funkce na $[a, b]$** (je spojitá i se svou 1. derivací na $[a, b]$). Obsah pláště rotačního tělesa (bez obou podstav, existují-li),

α) které vznikne rotací kolem osy x rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ a osou x, se určí pomocí **elementu obsahu dS rotační plochy**. Vyjdeme-li z obsahu Q pláště komolého kužele s poloměry podstav y_1, y_2 a stranou délky $(\mathrm{d}s)$, který je $Q = \pi\cdot(\mathrm{d}s)\cdot(y_1 + y_2)$, lze odvodit, že můžeme přejít k **elementu obsahu dS pláště válce** o poloměru y a výšce ds, jenž je $\mathrm{d}S = 2\pi \cdot y \cdot \mathrm{d}s$, takže



$\underline{\underline{S}} = \int_a^b \mathrm{d}S = \int_a^b 2\pi |y|\,\mathrm{d}s = \underline{\underline{2\pi \int_a^b |y|\,\mathrm{d}s}}$. Pro $y = f(x)$ je pak $\underline{\underline{S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \underbrace{\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}s > 0 \text{ (pro } \mathrm{d}x > 0)}}}$.

β) Při rotaci grafu $x = g(y)$ kolem osy y je pak $\underline{\underline{S = 2\pi \int_c^d |g(y)| \cdot \sqrt{1 + g'^2(y)}\,\mathrm{d}y}}$.

b) Parametrické rovnice $\underline{\underline{S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \cdot \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2}\,\mathrm{d}t}}$. (Většinou se uvažuje rostoucí t)

c) Polární souřadnice $\underline{\underline{S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \cdot |\sin\varphi| \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi}}$.

51 PŘÍKLADY NA GEOMETRICKÉ APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

51.1 PŘÍKLAD Určeme obsah S pláště tělesa (zde celého jeho povrchu) vzniklého rotací **Bernoulliho lemniskáty** (řecky *lemniskos* = smyčka) o polární rovnici $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$, $a > 0$, kolem osy o.

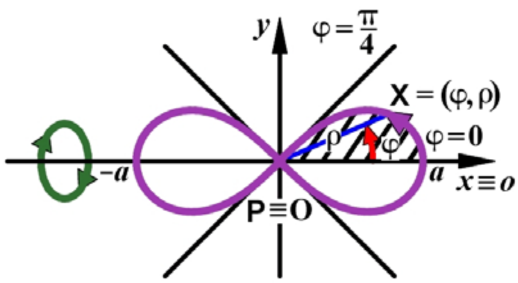
Platí $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \overbrace{\rho(\varphi) \cdot \sin\varphi}^{y} \overbrace{\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot\rho^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi}^{\mathrm{d}s}$.

V kartézských souřadnicích má lemniskáta rovnici

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, takže

$(\rho^2)^2 = a^2\rho^2 \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Odtud $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$,

takže $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Pak pro derivaci platí



$$\dot\rho = a\frac{1}{2}(\cos 2\varphi)^{-1/2}(-\sin 2\varphi) \cdot 2 = a(\cos 2\varphi)^{-1/2}(-\sin 2\varphi) .$$

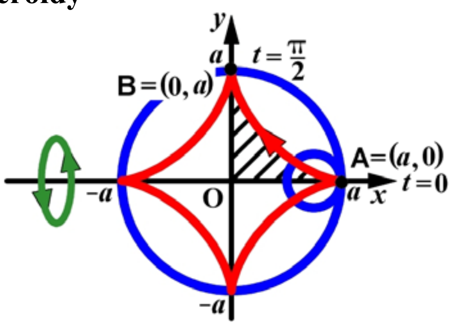
Využijeme-li symetrie tělesa a vezmeme co nejmenší rozsah mezí, výpočet se usnadní, a navíc tím zabráníme změně znamének funkcí a diferenciálů:

$$S = 2S_1 = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \sin\varphi \cdot \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$4\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\ \sin\varphi\cdot a\sqrt{\frac{\cos^2 2\varphi+\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi a^2\left[\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} =$$

$-4\pi a^2\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right] = \underline{\underline{2\left(2-\sqrt{2}\right)\pi\cdot a^2}}$, kde a^2 už vyjadřuje plošné měřicí jednotky, neboť a je délka.

51.2 PŘÍKLAD Určeme objem V tělesa vzniklého rotací **asteroidy**
$K:\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\end{cases}$, $t\in[0, 2\pi]$, $a>0$, kolem osy x.



(K má v kartézských souřadnicích rovnici $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$)

$$V = \pi\int_\beta^\alpha \overbrace{(a\sin^3 t)^2}^{y^2}\ \overbrace{3a\cos^2 t\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}x<0}.$$

Protože na 1. čtvrtině asteroidy je x-ová souřadnice bodu A větší než x-ová souřadnice bodu B, tj. je tam $\mathrm{d}x<0$, vezmeme záporné znaménko a s využitím symetrie dostaneme

$$V = 2V_1 = -2\cdot\pi\int_0^{\pi/2} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\overbrace{(-\sin t)\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}x<0} = -6\pi a^3\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\overbrace{(-\sin t)\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}(\cos t)} =$$

$\cos t = z$
$-\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}z$

t	0	$\pi/2$
z	1	0

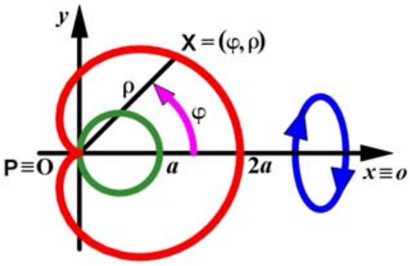
$$= -6\pi a^3\int_1^0\left(1-z^2\right)^3 z^2\,\mathrm{d}z = -6\pi a^3\int_0^1\left(z^8-3z^6+3z^4-z^2\right)\mathrm{d}z =$$

$$-6\pi a^3\left[\frac{1}{9}z^9-\frac{3}{7}z^7+\frac{3}{5}z^5-\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = -6\pi a^3\left[\frac{1}{9}-\frac{3}{7}+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right] = -6\pi a^3\,\frac{35-135+189-105}{9\cdot 7\cdot 5} =$$

$$-6\pi a^3\,\frac{-16}{9\cdot 7\cdot 5} = \underline{\underline{\frac{32}{105}\pi a^3}}.$$

51.3 PŘÍKLAD Proveďme rektifikaci (= určení délky křivky) **kardioidy**, tj. srdcovky o polární rovnici $\rho = a(1+\cos\varphi)$, kde $\varphi\in[0, 2\pi]$, $a>0$.

Pro zajímavost si v pravoúhlých souřadnicích vynesme závislost průvodiče ρ bodu $X = (\varphi, \rho)$ na polárním (orientovaném) úhlu φ.

