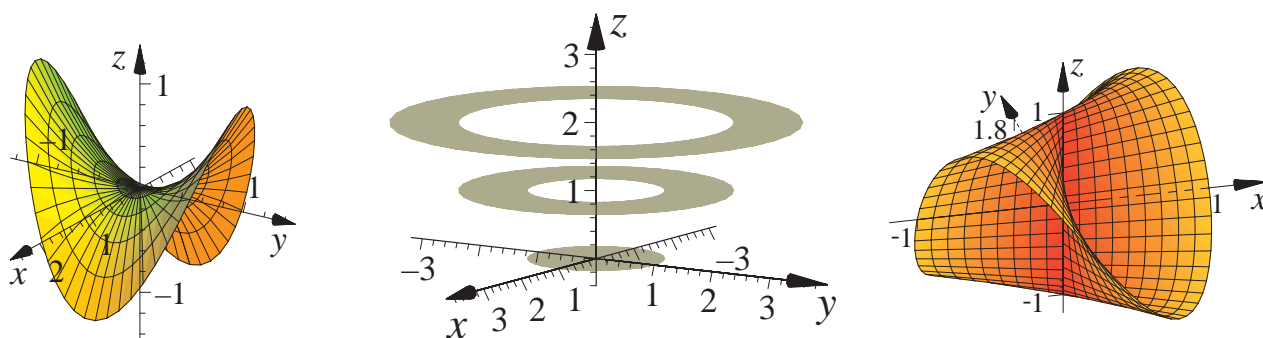


UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ

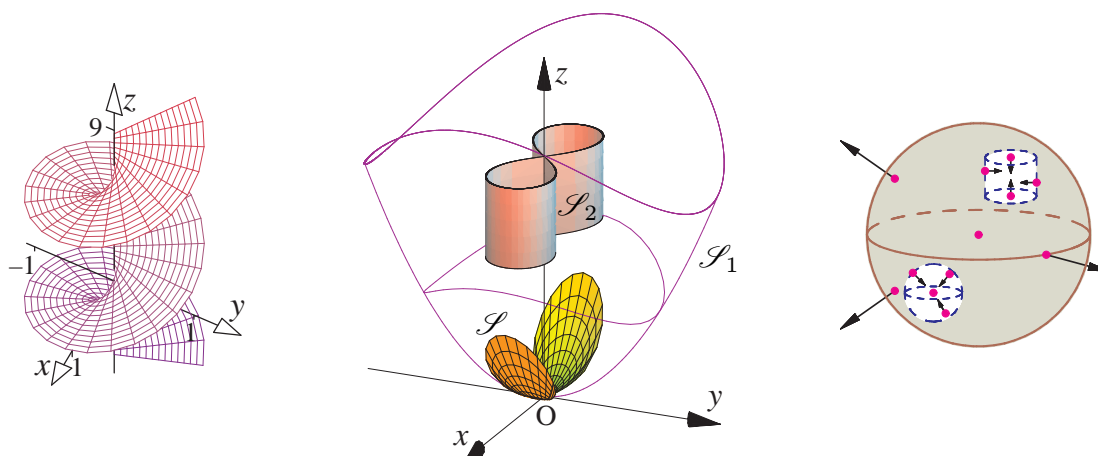
FAKULTA APLIKOVANÉ INFORMATIKY



DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRÁLNÍ
POČET FUNKCÍ VÍCE
PROMĚNNÝCH S APLIKACEMI
VÝKLAD, ŘEŠENÉ PŘÍKLADY, CVIČENÍ

Učební text

RNDr. Miloslav Fialka, CSc.



Recenzovali: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc., Doc. RNDr. Josef Hošek, CSc.

©RNDr. Miloslav Fialka, CSc., 2008

ISBN 978-80-7318-665-4 ISBN 978-80-7318-668-5

Předmluva

Tento učební text, krátce jej označme **DIP**, vznikl spojením skripta [9] o diferenciálním počtu (v textu je označeno **DP** a obsahovalo kapitoly 1 až 5) a navazujícího skripta [10] o integrálním počtu (v textu je označeno **IP** a obsahovalo kapitoly 6 až 8). Jde o učební text pro studenty 2. semestru bakalářského studia Fakulty technologické a Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně. Zcela pokrývá učivo uvedené ve svém názvu a přednášené v předmětu Matematika II. O čtenáři se předpokládá znalost základního kurzu diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné a pokud možno i lineární algebry a geometrie. Průběžná práce s textem by měla umožnit studentům omezit na minimum zápis svých přednášek, více se zaměřit na výklad přednášejícího a snad také přispět k jejich kvalitnější přípravě do cvičení, k lepší orientaci při studiu příbuzné nebo navazující literatury i k přípravě ke zkoušce.

Učební text **DIP** vznikl na základě mých přednášek na Fakultě technologické, konaných po řadu let jak pro prezenční, tak pro kombinovanou formu studia. Je psán se snahou o co největší přehlednost textu, vizuální zvýraznění nejdůležitějších výsledků a zvláště o srozumitelnost vložených kvalitních obrázků. Řada z nich bude mít na webovských stránkách autora animovanou barevnou podobu. Čtenáři výrazně pomůže pro lepší orientaci v textu podrobný seznam označení, obsažený rejstřík, jakož i zdůraznění některých částí textu jeho orámováním. Klíčové termíny jsou často odlišeny *italikou*, popř. *tučnou italikou*, což má čtenáři v mnoha případech signalizovat možnost nalézt tento termín také v rejstříku. Menší velikost písma pak dovoluje mj. zachovat kompaktnější formu obsáhlejších vzorců. Zápis textu respektuje platnou normu [5] veličin a jednotek ČSN ISO 31–11.

DIP je členěn na předčíslované **kapitoly**, **články** a **odstavce** (oddíly) – což jsou již jednotlivé poznámky, úmluvy, definice, věty, příklady atd. Např. 1.2.6 **Modely vektorových prostorů** je název 6. odstavce 2. článku 1. kapitoly. Věty ukončuje ★ a důkazy vět ♣. Obrázky, schémata a tabulky jsou číslovány zvlášť v každé kapitole a začínají jejím číslem. Každá kapitola má v závěru článek nazvaný **Cvičení**, jenž obsahuje příklady s jejich výsledky k samostatnému propočítání, popř. obsahuje i návod k řešení. Zcela výjimečně u některých jednodušších cvičení neuvádím výsledek.

Po obsahové stránce je tento učební text syntézou části učiva z lineární algebry, geometrie, vektorového počtu, základů teorie množin, z úvodu k funkcionální analýze (pojem metrického prostoru v 2. kapitole), z části matematické analýzy týkající se diferenciálního a integrálního počtu funkcí více proměnných i části učiva z fyziky. Zahrnuje poměrně rozmanité spektrum zejména řešených příkladů z geometrických, fyzikálních i dalších aplikací.

Vzhledem k omezenému rozsahu textu je jeho cílem uvést v logicky navazujícím celku základní myšlenky a metody zkoumání učiva, které má ve svém názvu. To je jeden z důvodů, proč jsou důkazy vět podány opravdu jen tam, kde při své stručnosti obsahují podle autorova úsudku i důležité sdělení. Zařazení 1. kapitoly o vektorové algebře a afinních prostorech je netradiční. Tato kapitola měla původně jen rozvinout znalosti z kurzu algebry a geometrie z prvního semestru. Protože však tento kurz není zařazen jak v kombinované formě studia, tak i v některých studijních programech prezenčního studia, měla by tato kapitola studentům pomoci jeho absencí zmírnit. První kapitola lze studovat samostatně. Kromě nových informací připomene i známé vlastnosti vektorů v ucelené formě, zvláště ve formě axiomů, a je možné se k ní vrátet např. při studiu informativní 2. kapitoly, uvádějící příklady některých metrických prostorů, při výpočtu operátorů teorie pole v 5. kapitole i při studiu integrálního počtu v kapitole o křivkovém integrálu nebo o plošném integrálu. První kapitola tak jistě pomůže při studiu oborů, které se opírají o základy mechaniky kontinua nebo vektorové analýzy, např. v inženýrské reologii,¹⁾ studující v technologických procesech reologicky komplexní materiály jako jsou polymerní taveniny, koloidní suspenze a emulze (např. v potravinářství) nebo při studiu jevů v elektrostatickém či elektromagnetickém poli. Komentovat dál náplň kapitol je zbytečné, stačí nahlédnout do obsahu učebního textu **DIP**.

Místy podrobnější výklad má příčinu ve snaze autora (snad ne marné) udržet doplňujícími poznámkami pozornost jak méně pohotového čtenáře, tak na druhé straně i absolventa střední školy velmi dobře vybaveného, pro něhož jsou určeny rozšiřující poznámky, obsahující více abstrakce. Uznávám, že zavděčit se oběma skupinám je pro každého autora úkol nejobtížnější. Navíc jsem do **DP** (do článku 5.4) přemístil z integrálního počtu část učiva o vektorovém operátoru divergence a rotace vektorového pole spolu s otázkami zkoumání konzervativnosti vektorových polí. To umožní brzy řešit četné praktické úlohy. Jistě není žádoucí dlouho se zabývat formálním výpočtem parciálních derivací, ale co nejdříve umět určit např. směr a velikost nejrychlejšího růstu teploty apod. Celkový počet stran **DIP** přitom zůstává téměř týž, jako má skriptum [28] pro předmět Matematika I v 1. semestru studia.

V integrálním počtu se v návaznosti na jednorozměrný Riemannův integrál z prvního semestru čtenář v závěrečných třech kapitolách nejprve seznámí s Riemannovým integrálem dvojrozměrným a trojrozměrným,

¹⁾Slovo *reologie* vzniklo z řeckého slovesa *ρεω* = *téci*. Označení reologie s vymezením působnosti na *studium deformace a toku materiálů* bylo zavedeno v r. 1920 Američanem Eugene C. Binghamem, profesorem v oboru koloidní chemie, a obecně přijato při založení americké Společnosti pro reologii v r. 1925. Prudký rozvoj reologie ve 2. polovině 20. století souvisí zejména s hromadným použitím pevných i kapalných polymerních systémů.

poté s křivkovým a nakonec s plošným integrálem včetně integrálních vět – věty Gaussovy–Ostrogradského a věty Stokesovy, jež jsou součástí tzv. vektorové analýzy a jednoduše jsou formulovány pomocí vektorových operátorů, které jsme zavedli v **DP**. Učivo o integrálním počtu je poměrně obtížné, neboť vyžaduje široké znalosti, dovednosti i geometrickou představivost, zato však poskytuje značný potenciál možností použití znalostí z něj získaných v mnoha aplikovaných oborech. Obsah **DIP** také naplňuje požadavky ze základních osnov („Core curriculum“) z matematiky pro evropského inženýra, jež vypracovala Evropská společnost pro výchovu inženýrů SEFI (Société européenne pour la formation des ingénieurs), zabývající se výchovou a vzděláváním inženýrů v evropských zemích. Vznikla v roce 1973. I v tomto učebním textu je k jeho osvětlení místy využíván geometrický, popř. fyzikálně motivující neformální přístup k výuce podpořený četnými obrázky a fyzikálními interpretacemi, jež se mi osvědčil i na přednáškách. Zřetelná je zde snaha nezdržovat se např. formálním výpočtem trojných integrálů, nýbrž přejít včas, dejme tomu, k výpočtu kinetické energie rotujícího tělesa, kdy výsledek, pokud možno, vychází v příslušné fyzikální měřicí jednotce.

Je zde mou milou povinností poděkovat váženým recenzentům prof. RNDr. Miroslavu Laitochovi, CSc. a doc. RNDr. Josefu Hoškovi, CSc. z Univerzity Palackého v Olomouci za odbornou recenzi **DP** i **IP** a včasné upozornění na nedostatky. Za pečlivé přečtení rukopisu, odhalení chyb a podnětné připomínky k němu rovněž děkuji prof. RNDr. Igoru Bockovi, CSc. ze Slovenské technické univerzity v Bratislavě.

Mimořádné poděkování a obdiv za trpělivé a tvůrčí psaní matematického textu v \LaTeX – systému pro jeho počítačovou sazbu i za vkládání čtených obrázků a částečně i jejich popis patří Bc. Ivanu Pomykaczovi, mému bývalému studentovi. Zvlášť srdečně děkuji za nesmírnou obětavost taktéž mé bývalé studentce Ing. Haně Charvátové, která v systému Maple pečlivě vypracovala velkou většinu obrázků a výrazně pomohla při obsahové i jazykové korekci textu. Děkuji bývalému kolegovi ústavu matematiky – geometru Mgr. Lukáši Rachůnkovi, Ph.D., který celkem šest obrázků precizně realizoval ve vektorové podobě systémem META-FONT. Pomohl v počátcích rovněž radami při počítačové sazbě, podobně jako vážený doc. Ing. Jiří Rybička, Dr., autor publikace [36], jemuž celý realizační tým předkládaného učebního textu na tomto místě děkuje. Na menší části pouze skriptu **DP** se též podílel Bc. Roman Slavík.