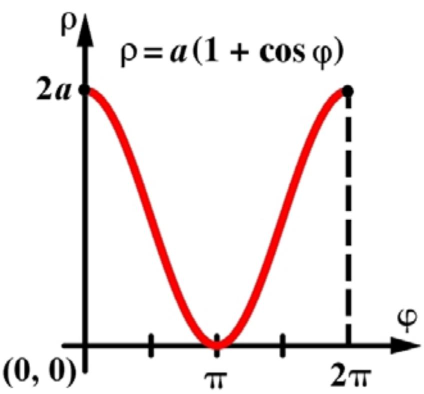


Opět využijeme symetrie podle polární osy o. Platí

$$L = \int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+\dot\rho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi,\ \text{kde}\ \dot\rho(\varphi) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = a(-\sin\varphi).$$

$$L = 2L_1 = 2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$2\int_0^\pi\sqrt{a^2\left(1+2\cos\varphi+\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1}\right)}\,\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi =$$

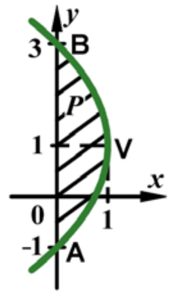


$\dfrac{1+\cos\varphi}{2} = \cos^2\dfrac{\varphi}{2}$
$1+\cos\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$

$$= 4a\int_0^\pi\underbrace{\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|}_{=\cos\frac{\varphi}{2}\ \text{pro}\ \varphi\in[0,\pi]}\mathrm{d}\varphi = 4a\cdot 2\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^\pi = \underline{\underline{8a}}.$$

Tedy délka kardioidy je stejná jako délka cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, kde a označuje jistou délku, tj. obsahuje už měřicí jednotku délky (cm, mm atd.).

51.4 PŘÍKLAD Určeme obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce o rovnici $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ a osou y.



Platí $(y^2 - 2y + 1) + 4x - 4 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x-1) \Rightarrow x - 1 = -\frac{1}{4}(y-1)^2$,
tj. jde o graf kvadratické funkce (jak říkají studenti „ležaté“) – paraboly otevřené proti orientaci osy x s vrcholem $\mathsf{V} = [1, 1]$. Určíme průsečíky grafu s osou y (tam je $x = 0$)

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} \mathsf{A} = [0, -1] \\ \mathsf{B} = [0,\ 3]. \end{matrix}$$

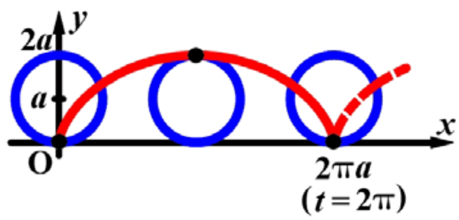
$$P = \int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{3} \left(1 - \frac{1}{4}(y-1)^2\right) \mathrm{d}y = \left[y - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(y-1)^3 \right]_{-1}^{3} = \left[3 - (-1) - \frac{1}{12}\cdot 2^3 + \frac{1}{12}\cdot(-2)^3 \right] =$$

$$4 - \frac{8}{12} - \frac{8}{12} = \underline{\underline{\frac{8}{3}\,(\mathrm{j}^2)}}.$$

51.5 PŘÍKLAD Určeme délku L **cykloidy** o parametrických rovnicích

$$\begin{matrix} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{matrix},\ t \in [0,\ 2\pi],\ \ a > 0.$$

(Trajektorie nájezdu skokana před skokem na skokanském můstku je částí 1. oblouku cykloidy)

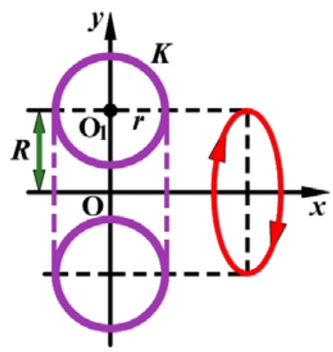


$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + [a \sin t]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} \frac{1-\cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2} \\ 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \end{matrix} \right| = 2a \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \sin \frac{t}{2} \right|}_{\sin\frac{t}{2} \ge 0 \text{ pro } t \in [0, 2\pi]} \mathrm{d}t = -2a \cdot 2 \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} =$$

$$-4a[-1-1] = \underline{\underline{8a}}.$$

51.6 PŘÍKLAD Určeme obsah S povrchu rotačního tělesa vzniklého rotací kružnice $K:\ x^2 + (y-R)^2 = r^2$, kde $0 < r < R$, kolem osy x. Povrch rotačního tělesa je tzv. **anuloid (prstenec, torus, „pneumatika“).** Užijeme parametrických rovnic kružnice, kde její střed O_1 není v počátku, ale je v bodě $O_1 = (x_0, y_0) = (0, R)$, takže



$$K: \left. \begin{matrix} x - x_0 = r \cdot \cos t \\ y - y_0 = r \cdot \sin t \end{matrix},\ t \in [0,\ 2\pi] \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = r \cdot \cos t \\ y = R + r \cdot \sin t \end{matrix},\ t \in [0,\ 2\pi].$$

Obsah anuloidu je pak

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} \overbrace{(R + r\sin t)}^{y} \cdot \overbrace{\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} =$$

$2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi r[Rt - r\cos t]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi^2 Rr}}$, což je ve shodě s tím, co říká

1. GULDINOVA VĚTA [(Švýcar G. Paul Habakkuk Guldin (1577 - 1643) ji znovu objevil, přičemž obě věty znal už Řek Pappos z Alexandrie (± 320 n. l.)], podle níž:

Obsah S rotační plochy vytvořené při rotaci rovinné křivky (zde K) kolem osy (zde osa x), která leží v téže rovině a křivku neprotíná, se rovná součinu délky této křivky (zde $l = 2\pi\, r$) a délky kružnice o poloměru y_{T} (zde $y_{\mathrm{T}} = R$), opsané při rotaci těžištěm T uvažované křivky.

Pro $\mathrm{T} \equiv \mathrm{O}_1$ ležící uvnitř K a y-ovou souřadnici těžiště y_{T} máme $S = l{\cdot}2\pi\, y_{\mathrm{T}} = \underline{\underline{2\pi\, r{\cdot}2\pi\, R}}$, což je též obsah pláště válce vzniklého napřímením anuloidu na válec o výšce $v = 2\pi\, R$ a o poloměru r.

51.7 PŘÍKLAD Určeme objem V tělesa, jehož povrch je **anuloid** (prstenec) vzniklý (jako v předešlém příkladě) rotací kruhu Ω o obvodové kružnici $K:\ x^2 + (y-R)^2 = r^2$, kde $0 < r < R$, kolem osy x. Pokud vyjde $V < 0$, určeme toho příčinu.

Na základě přípravných úvah a obrázku z minulého příkladu si všimneme, že ve vzorci

$V = \pi \int_\alpha^\beta \overbrace{\psi^2(t)}^{y}\, \overbrace{\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}x}$ je pro $t \in [0, \pi]$ stále $\mathrm{d}x = -r\sin t\,\mathrm{d}t < 0$. Musíme proto psát

$$V = \underbrace{-\pi \int_0^\pi \psi^2 \overbrace{\dot\varphi\,\mathrm{d}t}^{<0}}_{V_1} \underbrace{-\,\pi \int_\pi^{2\pi} \psi^2 \overbrace{\dot\varphi\,\mathrm{d}t}^{>0}}_{V_2} = \left| \begin{array}{l} \text{Vlastnost Riemannova} \\ \text{integrálu vzhledem k} \\ \text{intervalu} \end{array} \right| = -\pi \int_0^{2\pi} (R + r\sin t)^2 \cdot (-r\sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\pi r \int_0^{2\pi} [\, R^2 \sin t + 2Rr \underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)} + r^2 \underbrace{(1-\cos^2 t)\sin t}_{(\cos^2 t\, -\, 1)\cdot(-\sin t)}\,]\,\mathrm{d}t =$$

$$\pi r [\, R^2 \underbrace{(-\cos t)}_{0} + Rr(\, t \underbrace{-\tfrac{1}{2}\sin 2t}_{0}\,) + r^2 \underbrace{(\,\tfrac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\,)}_{0}\,]_0^{2\pi} = \pi r [Rr\cdot t]_0^{2\pi} =$$

$$\pi r R r \cdot 2\pi = \underline{\underline{2\pi^2 R r^2}}$$, což je ve shodě s tím, co říká

2. GULDINOVA VĚTA, podle níž:

Objem V rotačního tělesa vytvořeného při rotaci rovinného obrazce (zde kruhu Ω) kolem osy (zde osy x), která leží v rovině obrazce a nejde jeho vnitřkem, se rovná součinu obsahu P tohoto obrazce (zde $P = \pi\, r^2$) a délky kružnice o poloměru Y_{T} opsané při rotaci těžištěm T uvažovaného obrazce Ω.

Pro $\mathrm{T} \equiv \mathrm{O}_1$ a y-ovou souřadnici těžiště $Y_{\mathrm{T}} = R$ máme $V = P\cdot 2\pi Y_{\mathrm{T}} = \pi r^2\, 2\pi R = \underline{\underline{2\pi^2 R r^2}}$, což je objem válce vzniklého napřímením anuloidu na válec o výšce $v = 2\pi R$ a o poloměru r.

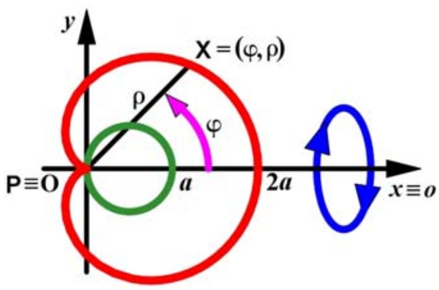
51.8 PŘÍKLAD Určeme objem V tělesa vzniklého rotací **kardioidy** o polární rovnici $\rho = a(1+\cos\varphi) \ge 0$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$, kolem své osy.

Rotující (tvořící) křivka je 1. polovinou srdcovky, tj. $\varphi \in [0,\, \pi]$.

Platí

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi a^3 (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 + \cos\varphi = z \\ -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}z \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varphi & 0 & \pi \\ \hline z & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_2^0 z^3(-\mathrm{d}z) = \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \frac{1}{4}\left[z^4\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi a^3}}\,.$$



52 ✦ CVIČENÍ S ✦

52.1 VÝPOČET INTEGRÁLŮ představujících v této kapitole určení důležitých charakteristik (obsahů, délek a objemů) nekomplikovaných geometrických útvarů (výpočet jejich „míry“) provádějte, je-li možné, s co největším využitím symetrie těchto útvarů, vlastností integrálu i náčrtu situace.

■ Pomocí integrálu zjistěte obsah P obrazce M ohraničeného křivkami (většinou grafy funkcí), které jsou určeny danými rovnicemi, popř. je poloha obrazce upřesněna dalšími vztahy

421 $y = ae^{x/a}$, $y = ae^{-x/a}$, $x = a$, $a > 0$ {{ $\frac{1}{e}(e-1)^2 a^2$ }} **422** $y^2 = 2x$, $x = \sqrt[3]{18}$ {{ 8 (j^2) }}

423 $y^2 = 4ax$, $x^2 + y^2 = 5a^2$, $x \ge 0$, $a > 0$ {{ $[5\pi/2 + 2/3 - 5\arcsin(1/\sqrt{5})]\,a^2$ }}

424 $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$ {{ $15/2 - 8\ln 2$ (j^2) }} **425** $y = -x^2 + 2x$, $y = -x$ {{ 27/6 (j^2) }}

426 $y^2 = -2x + 1$, $y = -x - 1$ {{ 16/3 (j^2) }} **427** $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ {{???}}

428 M je **asteroida** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ {{ $(3/8)\pi a^2$ }}

429 M je známá **Bernoulliova lemniskáta** (smyčka připomínající ∞) o rovnici (v polárních souřadnicích) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ ($a > 0$), $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ {{ a^2 }}

430 M je výseč ohraničená **logaritmickou spirálou** o (polární) rovnici $\rho = ae^{b\varphi}$ ($a > 0$, $b \ne 0$) a polopřímkami $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, kde $\alpha \in (0, 2\pi)$. Situaci načrtněte {{ $\frac{1}{4b}(e^{2b\alpha} - 1)a^2$ }}

431 $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$ {{ 1 (j^2) }} **432** $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$ {{???}}

433 $y = 1/(x^2 + x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ {{ $\ln(4/3)$ (j^2) }}

434 M ohraničuje **řetězovka** $y = a\dfrac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $a > 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = 0$ {{ $(e - \frac{1}{e})\,a^2$ }}

435 M ohraničuje jeden oblouk **cykloidy** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ a osa x {{ $3\pi a^2$ }}

436 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, včetně parametrického vyjádření této křivky. 443 {{???}}

■ Nejprve vypočítejte integrálem objemy $V(T)$ rotačních těles T, které vzniknou rotací obrazců uvedených ve stejném pořadí jako v předešlých šesti cvičeních, rotují-li kolem osy x. Potom objemy dalších těles otáčejících se kolem osy x (není-li uvedeno jinak)

437 {{ $\pi(e-2)$ (j^3) }} **438** {{ $(\pi^2 - 8)\pi/4$ (j^3) }} **439** {{ $\pi[2/3 + \ln(9/16)]$ (j^3) }}

440 {{ $\pi(e^2 - e^{-2} + 4)/4a^3$, kde T je **katenoid** }} **441** {{ $5\pi^2 a^3$ }}

442 {{ $(4/3)\pi ab^2$, kde T je **rotační elipsoid** }}

443 nyní nechte křivku z příkladu 436 rotovat kolem osy y {{???}}

444 obrazec M rotuje kolem osy y, přičemž M je ohraničen obloukem **hyperboly** $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, osou y a přímkou $y = -b$, $y = b$. {{ $(8/3)\pi a^2 b$ }}

445 Simpsonovým parabolickým vzorcem (49.1) ze strany 89 najděte v litrech objem **sudu**, který má výšku (délku) 50 cm, průměr každého dna (čela) je 20 cm a průměr středního řezu je 30 cm.
{{28,8 ℓ; Moravané takovému sudu řeknou **půlvědro**}}

■ Integrálem „změřte“ délku oblouku rovinné křivky

446 **řetězovky** $y = a\dfrac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} = a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $a > 0$, $x = -a$, $x = a$ {{ $2a\sinh 1 \doteq 2{,}35a$ }}

447 **asteroidy** ($x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$), $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ {{ $6a$ }}

448 prvního závitu **Archimédovy spirály** $\rho = a\varphi$, $a > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

{{ $\left(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right|\right)a/2$ }}

449 **logaritmické spirály** $\rho = ae^{b\varphi}$, $a > 0$, $b \ne 0$, $\varphi \in [0, \alpha]$ {{ $(\sqrt{b^2 + 1}/b)(e^{b\alpha} - 1)\,a$ }}