Pokud pozorný čtenář v učebním textu **DIP** objeví další nedostatky, jejichž odstranění přispěje ke srozumitelnosti a matematické korektnosti textu, jdou už zcela na můj vrub a předem mu děkuji, jestliže mne na ně upozorní, např. na e-mailovou adresu fialka@fai.utb.cz.

Vydání obou skript **DP** a **IP** pro předmět Matematika II finančně podpořily MORAVSKÉ TEPLÁRNY, a.s. a PSG, a.s., za což jim jménem realizačního týmu skript autor děkuje.

Leden 2008

Miloslav Fialka

- ... „*Je nejlépe, přednáší-li v matematických kurzech pro inženýry matematici*“ ...
- ... „*Matematika má provázet studenta od začátku do konce studia*“ ...
- ... „*Technologická stránka inženýrského vzdělávání rychle stárne a prochází řadou technologických zvratlů. ... Matematika představuje jazyk pro vytvoření modelu inženýrského problému pro počítačovou analýzu*“ ...

SEFI, Základní kurikulum z matematiky pro evropského inženýra



... „*Je třeba, abychom národ seznamovali s dějinami předešlých dob, s velikými činy svých předků. Ať slyší s úžasem, že naši předkové s velkými úspěchy pěstovali vědy, že u nich všeobecná moudrost byla domovem, že u nich vzešlo světlo osvěty dříve než jinde a odtud se rozlévalo po celé Evropě. Nedostatek světla, nevědomost a blud jsou hlavními příčinami lidského zla.*“ ...

... „*Inženýrské obory jsou obory, které lze matematizovat.*“ ...

Bernard Bolzano (* 5.10.1781, † 18.12.1848), český matematik a filozof



„*Je pravděpodobné, že jevy, které nazýváme zázraky, nebyly způsobeny popřením nebo vypuštěním běžných přírodních zákonů, ale vzbuzením té části přírodního zákona, která je v běžných podmínkách vypnuta.*“

George Gabriel Stokes (* 13.8.1819, † 1.2.1903), irský matematik a fyzik

Obsah

Předmluva	3
Obsah	5
Seznam označení	7
I Pojem afinního a metrického prostoru. Bodové množiny	13
1 Poznámky k afinním prostorům a vektorové algebře	13
1.1 Úvod	13
1.2 Afinní prostor neboli bodově vektorový prostor	13
1.3 Skalární součin. Euklidovský prostor	20
1.4 Skalární součin v kartézských souřadnicích	21
1.5 Pravoúhlý průmět vektoru	22
1.6 Směrové úhly a směrové kosiny	22
1.7 Einsteinova součtová konvence	22
1.8 Kroneckerovo delta	23
1.9 Transformace souřadnic vektoru a bodu. Matice přechodu	23
1.10 Orientace prostoru	25
1.11 Vektorový součin. Smíšený součin vektorů	26
1.12 Cvičení	28
2 Poznámky k metrickým prostorům	30
2.1 Metrický prostor	30
2.2 Aritmetický model euklidovského prostoru	31
2.3 Příklady metrických prostorů	32
2.4 Cvičení	37
3 Bodové množiny především v euklidovských prostorech	41
3.1 Úvod	41
3.2 Okolí bodu. Limita posloupnosti bodů v \mathbb{E}_n	41
3.3 Hromadný bod a další důležité body i množiny především v \mathbb{E}_n	48
3.4 Souvislý metrický prostor. Souvislá množina. Oblast. Konvexní množina	53
3.5 Cvičení	55
II Základy diferenciálního počtu funkcí více proměnných	58
4 Úvod k diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných	58
4.1 Pojem reálné funkce více argumentů	58
4.2 Zobrazení množin a funkce v \mathbb{E}_n	62
4.3 Příklady operátoru a funkcionálu v metrickém prostoru	66
4.4 Spojitost a limita zobrazení (funkcí) v metrických prostorech	67
4.5 Spojitost a limita zobrazení (funkcí) v euklidovských prostorech	71
4.6 O spojitosti funkcí v \mathbb{E}_n včetně stejnoměrné spojitosti	73
4.7 O limitách funkcí v \mathbb{E}_n a \mathbb{E}_n^*	75
4.8 Příklady ke spojitosti a limitám funkcí	77
4.9 Cvičení	80
5 Diferenciální počet funkcí více proměnných	86
5.1 Parciální derivace	86
5.2 Diferencovatelné funkce. Diferenciál. Tečná rovina grafu funkce	88
5.3 Derivace složené funkce. Derivace vyšších řádů. Záměnnost derivací	94
5.4 Derivace ve směru. Gradient. Výpočet operátorů teorie pole	97
5.5 Implicitní funkce	112
5.6 Vyšší diferenciály a Taylorův vzorec	117
5.7 Lokální a globální extrémy funkce	121
5.8 Vázané extrémy funkce	128
5.9 Cvičení	134

III	Základy integrálního počtu funkcí více proměnných	144
6	Riemannův dvojný a trojný integrál na měřitelné množině	144
6.1	Riemannův dvojný integrál. Měřitelné množiny v \mathbb{E}_2	144
6.2	Existence dvojného a trojného integrálu. Vlastnosti vícerozměrných integrálů	150
6.3	Fubiniova věta a výpočet dvojného integrálu dvojnásobnou integrací	152
6.4	Transformace vícerozměrných integrálů	155
6.5	Transformace dvojného integrálu do polárních a zobecněných polárních souřadnic	158
6.6	Vybrané fyzikální aplikace dvojného integrálu	161
6.7	Trojný integrál stručně	161
6.8	Fubiniova věta pro trojný integrál	162
6.9	Transformace trojného integrálu do cylindrických a zobecněných cylindrických souřadnic	162
6.10	Transformace trojného integrálu do sférických a zobecněných sférických souřadnic	164
6.11	Vybrané fyzikální aplikace trojného integrálu	165
6.12	Cvičení	166
7	Křivkový integrál	170
7.1	Jednoduchá hladká, popř. po částech hladká křivka v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3	170
7.2	Křivkový integrál skalární funkce neboli 1. druhu	175
7.3	Vlastnosti a fyzikální aplikace křivkového integrálu skalární funkce	178
7.4	Křivkový integrál vektorové funkce neboli 2. druhu	179
7.5	Greenova věta o křivkovém a dvojném integrálu. Jordanova věta v \mathbb{E}_2	182
7.6	Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě. Konzervativní vektorové pole	185
7.7	Cvičení	188
8	Plošný integrál	191
8.1	Obsah plochy jako grafu explicitní spojitě diferencovatelné funkce, fyzikální aplikace skořepiny	191
8.2	Modelování ploch parametrizací. Obsah a orientace plochy i jejího okraje. Jordanova věta v \mathbb{E}_3	195
8.3	Plošný integrál skalární funkce neboli 1. druhu	213
8.4	Vlastnosti a fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce	215
8.5	Plošný integrál vektorové funkce neboli 2. druhu	218
8.6	Integrální věty Gaussova-Ostrogradského a Stokesova. Definice operátorů teorie pole	225
8.7	Cvičení	232
	Literatura	235
	Rejstřík	237

Seznam označení

neobsahuje označení všeobecně známá, je většinou řazen v pořadí prvního výskytu označení v kapitole.

Označení	Význam, popř. název	Odstavec
1 Poznámky k afinním prostorům a vektorové algebře		
$\vec{F}, \vec{u}, \overrightarrow{AB}$	vektor \vec{F}, \vec{u} , resp. orientovaná úsečka AB s počátečním bodem A a koncovým bodem B	1.2.1
\mathbb{E}	bodový prostor	1.2.1
$\rho(A, B), \rho(\vec{u}, \vec{v})$	euklidovská metrika (vzdálenost) bodů A, B , resp. vektorů \vec{u}, \vec{v}	1.2.1, 2.2.1
$(A, \vec{u}), \vec{u}(A)$	vektor \vec{u} v bodě A	1.2.1
$\vec{u} \uparrow \vec{v}, \vec{u} \nmid \vec{v}$	\vec{u} je souhlasně, nesouhlasně rovnoběžný (též kolineární) s \vec{v}	1.2.2
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q},$ $\mathbb{R}, \mathbb{C}; \mathbb{N}^*, \mathbb{R}^+$	množina všech čísel přirozených $\{0, 1, \dots\}$, celých, racionálních, reálných, komplexních; kladných celých, kladných reálných	1.2.5; 2.1.2, 3.2.1
$\alpha \vec{u}, \lambda \vec{u}$	skalární α násobek vektoru \vec{u} , násobení vektoru \vec{u} skalárem α, λ	1.2.5, 2.2.4
\mathbb{V}, \mathbb{L}	vektorový prostor, lineární prostor (lineál)	1.2.5
$T \times V$	kartézský součin množin	1.2.5, 2.1.2
$\vec{o}, -\vec{a}$	nulový, resp. opačný vektor	1.2.5
$:=$ nebo $=:$	definitorní rovnosti, kterými definujeme symbol či výraz na straně dvojtečky. Např. $A := B$ nebo $C =: D$ čteme: A se z definice rovná B nebo D se z definice rovná C	1.2.6, 2.2.1
$(a_1, \dots, a_n), [a_1, \dots, a_n]$	uspořádaná n -tice reálných čísel představující vektor, resp. bod	1.2.6, 2.2.1
\mathbb{R}^n ; přičemž $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$	reálný n -rozměrný aritmetický vektorový (též lineární) prostor nebo jen množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel; \mathbb{R}^1 (je) totožné, též identické s \mathbb{R}	1.2.6, 2.2.1
$\vec{u} \cdot \vec{v}, (\vec{u}, \vec{v}), (u, v)$	skalární součin vektorů \vec{u}, \vec{v} či prvků u, v prostoru unitárního nebo Hilbertova	1.2.6, 2.2.2
\emptyset	prázdná množina	1.2.8
$f : x \mapsto y, x \xrightarrow{f} y;$ $f : M_1 \rightarrow M_2, M_1 \xrightarrow{f} M_2$	y je obrazem prvku (vzoru) x v zobrazení f ; zobrazení f množiny M_1 do množiny M_2	1.2.8, 2.1.2
$\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +)$	(reálný) afinní neboli (reálný) bodově vektorový prostor (většinou třírozměrný) s nosičem \mathbb{E} a zaměřením \mathbb{V}	1.2.8
$\mathbb{V}(\mathbb{E}) = \mathbb{V}$	vektorový prostor získaný z bodového prostoru \mathbb{E} (vektorové zaměření bodově vektorového neboli afinního prostoru)	1.2.8
$\{\mathbf{O}; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$	lineární soustava souřadnic, soustava přímočarých souřadnic	1.2.14
$\vec{r}_X, \vec{r}, \vec{x}, \overrightarrow{OX}$	radiusvektor bodu $X = [x, y, z]$	1.2.14
(\vec{a}, \vec{b})	úhel vektorů \vec{a}, \vec{b}	1.3.3
$[a, b]$, resp. (a, b)	uzavřený, resp. otevřený interval v \mathbb{R} od a do b	1.3.3, 2.3.13