450 $y = \ln(1 - x^2)$, $x = -1/2$, $x = 1/2$ {{ $2\ln 3 - 1$ }} **451** $y = \ln\sin x$, $x = \pi/3$, $x = 2\pi/3$. {{ $\ln 3$ }}

■ Integrálem najděte obsah S pláště rotačního tělesa T, rotuje-li kolem osy x (není-li rotace určena jinak) zadaný oblouk křivky

452 **sinusoidového vřetena** $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ {{ $\pi[2\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3)]$ (j^2) }}

453 **pásu sféry** (kulové plochy) o poloměru R a výšce pásu v {{ $2\pi Rv$ }}

454 $3y - x^3 = 0\,,\quad x \in [\,0, 1\,]$ $\{\{\ (2/9)\,\pi\sqrt{2}\ \ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$

455 **řetězovky** $y = a\,\dfrac{\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a}}{2} = a\cosh\!\left(\dfrac{x}{a}\right),\quad x = -a\,,\quad x = a\quad (\,a > 0\,)$ $\{\{\ \pi(\sinh 2\ +\ 2)\,a^2\ \}\}$

456 jeden oblouk **cykloidy** $x = a\,(t - \sin t\,)\,,\quad y = a\,(1 - \cos t\,)\quad (\,a > 0\,)$ $\{\{\ (64/3)\,\pi\,a^2\ \}\}$

457 **kardioidy** $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)\,,\quad \varphi \in [\,0, \pi\,]$ $\{\{\ (32/5)\,\pi\,a^2\ \}\}$

458 $x^2 - 2y = 0$ vyťatý přímkou $3x - 2y = 0$ rotující kolem osy y . $\{\{\ 14\pi/3\ \ (\mathrm{j}^2)\ \}\}$

53 NEVLASTNÍ INTEGRÁL

Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme definovali mimo jiné za předpokladu, že

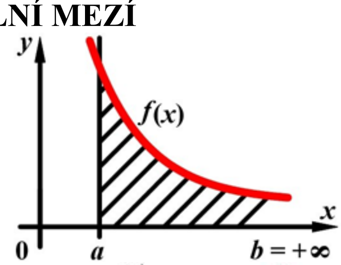
1) krajní body $[a, b]$ jsou vlastní (mají konečné souřadnice),
2) funkce je ohraničená na $[a, b]$.

V případě, že některý z těchto předpokladů není splněn, mluvíme o tzv. nevlastním integrálu. Nevlastní integrály s nevlastní horní nebo dolní mezí či nevlastní integrály funkcí neohraničených v okolí krajních, resp. vnitřních bodů intervalu, počítáme pomocí limit.

A) NEVLASTNÍ INTEGRÁLY S NEVLASTNÍ HORNÍ NEBO DOLNÍ MEZÍ

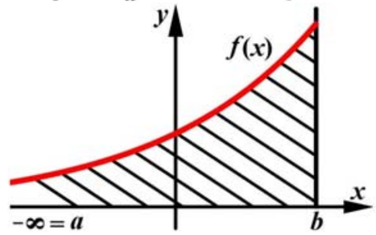
a) Horní mez *b* je $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\big[F(x)\big]_a^t =$$
$$\lim_{t\to+\infty}\big[F(t) - F(a)\big] = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(a).$$



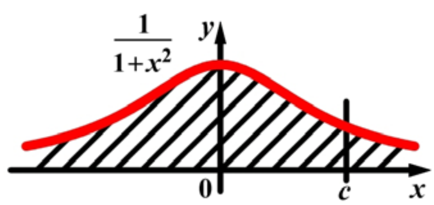
b) Dolní mez *a* je $-\infty$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\big[F(x)\big]_t^b =$$
$$\lim_{t\to-\infty}\big[F(b) - F(t)\big] = F(b) - \lim_{t\to-\infty} F(t).$$



c) Obě meze jsou nevlastní

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$



$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\lim_{t\to-\infty}\big[F(c) - F(t)\big] + \lim_{t\to+\infty}\big[F(t) - F(c)\big] =$$

protože platí
$\lim\limits_{t\to-\infty} F(c) = \lim\limits_{t\to+\infty} F(c) = F(c)$

$$= \lim_{t\to+\infty} F(t) - \lim_{t\to-\infty} F(t).$$

V případě, že existují vlastní limity (konečné), říkáme, že uvažované nevlastní integrály konvergují či existují (mají smysl), a integrál je tedy roven vlastní limitě. V opačném případě říkáme, že nevlastní integrály divergují – nekonvergují – neexistují (nemají smysl).

53.1 PŘÍKLAD Vypočítejme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$

$$\lim_{t\to-\infty}\big[\arctan x\big]_t^c + \lim_{t\to+\infty}\big[\arctan x\big]_c^t = \lim_{t\to-\infty}\big[\arctan c - \arctan t\big] + \lim_{t\to+\infty}\big[\arctan t - \arctan c\big] =$$

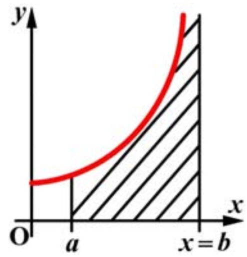
$$\arctan c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan c = \underline{\underline{\pi}}\,; \quad P = \pi \ (\mathrm{j}^2), \text{ tedy nevlastní integrál } \underline{\text{konverguje}}.$$

Obsah P plochy **neohraničeného** rovinného útvaru z předešlého obrázku je tedy konečný.

B) NEVLASTNÍ INTEGRÁLY FUNKCÍ NEOHRANIČENÝCH V OKOLÍ NĚKTERÝCH BODŮ

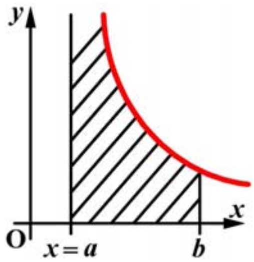
a) $f(x)$ je neohraničená na levém okolí horní meze b,
pak $x = b$ je asymptota bez směrnice a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$



b) $f(x)$ je neohraničená na pravém okolí dolní meze a,
pak $x = a$ je asymptota bez směrnice a

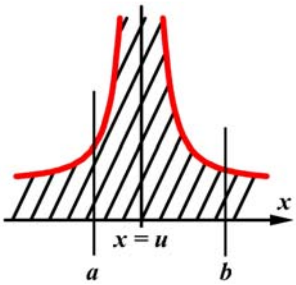
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$



c) $f(x)$ je neohraničená na okolí jediného (vlastního) vnitřního bodu $u \in [a, b]$,
pak $x = u$ je asymptota bez směrnice a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{t\to u-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to u+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = \dots\,.$$



53.2 POZNÁMKA V případě dalších bodů nespojitosti musíme integrál napsat jako součet odpovídajících integrálů. Konvergentní a divergentní integrál se definuje stejně jako v předcházejících definicích. Nekonečné meze a (vlastní) body, v nichž $f(x)$ je neohraničená, jsou tzv. **singulární body** nevlastního integrálu.