$\{\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}, Oxyz$	kartézská soustava souřadnic	1.4.1
$\ \vec{a}\ $	délka, velikost, též norma vektoru	1.4.4, 2.3.5
\vec{a}°	jednotkový vektor ve směru \vec{a}	1.4.5
$p_{\vec{a}}(\vec{b}), b_a$	pravoúhlý průmět vektoru \vec{b} do vektoru \vec{a}	1.5.1
δ_{ij}	Kroneckerovo delta	1.8
\mathbf{I}	jednotková matice	1.8
$\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^T$	matice inverzní, transponovaná	1.9.3
$\{\dots\}$	oddělovače výsledků příkladů ve cvičeních	1.12, 2.4
2 Poznámky k metrickým prostorům		
$d(x, y)$	metrika (vzdálenost) prvků (bodů) x, y	2.1.2
$M_1 \subseteq M, M_1 \subset M$	M_1 je podmnožinou (je částí) M , je vlastní podmnožinou (vlastní částí) M (tj. $M_1 \neq M$)	2.1.4
$d _M, \Phi _M$	zúžení (restrikce) zobrazení d , resp. Φ na množinu M	2.1.5, 4.2.12
$\mathbb{E}_n := (\mathbb{R}^n, \rho)$	(reálný) n -rozměrný (aritmetický) euklidovský prostor \mathbb{E}_n	1.3.1, 2.2.1
$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]$	bod z \mathbb{E}_n	2.2.1
$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$	vektor (aritmetický)	2.2.3
$\mathbb{V}(\mathbb{E}_n) \equiv \mathbb{V}_n$	(vektorové) zaměření prostoru \mathbb{E}_n	2.2.3
\mathbb{E}_1	reálná osa (osa reálných čísel)	2.3.2
$\ \cdot\ $	norma vektoru, též prvku (normovaného prostoru)	2.3.5, 2.3.15
$\mathbb{E}_n, \mathbb{R}_{\text{kub}}^n, \mathbb{R}_{\text{okt}}^n, \mathbb{R}_p^n, P, l_2, B$ $B(M), C[a, b], C_2[a, b], L_2(a, b)$	příklady některých metrických prostorů	2.3.1 – 2.3.15
3 Bodové množiny především v euklidovských prostorech		
$\mathcal{O}_\delta(A), \mathcal{O}(A)$	δ -okolí bodu A (většinou sférické)	3.2.1
$\mathcal{O}_\delta^*(A), \mathcal{O}^*(A)$	redukované (většinou sférické) δ -okolí bodu A	3.2.1
$\mathcal{O}_\delta(A) \setminus \{A\}$	rozdíl dvou množin	3.2.1, 3.3.7
$B_n(A, r), \bar{B}_n(A, r)$	otevřená, resp. uzavřená n -rozměrná koule	3.2.2
$\varkappa_n(A, r)$	n -rozměrná kulová plocha	3.2.2
$\{X_k\}_{k=1}^\infty, \{X_k\}$	posloupnost (bodů) v \mathbb{E}_n	3.2.7
$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A, X_k \rightarrow A$	limita posloupnosti $\{X_k\}$ je rovna A	3.2.18
Q_n, \bar{Q}_n	otevřený, resp. uzavřený n -rozměrný kvádr (též interval)	3.2.36
$C_n(A, 2\delta), \bar{C}(A, 2\delta)$	otevřená, resp. uzavřená n -rozměrná krychle s délkou hrany 2δ	3.2.36
${}^C\mathcal{O}_\delta(A), {}^\square\mathcal{O}_\delta(A)$	kubické (též krychlové) δ -okolí bodu A	3.2.36
\overleftrightarrow{AB}	přímka procházející body A, B	3.2.39
\overline{AB}	(uzavřená) úsečka s krajními body A, B	3.2.39
M°	vnitřek množiny M	3.3.8
M^e	vnějšek množiny M	3.3.8
$\partial M, \text{hr } M$	hranice množiny M	3.3.8
$\bar{M}_{\mathbb{E}_n}, \bar{M}$	uzávěr množiny M (podrobněji: v \mathbb{E}_n), resp. množina uzavřená, resp. kompaktní	3.3.8

$\text{diam } M$	průměr množiny v metrickém prostoru	3.3.9
$\text{dist}(A, M)$	vzdálenost bodu A od množiny M v metrickém prostoru	3.3.9
$\text{dist}(M_1, M_2)$	vzdálenost množin M_1, M_2 v metrickém prostoru	3.3.9
$\mathcal{M} = \cup_{\alpha} M_{\alpha}$	system (třída) množin	3.4.8
$L = A_1 A_2 \dots A_m$	polygon (lomená čára) spojující body A_1 až A_m	3.4.13
$\Phi(t), \vec{\Phi}(t)$	bodové zobrazení (funkce), resp. vektorová funkce nebo zároveň jejich hodnoty v bodě t	3.4.16
4 Úvod k diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných		
$A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$	bod v matematické analýze, kde lze často $\mathbb{E}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n) \equiv \mathbb{R}^n$	4.1.2
$f(x_1, \dots, x_n), f(X)$	reálná funkce n reálných argumentů	4.1.3
$D_f, D(f), \text{dom } f$	definiční obor funkce f	4.1.3
$H_f, H(f), f(D_f)$	obor hodnot funkce f	4.1.3
graf $f, G(f)$	(kartézský) graf funkce f	4.1.3
$V_c \subset \mathbb{E}_2$, resp. $H_c \subset \mathbb{E}_3$	vrstevnice, resp. konstantní c -hladina funkce f o kótě c	4.1.5
\doteq, \approx	(je) po zaokrouhlení rovno, přibližně rovno	4.1.9, 5.2.3
M^x, M^y	množina elementární vzhledem k ose x , k ose y	4.1.10
$(n, m)\Phi$	zobrazení typu (n, m) (jistě množiny M) z \mathbb{E}_n do \mathbb{E}_m	4.2.2
$\Phi(M), \Phi^{-1}(N)$	obraz, resp. vzor množiny M , resp. N při zobrazení Φ	4.2.3
Φ^{-1}	zobrazení (funkce) inverzní k Φ	4.2.3, 4.4.14
$\Phi(X), \vec{\Phi}(\vec{x}), \vec{f}(X)$	bodová funkce (či zobrazení) Φ bodu X , vektorová funkce $\vec{\Phi}$ vektoru \vec{x} , vektorové pole \vec{f} v bodě X	4.2.5, 4.2.6
$\Phi(\Psi), \Phi \circ \Psi$	složené zobrazení (nejprve zobrazuje Ψ a pak Φ)	4.2.10
L	operátor	4.3.2
$C^k[a, b], C^k(J), C^k$	třída funkcí se spojitými derivacemi do řádu k včetně na příslušné množině	4.3.4
$\mathcal{O}_M(A), \mathcal{O}_M^*(A)$	$\mathcal{O}_M(A) = \mathcal{O}_{\delta}(A) \cap M$, $\mathcal{O}_M^*(A) = \mathcal{O}_M(A) \setminus \{A\}$ okolí, redukované okolí bodu A vzhledem k množině M	4.4.5
$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = B$	limita zobrazení (funkce) v bodě A vzhledem k množině M je rovna B	4.4.6
$\text{sgn } x$	funkce signum (znaménko reálného čísla x)	4.6.4
$f \in C(M), f \in C^0$	(spojitá) funkce třídy C (též C^0) na (otevřené) množině M	4.6.5
\mathcal{S}	jednoduchá plocha	4.6.6
$\mathbb{E}_1^* = \mathbb{R}^*, \mathbb{E}_n^* = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$	rozšířená reálná osa, resp. rozšířený n -rozměrný euklidovský prostor obsahující nevlastní bod nekonečno ∞	4.7.3
${}^Q\mathcal{O}(B_{\infty})$	kvádrové okolí („nekonečného“) bodu B_{∞} , který je konkrétní variantou nevlastního bodu ∞ z \mathbb{E}_n^*	4.7.5
$f(x, y) \rightrightarrows F(x)$ $y \rightarrow y_0$	$f(x, y)$ stejnoměrně konverguje na množině M_x (všech x) v bodě y_0 vzhledem k proměnné y k limitní funkci $F(x)$	4.7.8
$\text{ent } x$	funkce charakteristika (starší název: celá část) proměnné x	4.9

5 Diferenciální počet funkcí více proměnných		
$\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_k}, f'_{x_k}(\mathbf{A}), z'_{x_k} _{\mathbf{A}}, \partial_{x_k} f(\mathbf{A})$	parciální derivace (1. řádu) funkce $z = f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(\mathbf{X})$ podle proměnné x_k v bodě $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$	5.1.3
$\Delta f(\mathbf{A}), \Delta z(\mathbf{A}), \Delta z_{\mathbf{A}}$	přírůstek, též diference funkce f , resp. závisle proměnné z , v bodě \mathbf{A}	5.2.2
$df(\mathbf{A}), df(\mathbf{A}, \vec{h})$	(totální) diferenciál 1. řádu funkce v bodě \mathbf{A} (s přírůstkovým vektorem \vec{h})	5.2.2
$f \in C^1(M), C^k(M)$	funkce třídy C^1 , resp. C^k na (otevřené) množině M , tj. funkce spojitá na M se svými parciálními derivacemi 1. řádu, resp. do řádu k včetně	5.2.11, 5.3.9
$\vec{t}_x, \vec{t}_y; \vec{n}$	směrové vektory tečen v daném bodě grafu funkce $z = f(x, y)$; směrový vektor příslušné normály grafu	5.2.15
$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}, f'''_{x_2 x_1 x_1}$	3. derivace funkce f podle x_2 , pak podle x_1 a podle x_1	5.3.7
$f'_v(\mathbf{A}), \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\mathbf{A})$	derivace funkce $f(\mathbf{X})$ podle vektoru \vec{v} (ne nutně jednotkového), resp. směrová derivace $f(\mathbf{X})$ ve směru \vec{s} daného jednotkovým vektorem \vec{s}	5.4.4
∇	Hamiltonův operátor (hamiltonián, nabla operátor)	5.4.7
$\nabla f(\mathbf{A}), \text{grad } f(\mathbf{A}), \nabla f _{\mathbf{A}}$	gradient skalárního pole $f(\mathbf{X})$ (skalární funkce f) v bodě \mathbf{A}	5.4.7
$\vec{n}(\mathbf{T}), \vec{n}_{\mathbf{T}}$	normálový vektor v bodě \mathbf{T} hladké (nad)plochy, resp. křivky určené v jeho okolí c -hladinou skalárního pole $U(\mathbf{X}) \in C^1(G)$	5.4.19
$\nabla \vec{f}, \text{div } \vec{f}$	operátor divergence vektorového pole (funkce) \vec{f}	5.4.28
$\text{int } \mathcal{K}, \text{ext } \mathcal{K}, \text{int } \mathcal{S}, \text{ext } \mathcal{S}$	vnitřek, vnějšek uzavřené křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 , či uzavřené plochy \mathcal{S} v \mathbb{E}_3	5.4.25
Δf	Laplaceův operátor (laplacián) skalárního pole (funkce) f	5.4.33
$\nabla \times \vec{f}, \text{rot } \vec{f}, \text{curl } \vec{f}$	operátor rotace vektorového pole (funkce) \vec{f}	5.4.38
$d^k f(\mathbf{A}, \vec{h})$	(totální) diferenciál k -tého řádu funkce f v bodě \mathbf{A} (s přírůstkovým vektorem \vec{h})	5.6.5
$\frac{\partial}{\partial \vec{s}}$	operátor směrové derivace (dané jednotkovým vektorem \vec{s})	5.6.10
$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{s}^k}$	k -tá směrová derivace funkce $f(\mathbf{X})$ ve směru \vec{s} (jednotkového vektoru)	5.6.10
GMAX, VLMAX	bod globálního maxima, vázaného lokálního maxima $f(\mathbf{X})$ atd.	5.7.1, 5.8.4
$\mathbf{H}(\mathbf{P}), H_n(\mathbf{P})$	Hessova matice \mathbf{H} funkce $f(\mathbf{X})$ v bodě \mathbf{P} , její determinant hessián	5.7.12
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	diagonální matice z prvků (čísel) λ_i	5.7.17
$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$	charakteristický polynom matice \mathbf{A}	5.7.17
$J, \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$	determinant Jacobiovy matice \mathbf{J} (jacobián)	5.8.3
$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$	soustava nelineárních rovnic s neznámou $\vec{x} \in \mathbb{V}_n$	5.8.3
$L(\mathbf{X})$	Lagrangeova funkce	5.8.7
T	tečný prostor všech tečných vektorů k vazbě M v daném bodě	5.8.10
$S_1 \gg S$	S_1 je mnohem větší než S	5.9 10
\square	d'Alembertův operátor (dalembertián)	5.9 40a