53.3 PŘÍKLAD Z příkladu 3 v článku 46.5 str. 81 víme, že Riemannův integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ neexistuje, neboť integrand je funkce neohraničená na redukovaném levém okolí bodu 1. Avšak nevlastní integrál konverguje (existuje), neboť

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-} \left[\arcsin x\right]_0^t = \lim_{t\to 1-} \arcsin t - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}},\ \underline{\underline{P = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{j}^2\right)}}.$$

Nevlastní integrál konverguje, takže odpovídající neohraničený útvar (připomínající křivočarý lichoběžník) má konečný obsah $\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{j}^2\right)$.

53.4 PŘÍKLAD Vypočítejme

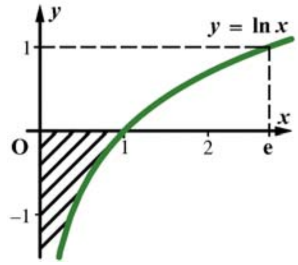
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \lim_{t\to 1-} \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\lim_{t\to 1-} \left[\ln|1-x|\right]_0^t = -\lim_{t\to 1-} \left[\ln|1-t| - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = -\lim_{t\to 1-} \ln|1-t| = \underline{\underline{+\infty}}\,.$$

Nevlastní integrál diverguje (nekonverguje, neexistuje), útvar (načrtněte si) nemá konečný obsah!

53.5 PŘÍKLAD Pomocí nevlastního integrálu (při jehož výpočtu se použije Bernoulli-l´Hospitalovo pravidlo) určeme obsah P plochy ohraničené osou x, osou y a grafem funkce $y = \ln x$, kde $y < 0$. Načrtněte situaci.

$$P=-\int_0^1 \ln x\,dx \overset{\text{PŘESNĚJI !!}}{=} -\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \ln x\,dx = -\lim_{t\to 0+}\int_t^1 \overset{u'\cdot v}{1\cdot \ln x}\,dx \underset{u=x,\ v'=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0+}\left[x\ln x - x\right]_1^t =$$

$$1+\lim_{t\to 0+} t\ln t \overset{(0\cdot(-\infty))}{=} 1+\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{B - l'H}}{=} 1+\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1-0 = \underline{\underline{1}}\,(\text{j}^2)\,.$$



54 ✦ *CVIČENÍ* T ✦

■ Zjistěte, zda následující nevlastní integrály divergují nebo konvergují

459 $I=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ $\{\!\{\, I=1,$ tj. konverguje $\}\!\}$

460 $I=\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ $\{\!\{\, \lim_{t\to +\infty} \sin t$ neexistuje, tj. I diverguje $\}\!\}$

461 $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ $\{\!\{\, \lim_{t\to 0-} (-2\sqrt{-t}+2)=2,$ tj. konverguje $\}\!\}$

462 $I=\int_0^{\pi/2} \cot x\,dx$ $\{\!\{\, I=-\infty,$ tj. diverguje $\}\!\}$

463 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x+1}\,dx$ $\{\!\{$ diverguje $\}\!\}$

464 $I=\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$. $\{\!\{\, I=\frac{1}{r-1}$ pro $r>1$; diverguje pro $r\le 1 \}\!\}$

465 Podle kinetické teorie plynů je střední rychlost molekul $\bar{v}$ dána nevlastním integrálem

$$\bar{v}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}\, v^3\,dv\,,$$

kde v je rychlost molekuly a m její hmotnost, k je Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota.

Vypočítejte $\bar{v}$. $\{\!\{\, \bar{v}=\sqrt{\frac{8k}{\pi}\cdot\frac{T}{m}} \}\!\}$

466 Najděte obsah neohraničeného rovinného oboru ohraničeného grafem funkce $f(x)=x e^{-x^2/2}$ a její asymptotou $(x\ge 0)$ $\{\!\{\, 2\ (\text{j}^2)\ \}\!\}$

467 Vypočítejte objem trojrozměrného oboru, který vznikne rotací kolem osy x rovinného oboru určeného relacemi $\ln x\le y\le 0,\ 0<x\le 1$. $\{\!\{\, 2\pi\ (\text{j}^3)\ \}\!\}$

468 Zjistěte obsah neohraničené rotační plochy vytvořené otáčením křivky $y=e^{-x}$ pro $x\ge 0$ kolem osy x.

$\{\!\{\, \pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]\ \ (\text{j}^2)\ \}\!\}$

III UKÁZKY SYSTÉMU MAPLE

Počítačové prostředí Maple bylo vyvinuto na univerzitě ve Waterloo v Kanadě. Patří mezi systémy počítačové algebry (anglicky *Computer algebraic systems*), což jsou interaktivní programy, které provádí numerické, symbolické a grafické výpočty. Má možnost vstupu a výstupu textů a automatického převodu do programovacích jazyků C, Fortran 77 a do LaTeXu, což je populární nekomerční programový systém sazby publikací nejvyšší kvality, včetně matematických textů. Maple používá příkazový jazyk kombinovaný s účinným programovacím jazykem s mnoha předdefinovanými matematickými funkcemi z oblasti diferenciálního a integrálního počtu, diferenciálních rovnic, lineární algebry, geometrie a logiky.

Tato část učebního textu je určena čtenářům, kteří již ovládají základy práce v systému Maple. Proto jsou zde uvedené příklady zaměřeny na praktickou realizaci vybraných problémů bez podrobnějšího popisu jednotlivých příkazů a parametrů. Začátečníkům doporučujeme prostudovat např. http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/index.html, kde naleznou užitečné informace pro práci se systémem. Přesto si nyní aspoň velmi stručně zopakujme základní pravidla práce s mapleovskými zápisníky (*worksheets*).

Zápisníky jsou hlavním uživatelským pracovním prostředím pro ovládání Maple. Umožňují uživateli pohodlné zadávání prováděcích příkazů a zároveň slouží k okamžité prezentaci výstupů systému Maple. Po spuštění Maple se na jeho pracovní ploše automaticky otevře nový prázdný zápisník. Práce v novém zápisníku spočívá v zapisování vstupních příkazů do mapleovské vstupní oblasti. Před těmito příkazy je vždy uveden znak „>“ (neznačí však relaci „větší než“) a příkazy jsou zobrazeny červeně. Ukončují se buď středníkem „ ; “ nebo dvojtečkou „ : “. Může jich být zapsáno na jeden řádek i více. Chceme-li je zapsat do samostatných řádků, musíme po jejich ukončení stisknout současně klávesy [Shift + Enter].

Po stisknutí klávesy [Enter] se všechny příkazy z mapleovské vstupní oblasti provedou. Pokud je příkaz ukončen středníkem, jsou jeho výsledky zobrazeny modře v „standardní matematické notaci“. Je-li však ukončen dvojtečkou, nejsou jeho výsledky zobrazeny.

Množina vstupních oblastí s jejich odpovídajícími výstupy se v zápisníku Maple nazývá prováděcí skupina (*execution group*). Zápisník může rovněž obsahovat samostatné textové oblasti v matematické notaci (*paragraphs*), hypertextové odkazy (*hyperlinks*) a tabulkové kalkulátory (*spreadsheets*). Pro zpřehlednění lze zápisník rozdělit do sekcí (*sections*) a podsekcí (*subsections*).

Prováděcí skupiny usnadňují práci s matematickým jádrem systému Maple. Umožňují přehledné zadávání a provádění jednotlivých příkazů i následné zobrazování výsledků.