6 Riemannův dvojný integrál a trojný integrál na měřitelné množině		
$\ \mathcal{D}\ $	norma dělení \mathcal{D}	6.1.5
$\mu_n(I), \mu(I)$	n -rozměrný objem n -rozměrného intervalu I	6.1.10, 6.1.15
\iint_I, \iint_M	dvojný integrál na obdélníku I , množině M	6.1.10, 6.1.15
$\mu(M)$	míra množiny M (Jordan-Peanova)	6.1.17
\int_M	vícerozměrný integrál na množině M	6.2.1
$\langle f \rangle$	střední hodnota funkce na množině	6.2.6
\iiint_M	trojný integrál na množině M	6.7.1
7 Křivkový integrál		
$\Phi(t), \vec{r}(t); \vec{\Phi}(t), \dot{\vec{r}}(t)$	parametrizace, rádiusvektor křivky; jejich derivace	7.1.1, 7.1.2
\mathcal{K}	křivka či orientovaná křivka – tu někdy označíme $\vec{\mathcal{K}}$	7.1.2, 7.1.5
$\partial\mathcal{K}$	okraj křivky \mathcal{K}	7.1.4
$\vec{\tau}^\circ$	pole jednotkových tečných vektorů na křivce	7.1.5
ds	element oblouku, diferenciál oblouku (křivky)	7.1.8
$s(\mathcal{K}), \int_{\mathcal{K}}$	délka křivky \mathcal{K} , symbol křivkového integrálu na \mathcal{K}	7.1.8, 7.4.3
$\widehat{AB}, \overline{AB}$	oblouk křivky s krajními body A, B (resp. orientovaný oblouk s počátečním bodem A a koncovým bodem B)	7.1.8, 7.4.3
$p.b. \mathcal{K}, k.b. \mathcal{K}$	počáteční, koncový bod křivky \mathcal{K}	7.1.10
$-\mathcal{K}$	křivka orientovaná opačně, nesouhlasně s křivkou \mathcal{K}	7.1.10
$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$	cesta orientovaná k hladkými (orientovanými) částmi	7.1.10
$\int_{\mathcal{K}} f ds, \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}; \oint_{\mathcal{K}}$	křivkový integrál funkce skalární f , resp. vektorové \vec{f} na křivce \mathcal{K} ; na uzavřené křivce \mathcal{K}	7.2.2, 7.4.2
$S(\mathcal{S})$	obsah úseku plochy \mathcal{S}	7.2.5
$d\vec{s}$	orientovaný element (délky) oblouku	7.4
\mathcal{C}	cirkulace (popř. práce) vektorového pole (síly) \vec{f} po uzavřené křivce	7.4.6
\mathcal{T}	tok dvojrozměrného pole (P, Q) uzavřenou křivkou	7.4.6
$\text{int } \mathcal{K}, \text{ext } \mathcal{K}$	vnitřek, vnějšek uzavřené křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_2	7.5.3
$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$	křivkový integrál (konzervativního) pole \vec{f} po křivce s počátečním bodem A a koncovým bodem B	7.6.2
8 Plošný integrál		
$\mathcal{S}, \Phi(u, v), \vec{r}(u, v)$	úsek \mathcal{S} plochy jako obraz při zobrazení bodovém Φ , vektorovém \vec{r}	8.1.2
$S(\mathcal{S})$	obsah (plošná míra) úseku hladké plochy \mathcal{S} grafu funkce spojitě diferencovatelné na jednoduše souvislém obrazci	8.1.4
$\vec{n}, \ \vec{n}\ $	normálový vektor plochy, jeho norma (délka)	8.1.4
dH, dS	element hmotnosti skořepiny \mathcal{S} , resp. element (obsahu) plochy \mathcal{S} grafu funkce či plošný element plochy \mathcal{S} grafu funkce	8.1.8
$E_z(\mathcal{S})$	kinetická energie rotující skořepiny \mathcal{S} kolem osy z	8.1.8
$\mathcal{S} = \Phi(M), \vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v, \vec{n}$	list \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 definovaný na oboru parametrů M z \mathbb{E}_2 parametrizací $\Phi(u, v)$, resp. $\vec{r}(u, v)$ třídy C^1 s výjimkou konečně mnoha bodů na M , jeho tečné vektory $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$, resp. \vec{r}'_u, \vec{r}'_v a jeho normálový vektor \vec{n}	8.2.1, 8.2.2

J_{Φ}	Jacobiova matice parametrizace Φ , též derivace Φ	8.2.2
$\partial\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\circ}$	okraj listu \mathcal{S} , vnitřek listu \mathcal{S}	8.2.2
\vec{n}°	jednotkový normálový vektor neboli jednotkový vektor normály listu, resp. plochy (vícelisté = jednoduché po částech hladké), jehož pole je orientace listu, resp. plochy	8.2.3, 8.2.14
$-\mathcal{S}, (\mathcal{S}, -\vec{n}^{\circ}), -\vec{\mathcal{S}}$	opačně orientovaný list (plocha) k listu (ploše) \mathcal{S}	8.2.7, 8.2.14
$\vec{\nu}^{\circ}$	orientace listu indukovaná (tj. souhlasná s) jeho parametrizací	8.2.7
$\partial\vec{\mathcal{S}}, \partial\mathcal{S}$	orientovaný okraj listu, resp. plochy (vícelisté)	8.2.8, 8.2.14
$S(\mathcal{S})$	obsah (plošná míra) listu, resp. plochy \mathcal{S}	8.2.9
$d(\mathcal{S}_i), \text{diam } \mathcal{S}_i$	průměr plochy (listu) \mathcal{S}_i	8.2.10, 8.5.2
dS	element obsahu parametrizované plochy, (skalární) element neorientované plochy	8.2.11, 8.3.2
E, F, G	Gaussovy koeficienty plochy	8.2.11
$S(\mathcal{P}), S(\mathcal{M})$	obsah podlistu \mathcal{P} listu, resp. (plošně) měřitelné množiny \mathcal{M} plochy (vícelisté)	8.2.12, 8.2.14
$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$	součet (popř. orientovaný) přilehlých neboli přilepených listů $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ (popř. orientovaných) ve dvojlistou plochu (popř. orientovanou) \mathcal{S}	8.2.13
$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_m$	[vícelistá jednoduchá po částech hladká] plocha (popř. orientovaná) složená z m listů (popř. orientovaných), tj. součet (popř. orientovaný součet) m listů	8.2.14
$\text{int } \mathcal{S}, \text{ext } \mathcal{S}$	vnitřek, vnějšek uzavřené plochy \mathcal{S} v \mathbb{E}_3	8.2.27
$T, \partial T, -\partial T$	těleso T , resp. jeho kladně či záporně orientovaná hranice	8.2.29
$\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{X})dS, \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(\mathbf{X}) \cdot d\vec{S}; \oint_{\mathcal{S}}$	plošný integrál funkce f skalární, resp. \vec{f} vektorové na ploše \mathcal{S} ; na uzavřené ploše	8.3.2, 8.5.3
$\mathcal{T}, \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f})$	tok vektorového pole \vec{f} orientovanou plochou \mathcal{S}	8.5.2, 8.5.3
$d\vec{S}$	(vektorový) element orientované plochy	8.5.3
$dx \wedge dy$	vnější součin diferenciálů dx, dy	8.5.5

Část I

Pojem afinního a metrického prostoru.

Bodové množiny

1 Poznámky k afinním prostorům a vektorové algebře

1.1 Úvod

Význam použití vektorů v mnoha oblastech teoretické i praktické činnosti lidstva je dnes naprosto zřejmý. Objev vektoru je však datován teprve na počátek 17. století. Tehdy si kolem roku 1600 vlámský inženýr Simon Stevin (1548 - 1620) znázorňoval síly pomocí orientovaných úseček a objevil přitom pravidlo o skládání (sčítání) dvou sil pomocí rovnoběžníku. Kupodivu se jeho idea vektorů dočkala systematického rozvíjení až v 19. století, kdy použití vektorů podstatně přispělo k rozvoji geometrie a fyziky. Vektorová algebra je využívána v analytické geometrii teprve od třicátých let dvacátého století.

První výhodou při zvládnutí pravidel pro počítání s vektory je zjednodušení zápisu vztahů, bez něhož by nemálo vět i vzorců mnoho ztratilo na své jednoduchosti a eleganci.

Druhou a závažnější výhodou je možnost matematicky formulovat různé zákony ve tvaru nezávislejícím na zvolené soustavě souřadnic.

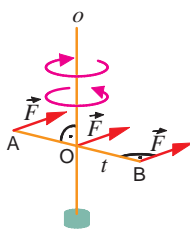
První kapitola volně navazuje na vektorové prostory probrané v algebře a geometrii podle skript [42]. Při geometrické definici vektoru vyjdeme z představy, že fyzikální veličinu vektorového charakteru lze zobrazit orientovanou úsečkou. Připomeneme nejdůležitější pravidla pro operace s vektory, ale seznámíme se také s užitečnou Einsteinovou součtovou konvencí pro sčítání víceindexových veličin mechaniky kontinua.

Poznatky z první kapitoly jsou výchozí základnou nejen pro snadnější zvládnutí druhé kapitoly, kde se více zaměříme na metrické vlastnosti abstraktních prostorů, a to i nekonečnědimenzionálních, ale zúročíme je také v kapitolách o vektorových funkcích, teorii pole, křivkách a plochách.

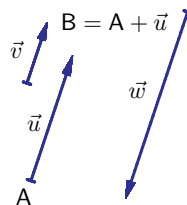
Úvahy v této kapitole vedou k závěru, že **trojrozměrný orientovaný euklidovský (bodově vektorový) prostor, jako speciální případ afinních neboli bodově vektorových prostorů, je vhodným matematickým modelem fyzikálního prostoru, ve kterém žijeme**, tj. prostoru, v němž se ještě neprojevují jevy studované obecnou teorií relativity. Intuitivně jej chápeme jako trojrozměrný prostor bodů, jejichž vzdálenosti umíme měřit, a v němž také dovedeme určit různé směry. Matematicky lze zmíněné směry určit proto, že euklidovský prostor, oproti afinnímu prostoru, má už ve svém (vektorovém) zaměření zaveden skalární součin vektorů. Dále v něm lze snadno definovat euklidovskou vzdálenost neboli euklidovskou metriku a pomocí ní matematicky určit vzdálenosti bodů (popř. vektorů). Díky metrice získá euklidovský prostor bohatost struktury metrických prostorů.

Metrický prostor je jedním z nejdůležitějších pojmů moderní matematiky.¹⁾

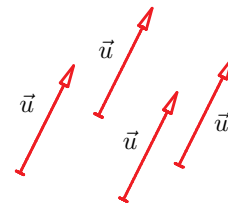
1.2 Afinní prostor neboli bodově vektorový prostor



Obr. 1.1



Obr. 1.2



Obr. 1.3

1.2.1 Poznámka – Fyzikální a geometrická motivace Představme si vodorovnou tyč t s krajními body A, B, jejíž středem O prochází k ní svislá pevná osa o , kolem které se tyč může volně otáčet. Jde tedy o otáčející se kříž, viz obr. 1.1. Je zřejmé, že stejně velká nenulová síla \vec{F} působící kolmo na rovinu kříže má opačné otáčivé účinky, působí-li v krajním bodě A nebo v krajním bodě B. Působí-li \vec{F} na tyč v bodě O, pak se tyč vůbec neotáčí. Podstatné je tedy umístění síly jakožto vektoru. Poprvé se s vektorem setkali žáci základních škol ve fyzice a bývá jím právě síla. Také v analytické geometrii, např. při řešení úloh polohy, je

¹⁾ Pro inženýra je důležitý z praktického hlediska přinejmenším proto, že jeho vlastností mj. využívá rostoucí počet přibližných metod aplikované matematiky, vhodných při řešení náročných inženýrských úloh praxe s využitím matematického softwaru na počítači.

užitečné mluvit o pevně daném počátečním či koncovém bodě vektoru, tj. uvažovat geometricko-algebraickou strukturu, jejímiž základními objekty jsou jednak body, jednak vektory.

Buď \mathbb{E} množina nazvaná **bodový prostor**, jejíž prvky nazveme body a značíme zde velkými písmeny A, B, C atd. Říkáme, že nenulová²⁾ orientovaná úsečka \overrightarrow{AB} , viz obr. 1.2, je **umístěním**, též *reprezentantem* vektoru \vec{u} , kde nenulovým *geometrickým* vektorem \vec{u} rozumíme, viz obr. 1.3, množinu všech orientovaných úseček (na přímce, v rovině, v prostoru) téhož **směru** (Viz 1.2.2) a téže **délky**. Abychom se přiblížili čtenářovu zápisu (v poznámkách či na tabuli), budeme vektory značit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$, atd. **Délka** nebo také **norma vektoru** \vec{u} (velikost, modul) bude chápána jako délka jeho libovolného umístění, tj. jako délka úsečky AB a toto číslo budeme označovat $\|\vec{u}\|$. Čtenář si jistě uvědomil, že náš postup znamená umět měřit vzdálenost bodů $A, B \in \mathbb{E}$, tj. že v \mathbb{E} je zavedena nezáporná skalární funkce, zvaná metrika, zde by to byla tzv. **euklidovská** (sférická) **metrika** $\rho(A, B) \geq 0$. Metrickými vlastnostmi některých prostorů se budeme zabývat až v kapitolách 2,3.

Geometrický vektor \vec{u} chápáný jako množina (též třída) všech orientovaných úseček téhož směru a téže délky budeme také nazývat **volný vektor**, viz obr. 1.3, a umístění vektoru \vec{u} s počátečním bodem³⁾ A a koncovým bodem B, viz obr. 1.2, se nazývá **vázaný vektor**⁴⁾. Ten můžeme označovat

$$(A, \vec{u}) \text{ nebo } \vec{u}(A),$$

takže pak mluvíme o **vektoru v bodě** A. Tím zdůrazníme, že vektor \vec{u} vychází z bodu A. Druhé označení se využívá v teorii pole. V analytické geometrii, a zvláště ve fyzice se lze ještě setkat s klouzavými vektory. **Klouzavý vektor**, též *vektor pohyblivý po přímce*, je vektor, jehož počáteční bod lze na pevné přímce libovolně posouvat. Ve fyzice se ukazuje, že takovým vektorem je *osamělá síla* působící na tuhé těleso, jejíž účinek se nezmění, posouváme-li její počáteční bod po přímce určené tímto počátečním bodem a směrem síly. (Kterým ze tří typů vektorů je síla \vec{F} z 1.2.1?)

1.2.2 Upozornění

- (1) Každé umístění vektoru \vec{u} jej určuje jednoznačně.
- (2) **Směr** je množina (též třída) všech souhlasně rovnoběžných polopřímek (Viz publikaci [29], str.7). Směr tedy v sobě, v souladu s běžnou mluvou, již zahrnuje pojem orientace⁵⁾. Například chceme-li ukázat, kterým směrem odjel vlak, naznačíme tento směr nejen přímkou, ale také její orientací. Pro připomenutí tohoto faktu přesto někdy použijeme termín (orientovaný) směr, a to zejména při fyzikálních úvahách spojených s křivkami a plochami.
- (3) Aspoň dva vektory, které leží (tj. jejichž umístění leží) na rovnoběžných přímkách (tj. i na jedné přímce), se nazývají **kolinéární vektory**. Dále říkáme, že (dva nebo více kolinéárních vektorů) jsou **souhlasně kolinéární** nebo také **souhlasně rovnoběžné vektory**, mají-li stejnou orientaci - na obr. 1.2 jsou to vektory \vec{u}, \vec{v} , což zapíšeme $\vec{u} \uparrow \vec{v}$. V opačném případě, tj. mají-li dva kolinéární vektory vzájemně opačné orientace, jde o **nesouhlasně rovnoběžné** nebo také **nesouhlasně kolinéární vektory** - ve stejném obrázku to nastává pro vektory \vec{u}, \vec{w} , což zapíšeme $\vec{u} \nmid \vec{w}$.
- (4) Aspoň tři vektory, které leží v rovnoběžných rovinách (tj. i v téže rovině), se nazývají **komplanární**.
- (5) **Rovnost vektorů** \vec{a}, \vec{b} zapisujeme $\vec{a} = \vec{b}$, a nastává tehdy, když tyto vektory
 - a) mají stejnou délku (velikost, normu, modul), tj. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.
 - b) jsou souhlasně rovnoběžné⁶⁾ (souhlasně kolinéární) neboli stejného směru, tj. $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.
- (6) **ÚMLUVA**. Operace s vázanými i klouzavými vektory spočívají na axiómech vektorového prostoru (Viz 1.2.5), tj. na pravidlech s volnými vektory. Proto, pokud to výslovně neuvedeme, budeme v celém dalším výkladu u geometrických úvah slovem **VEKTOR** (bez přívlastku) mínit **VOLNÝ VEKTOR**, (který je určen, jak víme, velikostí a směrem).

1.2.3 Poznámka k fyzikální a geometrické interpretaci Fyzikálně můžeme vázaný vektor označený jako (A, \vec{F}) nebo $\vec{F}(A)$ interpretovat jako sílu, kde bod A je pak **působíště síly**, viz obr. 1.2. Vektor (volný) \vec{u} můžeme geometricky také interpretovat jako **vektor posunutí**. Posuneme-li bod A o vektor \vec{u} , získáme

²⁾ Uvažujeme nenulovou úsečku AB, tj. $A \neq B$, a nenulový vektor \vec{u} . **Nulový vektor** je množina všech **nulových orientovaných úseček**, tj. těch, jež mají též počáteční a koncový bod. Jeho délka (délka nulové úsečky) je nula.

³⁾ Počáteční bod A síly \vec{F} se nazývá působíště síly.

⁴⁾ V našem pojetí značí \overrightarrow{AB} právě jednu orientovanou úsečku (vázaný vektor).

⁵⁾ Na rozdíl od starších učebnic.

⁶⁾ O tomto termínu se znovu zmíníme v souvislosti se skalárním součinem vektorů v euklidovském prostoru, viz 1.3.3 na str. 20.

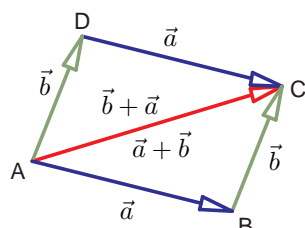
bod B , což zapíšeme

$$B = A + \vec{u} \quad \text{neboli} \quad \vec{u} = B - A$$

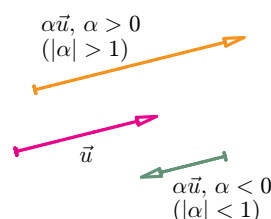
a říkáme, že jsme k bodu A přičetli vektor \vec{u} . Na posunutí bodů bodového prostoru \mathbb{E} demonstrujeme názorně, že volný vektor \vec{u} reprezentuje posunutí všech bodů z \mathbb{E} , a jde proto o **translaci prostoru** \mathbb{E} , kdežto vázaný vektor $(A, \vec{u}) = B - A = \vec{u}(A)$ představuje **translaci** jediného **bodu** A do bodu B .

Na středních školách se ve fyzice a geometrii v mnoha situacích pracuje s vektory jako s veličinami, které znázorňujeme orientovanými úsečkami (určitých délek). Není obtížné ukázat, že tyto „geometrické vektory“ jsou jen zvláštním případem aritmetických vektorů n -členných, kde $n = 3$, jde-li o vektory v trojrozměrném prostoru, popř. $n = 2$, jde-li o vektory v rovině. V několika následujících odstavcích přeneseme známá pravidla pro počítání s geometrickými (neboli volnými) vektory do axiomů tzv. vektorových prostorů.

1.2.4 Poznámka Z fyziky, geometrie a algebry víme, že vektory lze sčítat a násobit čísly z **množiny (tělesa)** \mathbb{R} **všech reálných čísel**, které pro odlišnost nazýváme **skaláry**. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\alpha\vec{u}$ se nazývá **α -násobek vektoru** \vec{u} . Vlastnosti těchto operací znázorňují obrázky 1.4 a 1.5.



Obr. 1.4



Obr. 1.5

Obrázek 1.4 je rovnoběžníkové pravidlo, známé už svému objeviteli – Simonu Stevinovi, pro určení součtu dvou vektorů. Např. součet \overrightarrow{AC} dvou vázaných vektorů \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{AD} zapíšeme

$$(A, \vec{a}) + (A, \vec{b}) = (A, \vec{a} + \vec{b}).$$

Zároveň je z tohoto pravidla zřejmé, že pro sčítání dvou vektorů platí **zákon komutativní**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

neboli

$$(A, \vec{a}) + (A, \vec{b}) = (A, \vec{b}) + (A, \vec{a}).$$

Zhruba řečeno, každá množina prvků uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a jejich násobení skalárem tvoří **lineární prostor** též **lineál** \mathbb{L} , který se v našem případě, kdy jeho prvky jsou vektory, často nazývá **vektorový prostor**, označíme jej \mathbb{V} . V takovém prostoru platí osm axiomů lineárního prostoru nad tělesem \mathbb{R} všech reálných čísel. Nyní si je uvedeme.

1.2.5 Axiomatická definice vektorového prostoru \mathbb{V} a lineárního prostoru \mathbb{L} [U axiomů lineárního prostoru \mathbb{L} , stručněji lineálu, jen vynecháváme, je-li to vhodné, vektorovou symboliku a místo o vektorech, je-li to vhodné, hovoříme o prvcích. Výchozí množinu prvků pak místo V označíme L].

Mějme neprázdnou množinu V prvků, které nazveme **vektory** a označíme je $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$, a necht T je označení pro číselné komutativní **těleso**, konkrétně uvažujme těleso **reálných čísel** \mathbb{R} (někdy bývá vhodné uvažovat těleso komplexních čísel \mathbb{C}). Prvky tělesa T , tj. zde reálná čísla, nazveme **skaláry**, označíme je α, β, γ , atd., T pak nazveme komutativní těleso skalárů, podrobněji se označuje $(T, +, \cdot)$, kde symboly v uvozovkách „+“, resp. „ \cdot “ slouží pro zápis operací sčítání, resp. násobení skalárů (přičemž tečku často vynecháváme) v tělese T .

Nechť jsou splněny následující podmínky:

I. Množina V tvoří komutativní aditivní grupu, kterou označíme $(V, +)$, tj. na V je definována zobrazením

$$f : V \times V \rightarrow V \quad : \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

operace nazývaná **sčítání vektorů**, která je opět označena symbolem $+$ (ze souvislosti bývá ihned zřejmé, o které z obou sčítání jde), pomocí níž je každým dvěma vektorům $\vec{u}, \vec{v} \in V$ jednoznačně přiřazen třetí vektor $\vec{w} \in V$ nazvaný **součet vektorů** \vec{u}, \vec{v} a označený $\vec{u} + \vec{v}$, přičemž platí tyto 4 **axiomy komutativní aditivní grupy**:

- | | | | | |
|-----|--|---|---|--|
| (1) | $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ | : | $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ | komutativnost |
| (2) | $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ | : | $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ | asociativnost |
| (3) | $\exists \vec{o} \in V \forall \vec{u} \in V$ | : | $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ | nulový vektor \vec{o} |
| (4) | $\forall \vec{u} \in V \exists (-\vec{u}) \in V$ | : | $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ | opačný vektor $(-\vec{u})$ k vektoru \vec{u}. |

II. Nechť dalším zobrazením

$$g : T \times V \rightarrow V \quad : \quad (\alpha, \vec{u}) \mapsto \alpha \cdot \vec{u} \text{ nebo stručněji } (\alpha, \vec{u}) \mapsto \alpha \vec{u}$$

je definována jistá *vnější* operace nazývaná **násobení vektoru** (reálným) **skalárem**, která je i zde označena symbolem násobící tečky „ \cdot “, pomocí které je každému skaláru $\alpha \in T$ a každému vektoru $\vec{u} \in V$ jednoznačně přiřazen vektor $\alpha \cdot \vec{u} \in V$ nebo stručněji $\alpha \vec{u} \in V$ nazvaný **skalární α -násobek vektoru \vec{u}** (ze souvislosti bývá i zde ihned patrné, kdy násobící tečka, pokud není vynechána, označuje násobení skalárů, a kdy označuje skalární násobky vektorů), přičemž platí

4 **axiómy násobení vektoru skalárem**:

- | | | | | |
|-----|---|---|--|---|
| (5) | $\forall \alpha, \beta \in T \forall \vec{u} \in V$ | : | $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$ | asociativnost (násobení skaláry) |
| (6) | $\forall \vec{u} \in V$ | : | $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ | absorbce jednotky (jedničky) |
| (7) | $\forall \alpha, \beta \in T \forall \vec{u} \in V$ | : | $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$ | distributivnost vzhledem ke sčítání skalárů |
| (8) | $\forall \alpha \in T \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ | : | $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$ | distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů. |

Pak množina V spolu s operacemi $+$, \cdot splňujícími systém uvedených osmi axiómů⁷⁾ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem**⁸⁾ T nebo **reálný**, popř. **komplexní** (je-li $T = \mathbb{C}$) **vektorový prostor**, a značíme jej $(V, +, \cdot)$ nebo stručněji \mathbb{V} . Samotná množina V je tzv. **nosná množina**, též **nosič vektorového prostoru** [popř. nosič L lineárního prostoru \mathbb{L}]. Neutrální prvek grupy $(V, +)$ se nazývá **nulový vektor \vec{o}** , ostatní vektory se nazývají **nenulové vektory** [Analogicky mluvíme o **lineárním prostoru nad tělesem T** , stručněji o **lineálu**, a označujeme jej $(L, +, \cdot)$ nebo \mathbb{L} , prvek nulový označujeme o , prvek opačný k prvku u označujeme $-u$ atd.].

1.2.6 Modely vektorových prostorů O *modelu*, též o *realizaci vektorového prostoru* mluvíme, když je zadán nosič V a obě operace, sčítání vektorů (prvků) i násobení vektorů skalárem, jsou definovány přímým předpisem. Z algebry je známo, že modelem vektorového prostoru je např.

- (1) \mathbb{R} , tj. množina (komutativní těleso) všech reálných čísel. Tedy $\mathbb{V} = \mathbb{R}$, přičemž sčítání vektorů z \mathbb{V} je sčítání reálných čísel, násobením vektoru z \mathbb{V} (reálným) skalárem je násobení reálných čísel. Nulovým vektorem je číslo nula, opačným vektorem k vektoru $u \in \mathbb{R}$ je číslo $v \in \mathbb{R}$ opačné k u , tedy $v = -u$;
- (2) \mathbb{R}^n , tj. množina $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$ všech uspořádaných n -tic prvků z množiny \mathbb{R} . Pro $n = 1$ ztotožňujeme

$\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$. Definujeme aditivní operaci

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, ((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) \mapsto (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$

a *vnější* operaci (kde $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (\alpha \cdot (u_1, \dots, u_n)) \mapsto (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).$$

Je tedy $(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$; $\alpha \cdot (u_1, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)$. Pak $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ je tzv. **reálný n -rozměrný aritmetický vektorový prostor** a má **dimenzi n** . Často se označuje jen \mathbb{R}^n . Jeho prvky se nazývají **n -členné aritmetické vektory** (nad tělesem \mathbb{R}). Jednu z nekonečně mnoha **bází**⁹⁾ tvoří vektory (zde řádkové)

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1). \quad (1.1)$$

Je to tzv. **standardní báze**¹⁰⁾, též **přirozená** nebo **kanonická báze**. V prostoru \mathbb{R}^n , nazývaném rovněž **reálný n -rozměrný aritmetický lineární prostor**, definujeme **standardní skalární součin** jako *vnitřní* operaci h takto

$$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, ((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) \mapsto u_1 v_1 + \dots + u_n v_n. \quad (1.2)$$

⁷⁾ Systém axiómů je bezesporný, úplný, ale i nezávislý.