Prováděcí skupiny tvoří základní výpočetní bloky v zápisníku. Jejich primárním účelem je kombinování jednoho či více příkazů a jejich numerických, symbolických nebo grafických výsledků do samostatné znovupoužitelné jednotky. Před prvním vstupním příkazem je uveden již zmíněný znak „>“. Pokud máme umístěn kurzor v prováděcí skupině, pak se po stisknutí klávesy [Enter] provedou všechny příkazy ve skupině.

Způsob práce a prohlížení již vytvořených zápisníků je závislý na způsobu jejich sestavení, tj. na uspořádání jejich prováděcích skupin. Je-li kurzor umístěn na libovolný řádek v prováděcí skupině a stiskneme klávesu [Enter], znamená to, že všechny příkazy v dané prováděcí skupině budou provedeny, a to v pořadí, v jakém jsou ve skupině uvedeny za sebou.Výsledky výpočtu jsou zobrazeny na konci prováděcí skupiny. Kurzor se poté automaticky přesune na první řádek následující prováděcí skupiny.

Důležitým pomocníkem ve využívání Maple je jeho nápověda sloužící ke snadné orientaci v mnoha mapleovských příkazech, funkcích, knihovnách a balících. V současné verzi systému Maple je nápověda řešena jako systém textových dokumentů propojených hypertextovými odkazy. Každá standardní funkce má zpracovánu vlastní stránku s nápovědou. Ikonou [Help], která je součástí panelu nástrojů, vyvoláme nápovědu. Potřebujeme-li získat např. nápovědu pro určitý příkaz, můžeme využít možnost napsat na řádek zápisníku otazník, za něj daný příkaz a stisknout klávesu [Enter]. Tím vyvoláme zobrazení požadované stránky nápovědy v novém okně.

55 UKÁZKY Z ÚVODU DO MATEMATICKÉ ANALÝZY A ALGEBRY

55.1 GRAFICKÉ ZOBRAZENÍ 2D FUNKCÍ Systém Maple umožňuje vizualizovat grafy 2D funkcí (myšleno takových funkcí, jejichž grafy lze znázornit v rovině, nikoliv tedy funkcí dvou proměnných) ve formě statických i animovaných obrázků. Při vytváření grafů funkcí si nejdříve vyvoláme grafickou knihovnu příkazem `> with(plots):`

Poté použijeme pro vykreslení explicitních 2D funkcí příkaz `plot`. Příkaz `implicitplot` zvolíme pro zobrazení implicitně zadaných funkcí (viz poznámka **28.8** na straně 53). Pro znázornění nesouvislé množiny dat použijeme příkaz `pointplot`. Pro tvorbu animovaných 2D obrázků existuje v Maple příkaz `animate` či `animatecurve`.

Poznamenejme ještě, že některé příkazy lze zapsat několika variantami, je možno při nich využít i nabídku z panelu nástrojů a aktuální verze Maple může v některých případech uživatelem prováděný zápis ještě poněkud upravit.

Konkrétní zápisy jednotlivých příkazů pak mohou vypadat následovně

Funkce daná explicitně

```
> plot(tan(2*x)/(3*x),x=-0.1..0.1);
```

Funkce daná implicitně

```
> implicitplot(y=tan(2*x)/(3*x),x=-0.1..0.1,y=0..0.676);
```

Funkce daná parametricky

```
> plot([2*(cos(t))^3, (sin(t))^3,t=0..2*Pi]);
```

Funkce daná v polárních souřadnicích

```
> polarplot(1+cos(phi),phi=0..2*Pi);
```

Funkce daná diskrétní množinou bodů (získaných např. experimentálně)

```
> pointplot([[1,1],[2,4],[3,9]],style=point,symbol=circle);
```

Animované 2D funkce

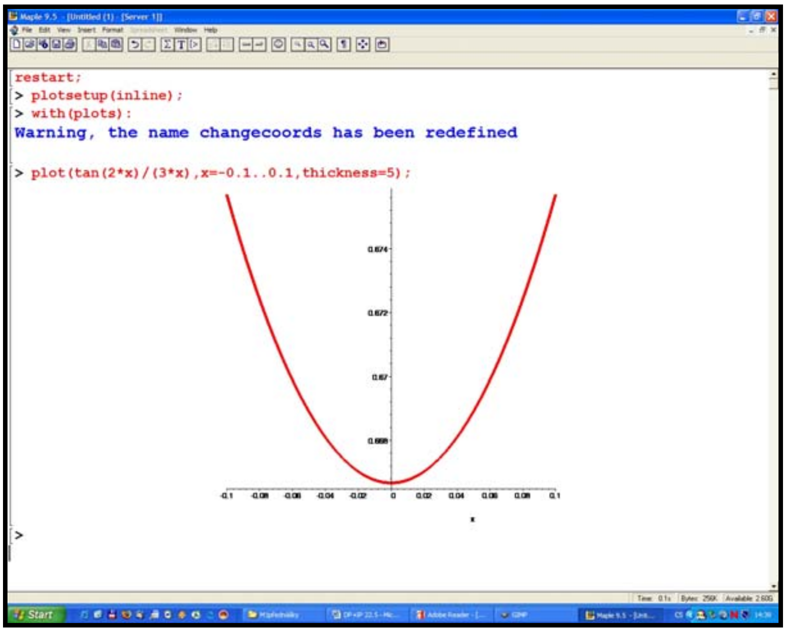
```
> animate( plot, [A*(x^2-1),x=-4..4], A=-2..2 );
> animatecurve( sin(2*x),x=-4..4);
```

Kromě výše uvedených příkladů obsahuje Maple mnoho dalších příkazů a užitečných parametrů pro vytváření 2D objektů. Podrobné informace o nástrojích používaných ke grafickému zobrazení funkcí naleznete v nápovědě systému Maple.

55.2 POZNÁMKA Na obrázku vpravo uvádíme ukázku pracovního prostředí systému Maple, v němž jsme znázornili funkci

$$f(x)=\frac{\tan 2x}{3x}.$$

Pozorný čtenář si všimne, že pro $x=0$ není funkce definována, ale má zde limitu $\frac{2}{3}$, jak uvádíme v 56.1.



55.3 ZJEDNODUŠENÍ MATEMATICKÝCH VÝRAZŮ můžeme ukázat následujícími příklady

$$> \mathtt{simplify}\left(\frac{x-1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-x^2}-\frac{x+1}{x}\right)\right); \qquad -1$$

$$> \mathtt{simplify}\left(\sin(x^3)\right)^2+\ln(4\cdot x)-(\cos(x^3))^2+1,\mathtt{trig}); \qquad 2-2\cos(x^3)^2+\ln(4x)$$

55.4 NĚKTERÉ MATICOVÉ A VEKTOROVÉ OPERACE V systému Maple existuje několik přístupů pro práci s maticemi a vektory (Viz nápověda systému Maple). My si zde ukážeme některé z těchto možností.

Maticové a vektorové operace můžeme provádět v prostředí vyvolaném příkazem `>with(linalg):` nebo `>with(LinearAlgebra):`

Pro přehlednost operací je vhodné nejdříve si definovat příslušnou matici či vektor, a teprve poté s nimi dále pracovat. Následuje několik ukázek.