⁸⁾ V algebře se studují i tzv. *obecné lineární prostory* nad libovolným, i nečíselným komutativním tělesem, kdy nosič L je obecná množina, tj. bez jakékoli specifikace a totéž platí o obou operacích. Pak v axiómu (6) nastává $\varepsilon \cdot u = u$, kde ε je *jednotkový prvek tělesa T* (tj. ε je nečíselný skalár). Pro číselná tělesa je ovšem $\varepsilon = 1$.

⁹⁾ Předpokládáme, že pojmy z lineární algebry jako *lineárně nezávislé vektory*, *báze*, *dimenze* apod., jsou čtenáři známy.

¹⁰⁾ V prostorech se (standardním) skalárním součinem se nazývá *ortonormální báze*.

Označíme-li pomocí defintorické rovnosti $:=$, resp. $=$: vektor \vec{u} , resp. \vec{v} takto

$$\vec{u} := (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) := \vec{v}, \quad (1.3)$$

pak skalární součin (definovaný zobrazením h) dvou vektorů \vec{u}, \vec{v} označujeme násobící tečkou \cdot , tedy $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (to u geometrických vektorů např. z trojrozměrného prostoru) nebo (\vec{u}, \vec{v}) (to při abstraktnějších úvahách), takže pak hodnotou **standardního skalárního součinu** vektorů je reálné číslo, pro něž platí

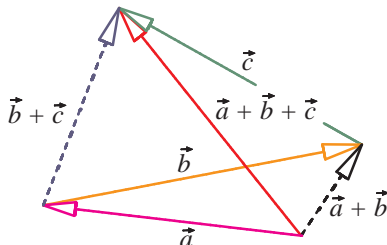
$$\vec{u} \cdot \vec{v} \equiv (\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{k=1}^n u_kv_k. \quad (1.4)$$

Vlastnosti (axiomy) skalárního součinu uvedeme níže.

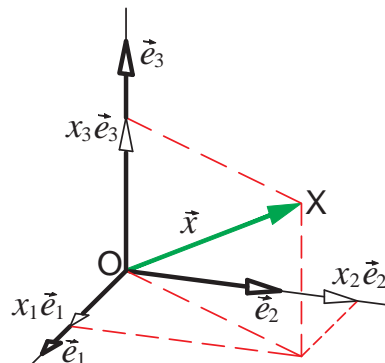
Poznamenejme, že **vektorový prostor \mathbb{V} se skalárním součinem** (reálný, popř. komplexní) se často také nazývá **euklidovský vektorový prostor**. Pokud bychom vyšli z názvu lineární prostor (lineál) \mathbb{L} , pak, je-li v něm rovněž zaveden skalární součin prvků $u, v \in \mathbb{L}$, označený nejčastěji (u, v) , je obvyklé takový lineál nazvat **unitární prostor** (reálný, popř. komplexní) nebo také **prehilbertovský prostor**. Před všechny čtyři posledně uvedené názvy prostorů bychom mohli vložit přívlástek **aritmický**. Zdůrazněme, že prostory, ve kterých je definován skalární součin, už mají velmi bohatou strukturu. Lze v nich zavést pojmy jako ortogonalita prvků, norma prvku apod. To umožňuje popsat a řešit složité úlohy z praxe;

- (3) $F(\mathbb{R}^n)$, tj. **lineární prostor reálných funkcí n proměnných** s definičním oborem \mathbb{R}^n (popř. nějakou podmnožinou množiny \mathbb{R}^n) a obrazem hodnot v \mathbb{R} . Tedy $\mathbb{L} = F(\mathbb{R}^n)$. Jde tedy o **unitární prostor** (nad \mathbb{R}), neboť skalární součin lze snadno definovat pomocí vícerozměrného integrálu.¹¹⁾ Přitom vektory jsou zde funkce, které sčítáme obvyklým způsobem. Skaláry jsou zde čísla z \mathbb{R} ;

1.2.7 Poznámka Po připomenutí některých abstraktních pojmů z lineární algebry ve dvou předchozích odstavcích navážeme nyní na geometrické úvahy z poznámky 1.2.4, kdy jsme ukázali, že rovnoběžníkové pravidlo je mj. geometrickým vyjádřením axiomu (1) o komutativnosti sčítání vektorů. Podobně axiom (2) o asociativnosti sčítání vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ilustruje obr. 1.6.



Obr. 1.6



Obr. 1.7

Nulový vektor $\vec{0}$ z axiomu (3) je vektor, jehož libovolné umístění má koncový bod totožný s počátečním, tj. $\vec{AA} = \vec{0}$. Pak vskutku $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \forall \vec{a} \in \mathbb{V}$. Nulový vektor $\vec{0}$ totiž představuje nulové posunutí (poznámka 1.2.3), tj. pro každý bod A z bodového prostoru \mathbb{E} je $A + \vec{0} = A$. Libovolný bod z \mathbb{E} tedy *nechápeme jako geometrický objekt*, ale jako umístění nulového vektoru $\vec{0}$, tj. volného vektoru nulové délky. Poznamenejme ještě, že **nulovému vektoru nepřičítáme žádný směr**. V algebře se snadno dokáže, že existuje jediný nulový, ale i opačný vektor. Konečně ověříme platnost axiomu (4) o existenci opačného vektoru k vektoru \vec{a} určenému umístěním \vec{AB} , budeme-li předpokládat, že opačný vektor $-\vec{a}$ bude určen umístěním \vec{BA} (obrázek je zbytečný, na úsečce AB nenulové délky si u vektorů $\vec{a} = B - A$ a $-\vec{a} = A - B$ počáteční a koncový bod jen vymění místo). Pak s využitím toho, že $A + \vec{0} = A$, dostáváme

$$A + (\vec{a} + (-\vec{a})) = (A + \vec{a}) + (-\vec{a}) = B + (-\vec{a}) = A = A + \vec{0}.$$

Z prvního a posledního výrazu tedy plyne platnost axiomu (4): $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Naše dosavadní úvahy jsme zejména v prvních třech odstavcích opírali o geometrickou názornost, např. když jsme pomocí uspořádaných dvojic bodů z intuitivně chápaného bodového prostoru \mathbb{E} definovali volné i vázané vektory. Pro čtenáře, jenž má zájem seznámit se s algebraickou strukturou prostoru obsahujícího

¹¹⁾Pro $n = 1$ a spojité funkce na intervalu $[a, b]$, viz prostor $C_2[a, b]$ z příkladu 2.3.14.

jak body, tak i zmíněné vektory, a rovněž poznat východiska, na nichž jsou založena známá pravidla pro počítání s nimi, např. rovnoběžníkové pravidlo, nyní uvedeme jednu důležitou definici. Jde o definici bodově vektorového neboli afinního prostoru, která využije axiomatickou definici vektorového prostoru \mathbb{V} , uvedenou v odstavci 1.2.5.

1.2.8 Definice bodově vektorového prostoru Necht neprázdná množina $\mathbb{E} \neq \emptyset$ je množina zcela libovolných prvků X, Y, Z, \dots , které nazveme **body**, \mathbb{E} pak nazveme **bodový prostor**. Mějme vektorový prostor \mathbb{V} nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} . Definujme zobrazení f kartézského součinu $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ do \mathbb{V} , tj.

$$f : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V},$$

nazývané **bodově vektorová operace** f , v níž je uspořádané dvojici bodů přiřazen vektor předpisem

$$\mathbb{E} \times \mathbb{E} \ni (X, Y) \mapsto f(X, Y) = \vec{u} \in \mathbb{V}, \text{ pro každé } X, Y \in \mathbb{E},$$

a necht splňuje dva axiomy

(1) Pro každý bod $X \in \mathbb{E}$ a každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{V}$ existuje jediný bod $Y \in \mathbb{E}$ tak, že

$$\vec{u} = f(X, Y). \text{ Píšeme též } \vec{u} = \overrightarrow{XY} \text{ nebo } \vec{u} = Y - X \text{ nebo } Y = X + \vec{u}.$$

(2) Pro každé tři body $X, Y, Z \in \mathbb{E}$ platí $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Pak uspořádanou trojici $(\mathbb{E}, \mathbb{V}, f)$ nebo též $(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +)$ [kde znaménko $+$ označuje onu bodově vektorovou operaci sčítání bodu a vektoru z výše uvedeného zápisu $Y = X + \vec{u}$] označujeme $\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +)$ nebo $\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V})$ nebo jen \mathbb{A} , a nazveme **reálný afinní prostor s nosičem \mathbb{E} se zaměřením \mathbb{V}** , označovaným též $\mathbb{V}(\mathbb{E})$, nebo tuto trojici nazveme **reálný bodově vektorový prostor**. **Dimenzí n afinního prostoru \mathbb{A}** rozumíme dimenzi jeho zaměření, tj.

$$\dim \mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +) = \dim \mathbb{V}.$$

Prvky prostoru \mathbb{V} nazveme **volné vektory** a prvky množiny $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ **vázané vektory**, kde v axiomu (1) je X **počáteční bod** a Y **koncový bod** (vázaného) vektoru \overrightarrow{XY} , jenž je **umístěním**, též **reprezentantem** (volného) vektoru $\vec{u} \in \mathbb{V}$. Afinní prostor dimenze 1, resp. 2 se nazývá **afinní přímka**, resp. **afinní rovina**.

K ZAPAMATOVÁNÍ Afinní prostor $\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +)$ je stručně řečeno množina bodů \mathbb{E} , do které je „inkodována“ (přenesena) struktura vektorového prostoru \mathbb{V} .

Slovo afinita = příbuznost, vzájemný vztah. Afinní prostor tedy obsahuje a rozlišuje body i vektory, které jsou ve vzájemném vztahu prostřednictvím bodově vektorové operace f , která splňuje dva axiomy (1),(2). Zároveň, je-li trojrozměrný, je tento prostor ve vzájemném vztahu s fyzikálním prostorem, v němž žijeme, jak jsme se zmínili v úvodu 1.1. K tomu, aby se afinní prostor ještě více přiblížil našim představám o vektorech, kdy chceme určovat i úhel nenulových vektorů, musíme v něm, tj. v jeho zaměření \mathbb{V} , navíc zavést **skalární součin** vektorů. Dostaneme tak speciální případ afinního prostoru, **prostor euklidovský**.

1.2.9 Poznámka a dva příklady afinního prostoru Reálné afinní a euklidovské prostory jsou východiskem pro vybudování matematického aparátu diferenciálního a integrálního počtu. Z úvodu této kapitoly víme, že trojrozměrný orientovaný euklidovský (bodově vektorový) prostor jako speciální afinní prostor se zavedeným skalárním součinem je matematickým modelem fyzikálního prostoru, v němž žijeme. Umožňují to např. takové vlastnosti afinních, popř. euklidovských prostorů, které jsou afinně, resp. euklidovsky invariantní, tj. nezávisí na volbě afinní, resp. ortonormální soustavy souřadnic nebo na transformaci těchto souřadnic. V lineárním programování se využívá vlastností konvexních množin v těchto prostorech, v matematické statistice v teorii korelace se uplatňují nekonečně rozměrné euklidovské prostory (přesněji tzv. prostory Hilbertovy).

1) Množina \mathbb{A}_n všech řešení $y(x)$ tzv. **nehomogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu**

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

kde funkce $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), f(x)$ jsou spojité na otevřeném intervalu J , tvoří afinní prostor, jehož zaměřením je n -rozměrný vektorový prostor V_n všech řešení příslušné homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

V případě \mathbb{A}_n i V_n tedy jde o prostory funkcí neboli **funkcionální prostory**, kde jak body, tak i vektory jsou funkce. Uvedené typy rovnic budou probány v následujícím semestru.

- 2) Elementárním příkladem afinního prostoru, který je vhodný ke studiu nikoli kvantitativních, nýbrž kvalitativních zákonitostí, jsou **termodynamické diagramy**, kdy na jednu osu nanášíme např. tlak, na druhou objem, na třetí teplotu apod. V tomto prostoru nemá smysl uvažovat úhel dvou směrů, např. dvou os, a pouze kvůli zjednodušení je zvykem, že v termodynamických diagramech volíme osy vzájemně kolmé.