Sestavení matice $\boldsymbol{A}$ (po sloupcích), sloupcového vektoru $\boldsymbol{u}$ a transponované matice $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ k $\boldsymbol{A}$

```
> A := <<1,0,-1>|<0,1,2>|<2,-2,0>>;
> u := <1,e^-2,Pi>;
> AT := <<1,0,-1>|<0,1,2>|<2,-2,0>>^%T;
```

$$A:=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\-1&2&0\end{bmatrix}\quad u:=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{e^2}\\ \pi\end{bmatrix}\quad AT:=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\2&-2&0\end{bmatrix}$$

Definice řádkového vektoru $\boldsymbol{v}$

$$>\mathtt{v:=<}\sqrt[3]{-2}\,\mathtt{|0>;} \qquad v:=\begin{bmatrix}(-2)^{1/3} & 0\end{bmatrix}$$

Výpočet determinantu (regulární) matice $\boldsymbol{A}$

```
>det(A);
```

$$6$$

Výpočet hodnosti matice $\boldsymbol{A}$

```
>rank(A);
```

$$3$$

Výpočet inverzní matice k (regulární) matici $\boldsymbol{A}$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Umocňování matice $\boldsymbol{A}$

```
> evalm(A^3);
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -10 \\ 4 & -7 & 10 \\ 5 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

Sčítání, odčítání, násobení matic (sestavených nyní po řádcích)

```
> B:=array([[6,3,1],[2,8,1],[1,4,3]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> C:=array([[8,4,5],[4,3,6],[5,4,7]]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(B+C);
```

$$\begin{bmatrix} 14 & 7 & 6 \\ 6 & 11 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> D1:=evalm(B-C);
```

$$D1 := \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -2 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(B&*C);
```

$$\begin{bmatrix} 65 & 37 & 55 \\ 53 & 36 & 65 \\ 39 & 28 & 50 \end{bmatrix}$$

55.5 POZNÁMKA Rozšířenou matici $\boldsymbol{A_r}$ dané soustavy lineárních rovnic je možné vygenerovat z této soustavy a naopak lze převést příslušnou rozšířenou matici soustavy na soustavu lineárních rovnic. Pro úplnost uvádíme níže i příslušnou matici $\boldsymbol{A}$ uvažovaného systému lineárních rovnic

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> sys := [x[1] + 3*x[2]                 = e,
                  x[2] - 2*x[3]         = 0,
                         x[3] - x[4]    = 0,
                                x[4]    = sqrt(2)]:
> neznama := [ x[1], x[2], x[3], x[4] ]:
> Ar := GenerateMatrix( sys, neznama );
```

$$Ar := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Následuje podobný příklad

```
> C := <<a,c>|<b,d>|<1,1>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{bmatrix}$$

```
> GenerateEquations( C, [x,y] );
```

$$[a\,x + b\,y = 1, c\,x + d\,y = 1]$$

55.6 UKÁZKA ŘEŠENÍ SOUSTAVY ČTYŘ LINEÁRNÍCH ROVNIC z předešlého odstavce, jíž můžeme zapsat i maticovou rovnicí $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, kde matice $\boldsymbol{A}$ soustavy rovnic je horní polopásová, $\boldsymbol{X}$ je hledaná neznámá matice (zde sloupcový vektor o čtyřech složkách x_1, x_2, x_3, x_4), a kde $\boldsymbol{B}$ je matice (čtyřsložkový sloupcový vektor) pravých stran rovnic, je uvedena v následujícím textu

```
> solve(sys);
```

$$\{x_4 = \sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}, x_1 = 6\sqrt{2} + \mathrm{e}\}$$

Jiný postup získáme řešením zmíněné maticové rovnice, z níž $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, tedy v Maple máme

```
> A :=array([[1,3,0,0],[0,1,2,0],
             [0,0,1,-1],[0,0,0,1]]);
> B :=Vector([[e,0,0,sqrt(2)]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(A^(-1)&*B);
```

$$X := \begin{bmatrix} e + 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

55.7 ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC Systém pomáhá najít reálné i komplexní kořeny (nulové body) nelineární rovnice či soustavy takových rovnic. Následuje několik ukázek.

Řešení nelineární (transcendentní) rovnice,
kdy při nezadaném intervalu pro hledané kořeny je vyčíslen kořen nejbližší počátku

```
> solve(x-tan(2*x)=0.1);
```

$$-0.09749090356$$

Hledání kořenů algebraické rovnice vzhledem k neznámé x

```
> solve(x^6-2*x^4-4*x^2-1,{x});
```

$$\{x = \mathrm{I}\}, \{x = -\mathrm{I}\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}\right\},$$
$$\left\{x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{-6 + 2\sqrt{13}}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{-6 + 2\sqrt{13}}\right\}$$

Hledání reálných kořenů

```
> fsolve(x^6-2*x^4-4*x^2-1,{x});
```

$$\{x = -1.817354021\}, \{x = 1.817354021\}$$

Hledání všech jejích kořenů

```
> fsolve(x^6-2*x^4-4*x^2-1,{x},complex);
```

$$\{x = -1.817354021\}, \{x = -1.\,\mathrm{I}\}, \{x = -0.5502505227\mathrm{I}\}, \{x = 0.5502505227\mathrm{I}\}, \{x = 1.\,\mathrm{I}\}, \{x = 1.817354021\}$$

Hledání kořenů soustavy nelineárních rovnic

```
> fsolve({x^6-2*x^4-4*x^2-1=y,2*x^3-4*x^2-4*x^2+1=y},{x,y});
```

$$\{y = -8.960735371, x = 1.378280411\}$$

Numerická aproximace výrazu

(Přesnost výpočtu můžeme ovlivnit parametrem `digits`, udávajícím počet číslic, který Maple použije k výpočtu)

```
> Digits:=6;
```

$$Digits := 6$$

```
> solve({y+3=x,x^4=y},{x,y});
```

$$\{y = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + 12\,\_Z^3 + 54\,\_Z^2 + 107\,\_Z + 81, label = \_L4),$$
$$x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + 12\,\_Z^3 + 54\,\_Z^2 + 107\,\_Z + 81, label = \_L4) + 3\}$$

Pro vyčíslení výsledku použijeme příkaz `evalf`

```
> evalf(%);
```

$$\{y = -2.06391 + 0.780507\mathrm{I}, x = 0.93609 + 0.780507\mathrm{I}\}$$

(Symbol „ % “ umožňuje přímo se odkazovat na hodnotu již vyhodnocených příkazů)

55.8 URČENÍ DEFINIČNÍHO OBORU, OBORU HODNOT, NULOVÝCH BODŮ FUNKCE provedeme následovně

```
> y:=x/(x^2-1*x+8);
```

$$y := \frac{x}{x^2 - x + 8}$$

```
> kladna:=solve(y>0); zaporna:=solve(y<0); nulove_body:=solve(y=0);
```

$$kladna := RealRange(Open(0), \infty)$$
$$zaporna := RealRange(-\infty, Open(0))$$
$$nulove\_body := 0$$

56 UKÁZKY Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

56.1 VÝPOČET LIMITY FUNKCE [0] v limitním bodě provedeme pomocí příkazu `limit`, do nějž zapíšeme příslušnou funkci a bod, pro nějž má být výpočet proveden