1.2.10 Poznámka Označme \mathbb{R}^n **reálný n -rozměrný aritmetický vektorový prostor** (tj. nad tělesem reálných čísel \mathbb{R} , tedy jeho nosnou množinou je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel označovaná rovněž \mathbb{R}^n). Reálný n -rozměrný **aritmetický afinní prostor** \mathbb{A}_n můžeme definovat uspořádanou trojicí pomocí definatorické rovnosti := takto

$$\mathbb{A}_n := (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +),$$

kde prvky první složky (nosiče) \mathbb{R}^n nazýváme **body** a značíme je např. $A = [a_1, \dots, a_n]$, prvky druhé složky (zaměření), tj. téhož prostoru, však nazýváme **vektory** a značíme je tučně nebo opět např. $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

1.2.11 ÚMLUVA Ve zbývajících částech kapitoly budeme pro stručnost hovořit pouze o vektorech a čtenář si snadno sám převede příslušná tvrzení do terminologie volných, resp. vázaných vektorů. Stejně tak budeme dále většinou předpokládat, že zaměření našeho afinního prostoru má dimenzi (rozměr) rovnu třem, tj.

$$\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{V} = 3. \quad (1.5)$$

1.2.12 Poznámka Podle (1.5) má libovolná báze vektorového prostoru \mathbb{V} tři prvky. Nechť vektory

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \quad (1.6)$$

tvorí bázi zaměření \mathbb{V} . Jestliže zvolíme libovolný bod O afinního prostoru \mathbb{A} , pak každý bod $X \in \mathbb{A}$

$$X = O + \vec{x}, \quad (1.7)$$

kde $\vec{x} \in \mathbb{V}$, lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů této pevně zvolené (uspořádané) báze

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3. \quad (1.8)$$

1.2.13 Poznámka V mechanice kontinua se hned od prvního zápisu tzv. lineárních souřadnic bodu nebo vektoru (vzápětí je budeme definovat) vzhledem k **výchozí bázi** (1.6) píšou indexy jejich souřadnic zásadně nahoře, tj. x^i , a nazývají se **kontravariantní souřadnice**. Indexy dole mají tzv. **kovariantní souřadnice** x_i . Poznamenejme jen, že **v každé kartézské soustavě souřadnic se kontravariantní a kovariantní souřadnice sobě rovnají, tedy je tam $x^i = x_i, i = 1, 2, 3$** . Protože čtenář je zvyklý psát indexy souřadnic jako dolní (horní indexy připomínají mocniny), přepíšeme vztah (1.8) a další podobné vztahy na dolní indexy, tj.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (1.9)$$

Vztah (1.9) je geometricky vystižen na obr. 1.7.

1.2.14 Definice Na základě poznámek 1.2.12, 1.2.13 utvořený systém $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nazveme **lineární soustavou souřadnic** (též **afinní soustavou souřadnic**) nebo také **soustavou přímočarých souřadnic** (na rozdíl od křivočarých souřadnic, jakými jsou např. cylindrické nebo sférické) **na afinním prostoru \mathbb{A} se souřadnicovými vektory $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, a čísla z uspořádané trojice čísel x_1, x_2, x_3 v lineární kombinaci (1.9), tj. souřadnice tohoto vektoru \vec{x} vzhledem k bázi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, nazveme (lineární) **souřadnice (první, druhá, třetí) bodu $X \in \mathbb{A}$ v dané soustavě souřadnic**. Píšeme**

$$X = [x_1, x_2, x_3], \text{ resp. } X[x_1, x_2, x_3]. \quad (1.10)$$

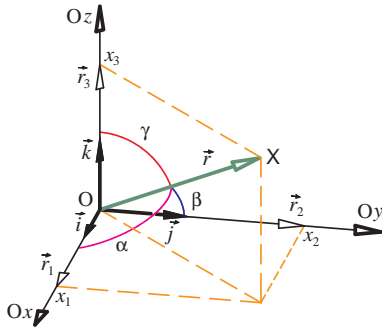
Bod O nazveme **počátek soustavy souřadnic**. Vektor $\overrightarrow{OX} \in \mathbb{V}$ se nazývá **radiusvektor, polohový vektor** nebo také **přívodič bodu X** (vzhledem k počátku O) a označujeme jej \vec{r}_X nebo jen \vec{r} , resp. \vec{x} a bod X pak označujeme někdy $X[\vec{r}]$. Píšeme

$$\vec{r}_X = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.11)$$

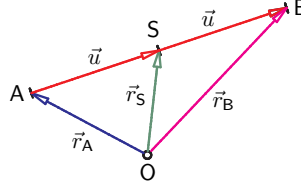
(Kromě obr. 1.7 je situace znázorněna speciálně při tzv. **ortonormální bázi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$** , tj. v tzv. **kartézské soustavě souřadnic**, též na obr. 1.8.)

1.2.15 Poznámka Rádusvektor je vlastně vázaný vektor, tj. (Viz 1.2.8) $\vec{OX} = (O, \vec{x}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$. Dále je nutné si uvědomit, že souřadnice bodu $X[x_1, x_2, x_3]$ závisí jak na volbě počátku O , tak na volbě báze ze zaměření \mathbb{V} .

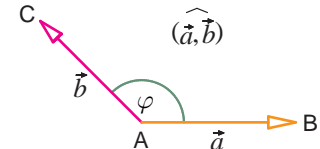
1.2.16 Příklad Mějme úsečku AB . Označme \vec{r}_A, \vec{r}_B rádusvektory bodů A, B . Dokažme, že rádusvektor \vec{r}_S středu S úsečky AB je $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$. Podle obr. 1.9 platí $\vec{r}_A + \vec{u} = \vec{r}_S$, $\vec{r}_S + \vec{u} = \vec{r}_B$. Pak $\vec{u} = \vec{r}_S - \vec{r}_A = \vec{r}_B - \vec{r}_S \Rightarrow 2\vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{r}_B$ a odtud plyne vzorec.



Obr. 1.8



Obr. 1.9



Obr. 1.10

1.2.17 Poznámka Uvažujme v systému přímočarých souřadnic $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Podobně jako v předchozím příkladě lze pomocí rádusvektorů \vec{r}_A, \vec{r}_B pro souřadnice vektoru \vec{u} , který je určen umístěním \vec{AB} , odvodit, že $\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

1.3 Skalární součin. Euklidovský prostor

1.3.1 Definice *Skalární součin* je operace realizující zobrazení kartézského součinu $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ vektorového prostoru \mathbb{V} do množiny reálných čísel \mathbb{R} , které každé dvojici vektorů $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ přiřadí skalár, jenž označujeme

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{nebo} \quad (\vec{a}, \vec{b})$$

vyhovující těmto vlastnostem (axiómům)

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V}$, přičemž $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$, kde \vec{o} je nulový vektor z \mathbb{V} **pozitivní definitnost**
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ **komutativní zákon**
- (3) $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ **asociativní zákon**
- (4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}$. **distributivní zákon**

Reálný afinní prostor $\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +, \cdot)$ z 1.2.8 s nosičem (bodovým prostorem) \mathbb{E} , na jehož zaměření \mathbb{V} je zadán skalární součin, se nazývá (reálný) **Euklidův prostor**¹²⁾ nebo (reálný) **euklidovský prostor**, v případě $\dim \mathbb{V} = n = 3$ se označuje \mathbb{E}_3 , méně často \mathbb{E}^3 , obecně \mathbb{E}_n či \mathcal{E}_n .

1.3.2 Poznámka Podotkněme, že axióm (1) lze psát stručněji jako $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \quad \forall \vec{a} \neq \vec{o}$, a z něj pak už odvodit, že $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$.

Návod: Pozorně si dosadte do axiómu (4).

1.3.3 Poznámka Jsou-li $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ dva geometrické nenulové vektory, pak **úhlem** (a často i jeho velikostí, nehrozí-li nedorozumění) těchto dvou **vektorů** označovaným (\vec{a}, \vec{b}) , rozumíme **konvexní** úhel φ (tedy $\varphi \in [0, \pi]$) orientovaných úseček, které jsou umístěny do společného bodu, viz obr. 1.10. Připomeneme čtenáři známou geometrickou definici skalárního součinu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi, \quad (1.12)$$

kde φ je úhel sevřený vektory \vec{a}, \vec{b} a $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|$ jsou jejich délky. Tento skalární součin vyhovuje, jak se můžeme snadno přesvědčit, všem čtyřem axiómům z 1.3.1 a je v geometrickém vektorovém prostoru definován pomocí

¹²⁾Anglicky: *Euclidean space*. Řekové jméno Eukleides vysloví „Euklides“.

vektorů a jejich úhlů.

V prostorech s axiomaticky definovaným skalárním součinem je tomu naopak, kdy délka i úhel vektorů se definují právě pomocí skalárního součinu.

Dále z (1.12) plyne, že dva nenulové **vektory** \vec{a}, \vec{b} jsou k sobě **kolmé** neboli ortogonální, což zapíšeme $\vec{a} \perp \vec{b}$ právě tehdy, když

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ jiným zápisem: } (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad (1.13)$$

a také to, že nulový vektor $\vec{0}$ je kolmý ke každému vektoru, protože

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{V}.$$

Krajní hodnoty úhlu φ znamenají **rovnoběžnost vektorů**. Při $\varphi = 0$ říkáme, že jde o **vektory souhlasně rovnoběžné** či **souhlasně kolinéární** vektory, a píšeme $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, při $\varphi = \pi$, že jde o **vektory nesouhlasně rovnoběžné**, tj. **nesouhlasně kolinéární vektory**, což zapíšeme $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. Platí tedy ekvivalence

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \text{ resp. } \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \iff \vec{b} = \alpha \vec{a} \text{ pro } \alpha > 0, \text{ resp. pro } \alpha < 0.$$

1.4 Skalární součin v kartézských souřadnicích

1.4.1 Poznámka Zvolme soustavu souřadnic $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tak, že vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tvoří **ortonormální bázi**¹³⁾ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, to znamená, že jsou navzájem kolmé a jejich norma je rovna 1, tj. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, viz obr. 1.8. Takovou bázi nazýváme **ortonormální bázi**. Souřadnice bodu X v této soustavě pak nazýváme **kartézské souřadnice**¹⁴⁾ bodu X a podobně u souřadnic vektoru. Orientované přímky Ox, Oy, Oz určené počátkem soustavy souřadnic O a směrem vektorů ortonormální báze v pořadí $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se nazývají **osy kartézské soustavy souřadnic**, kterou pak označujeme $Oxyz$. Tyto (orientované) souřadnicové osy někdy stručně označujeme jen x, y, z , zejména v obrázcích, ale i ve vzorcích (Viz vzorce (1.22)).

1.4.2 Poznámka Pro skalární součiny souřadnicových vektorů ortonormální báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, kterým se též říká **jednotkové vektory ve směrech kartézských souřadnicových os** platí

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0, \quad (1.14)$$

$$\text{kde } \vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (1.15)$$

1.4.3 Věta Nechtě $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ jsou **vektory** \vec{a}, \vec{b} s **kartézskými souřadnicemi**. Pak jejich skalární součin je **standardní skalární součin**, neboť platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i. \quad \star \quad (1.16)$$

Důkaz: využije vztahy (1.14) a vlastnosti skalárního součinu, takže

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad \clubsuit$$

1.4.4 Dokažte, že při zachování označení z poznámky 1.3.3 platí

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2, \text{ a tedy } \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad (1.17)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (1.18)$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \equiv \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1.19)$$

1.4.5 Věta Ke každému nenulovému vektoru \vec{a} existuje **jednotkový vektor** \vec{a}° , který je s ním **souhlasně rovnoběžný**¹⁵⁾

$$\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \quad \star \quad (1.20)$$

(Bývá též označován \vec{e}_a)

¹³⁾místo \vec{i}, \vec{j} se také označuje \vec{e}_1, \vec{e}_2

¹⁴⁾Název „kartézský“ vznikl z latinského přepisu „Cartesius“ z příjmení slavného francouzského matematika a filozofa, kterým byl René Descartes (1596-1650) [čti: *dekárt*]. Je uváděno, že se na straně katolické ligy účastnil bitvy na Bílé hoře.

¹⁵⁾viz 1.3.3 a platí

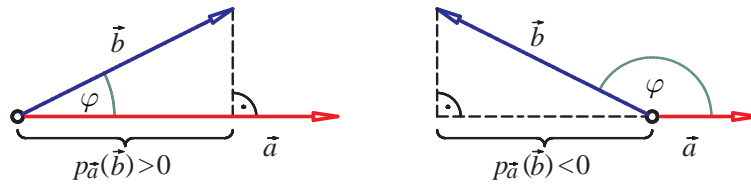
1.5 Pravoúhlý průmět vektoru

1.5.1 Definice Mějme dva vektory $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$, $\vec{a} \neq \vec{o}$. Pak skalár označený jako $p_{\vec{a}}(\vec{b})$ nebo b_a se nazývá **pravoúhlý průmět vektoru \vec{b}** (též kolmý průmět) do vektoru \vec{a} , a je definován skalárním součinem

$$p_{\vec{a}}(\vec{b}) := \vec{b} \cdot \vec{a}^\circ = \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}), \quad (1.21)$$

kde \vec{a}° je jednotkový vektor souhlasně rovnoběžný s \vec{a} (tj. $\vec{a}^\circ = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$). Říkáme též, že \vec{a}° je ve směru \vec{a} .