```
> limit(tan(2*x)/(3*x), x=0);
```

$$\frac{2}{3}$$

```
> limit(1/sqrt(x), x=0,right);
```

$$\infty$$

56.2 VÝPOČET DERIVACE FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ uskutečníme následovně

```
> diff(x^(1/x),x);
```

$$x^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)$$

56.3 VÝPOČET DERIVACE FUNKCE VYŠŠÍHO ŘÁDU pak vypadá takto

```
> diff(sin(2*x),x$3);
```

$$-8\cos(2x)$$

(`x$3` znamená, že se má Maple provést výpočet derivace 3. řádu)

56.4 TAYLORŮV POLYNOMICKÝ ROZVOJ FUNKCE provede příkaz `taylor`

```
> taylor( sin(x), x=0, 8 );
```

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + O(x^8)$$

(Parametr 8 zde udává řád, do něhož chceme příslušnou funkci aproximovat)

56.5 EXTRÉMY FUNKCE obdržíme, použijeme-li příkazy `minimize` pro nalezení minima a `maximize` pro nalezení maxima

```
> minimize(cos(x^2)+x^2+3,x=0..4);
```

$$4$$

```
>maximize(cos(x^2)+x^2+3,x=0..4,location);
```

$$19 + \cos(16), \{[\{x = 4\}, 19 + \cos(16)]\}$$

(Parametr `location` použijeme v případě, chceme-li zobrazit kromě extrémní hodnoty funkce i bod, ve kterém extrém nastal)

57 UKÁZKY Z INTEGRÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

57.1 VÝPOČET NEURČITÉHO INTEGRÁLU, přesněji primitivní funkce, umožní příkaz `int`, do nějž vložíme integrand a integrační proměnnou

```
> int(x^2+x^3-sin(x),x);
```

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cos(x)$$

57.2 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU uskutečníme stejně jako v předchozím případě příkazem `int` s tím rozdílem, že jej doplníme o příslušné integrační meze

```
> int(x^2+x^3-sin(x),x=0..2*Pi);
```

$$4\pi^4 + \frac{8}{3}\pi^3$$

57.3 NUMERICKÁ APROXIMACE INTEGRÁLU Maple provádí numerický výpočet integrálu např. na základě Simpsonova či Newton-Cotesova vzorce, o nichž jsme se zmínili v odstavci 48.21 na straně 86. Příslušný příkaz pak může vypadat následovně

```
> with(Student[Calculus1]):
> ApproximateInt(x^4, x=0..2, method =
  simpson);
```

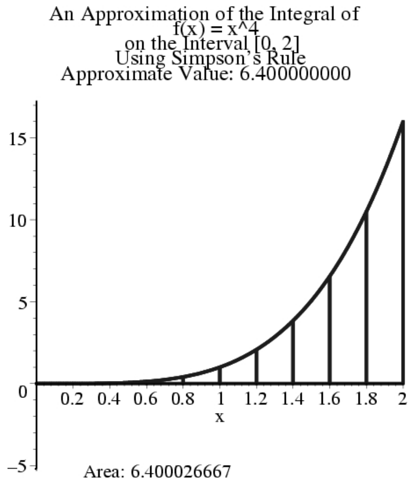
$$\frac{240001}{37500}$$

```
> ApproximateInt(sin(2*x), x=0.0..5.0,
  method = newtoncotes[6]);
```

$$0.919536$$

(Hodnotou `6` uvedenou v předešlém příkladě, ovlivňujeme přesnost výpočtu) Požadujeme-li kromě výpočtu také grafický výstup, použijeme parametr `output=plot`

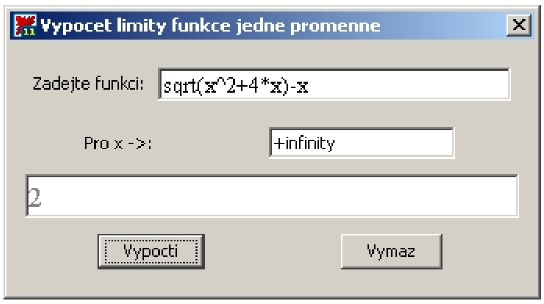
```
> ApproximateInt(x^4, x=0..2,
  method = simpson,
  output=plot);
```



57.4 MAPLET je grafické uživatelské prostředí poskytující pohodlný interaktivní přístup k mapleovským aplikacím pomocí tlačítek, textových polí, oken apod. Pomocí mapletů lze vytvářet komunikační rozhraní, které načítá uživatelův vstup, zpracovává jej a prezentuje výsledky. Tento cyklus lze libovolně opakovat, případně provést výpočet, jenž vytváří další navazující výsledky. Maplety lze spouštět buď přímo v Maple nebo nezávisle na něm pomocí programu Maplet Viewer. Základním krokem pro vytváření mapletů je inicializace balíku Maplets a jeho příkazu Elements : `with(Maplets)`, `with(Maplets[Elements])`.

Vlastní objekt mapletu je tvořen popisem vlastností mapletu a víceúrovňovým seznamem jednotlivých vnořených elementů, jak dokumentuje naše závěrečná ukázka:

```
> restart;
> with(Maplets):  with(Maplets[Elements]):
> maplet1 := Maplet( Window('title'= "Vypocet limity funkce jedne
  promenne", [["Zadejte funkci: ", TextField ['TF1'] ('font' =
  Font("times",14),20) ],["Pro x ->:
  ",TextField ['TF2'](14) ],
  TextBox ['TB1'](enabled=false,
  'font' = Font("times", 18)),
  [Button ("Vypocti", Evaluate
  ('TB1'='limit(TF1, x=TF2)')),
  Button ("Vymaz", SetOption
  ('TF1' = "") ) ]] ) ):
> Display ( maplet1 );
```



Život znamená snít

(*Friedrich Schiller*)

●

Čím je člověk rozumnější a lepší, tím více dobra v lidech pozoruje

(*Blaise Pascal*)

●

OMNIA VINCIT AMOR ET NOS CEDAMUS AMORI

(*Vergilius*, Zpěvy pastýřské 10, 69)

Láska vítězí nad vším, i my tedy ustupme lásce

LITERATURA

[1] ČSN ISO 31 – 11 Veličiny a jednotky – část 11: Matematické znaky a značky používané ve fyzikálních vědách a v technice. Praha: Český normalizační institut, 1999, 27 s.

[2] DUBČÁK, F. *Cvičení z matematiky*. 4. vyd. Skriptum, Brno: VUT v Brně FT ve Zlíně, 1987, 111 s.

[3] FIALKA, M. *Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi*. 3. vyd. Skriptum, Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 145 s.

[4] FIALKA, M. *Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi*. 3. vyd. Skriptum, Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2008, 103 s.

[5] HŘEBÍČEK, J. *Maple – Český klub uživatelů Maple* [online]. 27. 6. 2006 [cit. 2006-06-27]. Text v češtině. Dostupný z WWW: <http://www.fi.muni.cz/~hrebicek/maple/index.html>.

[6] KŘENEK, J.; OSTRAVSKÝ, J. *Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii*. 6. vyd. Skriptum, Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2005.

[7] REKTORYS, K. aj. *Přehled užité matematiky* I. Praha: Prometheus, 2003.

[8] ŠKRÁŠEK, J.; TICHÝ, Z. *Základy aplikované matematiky* I, II. Praha: SNTL, 1983, 1986.