1.5.2 Poznámka Zdůrazněme, že číslo $p_{\vec{a}}(\vec{b})$ může být i záporné, jak je zřejmé z obr. 1.11. Pojem **pravoúhlý průmět patří k jednomu z nejdůležitějších ve vektorovém počtu**. Jeho účinnost prokážeme v závěru této kapitoly v příkladu k určení vzdálenosti mimoběžek.



Obr. 1.11

1.5.3 Poznámka Vektory $\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}, \vec{r}_2 = x_2 \vec{j}, \vec{r}_3 = x_3 \vec{k}$ se nazývají **pravoúhlé složky**¹⁶⁾ nebo **složkové vektory** rádiusvektoru \vec{r} , kde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

1.6 Směrové úhly a směrové kosiny

1.6.1 Definice Úhly, které v kartézské souřadnicové soustavě $\{\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ svírá nenulový vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ s vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ neboli s (orientovanými) osami po řadě x, y, z , jež jsou týchž směrů, označíme α, β, γ , nazveme **směrové úhly vektoru \vec{a}** a jejich kosiny **směrové kosiny vektoru \vec{a}** . (Ke znázornění situace lze využít obr. 1.8, jen místo vektoru $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ uvažujeme vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$).

1.6.2 Poznámka Směrové kosiny můžeme určit např. ze vztahu (1.19), když za \vec{b} postupně volíme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Pak

$$\cos \alpha := \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) \equiv \cos(\widehat{\vec{a}, x}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\|\vec{a}\| \|\vec{i}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \beta = \cos(\widehat{\vec{a}, y}) = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \gamma = \cos(\widehat{\vec{a}, z}) = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \quad (1.22)$$

a po umocnění na druhou a sečtení těchto rovnic dostaneme vztah

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (1.23)$$

z něhož vyplývá, že jednotkový vektor \vec{a}° ve směru \vec{a} lze mimo vztahu (1.20) také vyjádřit ve tvaru

$$\vec{a}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (1.24)$$

Připomeňme, že velikosti směrových úhlů α, β, γ leží v intervalu $[0, \pi]$, tj. jde o **konvexní** úhly.

1.7 Einsteinova součtová konvence

1.7.1 ÚMLUVA - ESK (A. Einstein (1879 - 1955) ji z důvodu zestručnění zápisu sumace zavedl do matematiky v roce 1916 v jedné své práci z obecné teorie relativity.) Ve zbývající části 1. kapitoly, kvůli zjednodušení zápisu, nebudeme sumaci označovat znakem $\sum_{i=1}^3$, ale budeme ji vynechávat, tj. jen si tuto sumaci (sčítání) představíme provedenou podle každého indexu, horního či dolního, který se vyskytuje v jednom členu dvakrát a nazývá se **sčítací index**, viz další ukázky.

¹⁶⁾nezaměňovat se složkami (souřadnicemi) vektoru

1.7.2 Poznámka ESK se nejvíce využívá v mechanice kontinua v tenzorovém počtu. Podle 1.2.13 můžeme vektor \vec{x} z (1.8) v 1.2.12 zapsaný v kontravariantních souřadnicích (tedy mívá souřadnice indexovány nahore) při použití ESK vyjádřit takto

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (1.25)$$

a skalární součin (1.16) pak stručně ve tvaru

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \cdot b_i .$$

Dále je $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $b_i b_i = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$.

Nezáleží na tom, jakým písmenem označíme sčítací index, tj.

$$a_i b_i = a_\gamma b_\gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Následující výraz můžeme na konci zestručnit takto

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = a_{ij} x_j ,$$

zatímco ve výrazu $a_{lm} x_n$ nejde o žádné sčítání, protože se v něm žádný index nevyskytuje dvakrát.

Sčítat můžeme i přes více dvojic sčítacích indexů, např.

$$a_{ij} a^i b^j =$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} a^i b^j = a_{11} a^1 b^1 + a_{12} a^1 b^2 + a_{13} a^1 b^3 + a_{21} a^2 b^1 + a_{22} a^2 b^2 + a_{23} a^2 b^3 + a_{31} a^3 b^1 + a_{32} a^3 b^2 + a_{33} a^3 b^3 .$$

1.8 Kroneckerovo delta

neboli *Kroneckerův symbol* je dvouhodnotová funkce δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j, \end{cases} \quad (1.26)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Čísla δ_{ij} z (1.25) tvoří prvky *jednotkové matice I* řádu 3, lze tedy psát

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.27)$$

1.9 Transformace souřadnic vektoru a bodu. Matice přechodu

1.9.1 Poznámka Přestože další úvahy v tomto článku se týkají tzv. kontravariantních souřadnic, my je budeme opět indexovat dole.

Buď $\vec{a} \in \mathbb{V}$ libovolný vektor. Představme si \vec{a} v obr. 1.7 místo \vec{x} . Dále zvolme dvě různé obecně neortogonální báze vektorového prostoru \mathbb{V} . Původní starou bázi označme $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a novou bázi $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Pak platí podle ESK

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = a_i \vec{e}_i \quad (1.28)$$

a také

$$\vec{a} = a'_1 \vec{e}'_1 + a'_2 \vec{e}'_2 + a'_3 \vec{e}'_3 = a'_i \vec{e}'_i . \quad (1.29)$$

Tedy vektor \vec{a} má v bázi \mathcal{B} souřadnice a_i a v bázi \mathcal{B}' má souřadnice a'_i , $i = 1, 2, 3$ a my chceme zjistit, jak se změní jeho souřadnice při přechodu od báze \mathcal{B} k bázi \mathcal{B}' . Přitom každý vektor \vec{e}'_i nové báze lze vyjádřit pomocí vektorů původní báze takto

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{23} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= a_{31} \vec{e}_1 + a_{32} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j, \quad (1.30)$$

kde čísla $(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ tvoří matici \mathbf{A} řádu 3.

1.9.2 Definice Regulární matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ z (1.30) (tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$) se nazývá *matice přechodu* od (původní) báze \mathcal{B} k (nové) bázi \mathcal{B}' .

1.9.3 Věta o matici přechodu Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice přechodu od báze \mathcal{B} k bázi \mathcal{B}' , pak $\mathbf{A}^{-1} = (b_{ij})$ je matice přechodu od báze \mathcal{B}' k bázi \mathcal{B} . ★

Důkaz: Přejít od nové báze \mathcal{B}' ke staré bázi \mathcal{B} definujeme vztahem

$$\vec{e}_j = b_{jk}\vec{e}'_k, \quad (1.31)$$

kde relaci mezi maticemi $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ získáváme dosazením ze vztahu (1.31) do (1.30)

$$\vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j = a_{ij}b_{jk}\vec{e}'_k. \quad (1.32)$$

Protože na levé straně tohoto vztahu jsou vektory báze \mathcal{B}' , tj. i -tý vektor báze \mathcal{B}' je jednoznačně vyjádřen lineární kombinací vektorů báze \mathcal{B}' , vyplývají odtud dva ekvivalentní vztahy

$$\boxed{a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik} \Leftrightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{I}} \quad (1.33)$$

znamenaající, že skalární součin i -tého řádku matice \mathbf{A} s k -tým sloupcem matice \mathbf{B} dá buď 1, je-li $i = k$, nebo dá 0, je-li $i \neq k$. Odtud

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = (b_{ij}). \quad (1.34)$$

♣

1.9.4 Poznámka Vztahy (1.30) lze zapsat symbolicky

$$\boxed{\mathcal{B}' = \mathbf{AB} \Leftrightarrow \vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j} \quad (1.35)$$

a podle předešlé věty, tj. podle (1.34), pak podobně

$$\boxed{\mathcal{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathcal{B}' \Leftrightarrow \vec{e}_i = b_{ij}\vec{e}'_j}. \quad (1.36)$$

1.9.5 Vztah mezi souřadnicemi vektoru \vec{a} v bázích \mathcal{B} a \mathcal{B}' Platí

$$\vec{a} = a_j\vec{e}_j = a_jb_{jk}\vec{e}'_k = a'_k\vec{e}'_k,$$

a protože vyjádření \vec{a} v \mathcal{B}' je jednoznačné, musí být

$$a'_k = b_{jk}a_j.$$

Všimněme si, že se v této rovnici sčítá podle ESK na její pravé straně podle prvního indexu j v b_{jk} , tj. jde tam o inverzní matici \mathbf{A}^{-1} a ještě transponovanou, tedy

$$\boxed{(a'_k) = (\mathbf{A}^{-1})^T(a_j)}, \quad (1.37)$$

kde se dohodneme, že zápis např. (a_j) je zkrácením zápisu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Podobně je

$$\vec{a} = a'_i\vec{e}'_i \stackrel{(1.30)}{=} a'_ia_{ij}\vec{e}_j = a_j\vec{e}_j$$

a odtud

$$a_j = a_{ij}a'_i \Leftrightarrow \boxed{(a_j) = \mathbf{A}^T(a'_i)}. \quad (1.38)$$

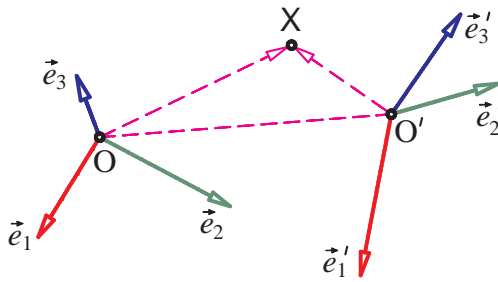
1.9.6 ZÁVĚR Při přechodu od báze \mathcal{B} k nové bázi \mathcal{B}' pomocí matice přechodu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ podle (1.35) se nové (čárkované) souřadnice vektoru \vec{a} v bázi \mathcal{B}' podle (1.37) obdrží ze starých souřadnic pomocí prvků matice \mathbf{A}^{-1} inverzní k matici přechodu \mathbf{A} , tj. podle (1.36) pomocí matice přechodu od \mathcal{B}' k \mathcal{B} . Dochází k jakémusi obrácení směru, k jisté "kontrazměně". Proto se tyto souřadnice nazývají **kontravariantní souřadnice vektoru** a my je ve shodě s poznámkou 1.2.13 indexujeme dole.

Už ve zmíněné poznámce jsme sdělili, že existují tzv. **kovariantní souřadnice vektoru**. Takové souřadnice žádné "kontrazměně" nepodléhají, neboť přechod mezi oběma bázemi \mathcal{B} i \mathcal{B}' má "stejný směr", přesněji, nové kovariantní souřadnice se ze starých získají přímo pomocí prvků matice \mathbf{A} , (tj. ve vztahu (1.37) by místo $(\mathbf{A}^{-1})^T$ figurovala matice \mathbf{A} nebo $(\mathbf{A})^T$). Kovariantní souřadnice se zadávají jako pravoúhlé průměty vektoru \vec{a} (definice 1.5.1) do souřadnicových vektorů, tj.

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.39)$$

Závěrem poznamenejme, že délka vektoru $\|\vec{a}\|$ je **invariantní veličina**, tj. veličina, která se nemění při libovolné změně přímočarých souřadnic definované matricí přechodu \mathbf{A} .

1.9.7 Transformace souřadnic bodu Tak, jak jsme vyšetřovali změnu souřadnic vektoru při změně vektorové báze ve vektorovém prostoru \mathbb{V} , lze podobně zkoumat změnu souřadnic bodů afinního euklidovského prostoru. Musíme však uvažovat také počátky dvou soustav souřadnic, viz obr. 1.12,



Obr. 1.12

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{O; \mathcal{B}\}, \quad (1.40)$$

$$\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} = \{O'; \mathcal{B}'\}, \quad (1.41)$$

neboť i ty se spolu s bázemi mění. Uvažujme bod X , který má v soustavě (1.40) souřadnice $[x_1, x_2, x_3]$, stručně $[x_i]$, a v soustavě (1.41) pak $[x'_1, x'_2, x'_3]$ neboli $[x'_i]$. Necht souřadnice počátku O soustavy (1.40) v soustavě (1.41) jsou $O = [b'_1, b'_2, b'_3]$, stručně $[b'_i]$, a obráceně, souřadnice počátku O' v soustavě (1.40) jsou $[b_1, b_2, b_3]$, tj. $[b_i]$. Využitím (1.36) si jako cvičení může čtenář odvodit analogicky, že

$$x'_k = b_{jk}x_j + b'_k, \quad (1.42)$$

což lze symbolicky zapsat

$$[x'_k] = (\mathbf{A}^{-1})^T[x_j] + [b'_k]. \quad (1.43)$$

Souřadnice bodu se transformují jako kontravariantní souřadnice vektoru (Viz (1.37)), přibudou navíc jen absolutní členy odpovídající posunutí počátku soustavy souřadnic z bodu O do bodu O' . Obráceně, pro transformaci souřadnic bodu při přechodu od soustavy (1.41) k (1.40) lze analogicky odvodit

$$x_j = a_{kj}x'_k + b_j \Leftrightarrow [x_j] = \mathbf{A}^T[x'_k] + [b_j]. \quad (1.44)$$

1.9.8 Věta o ortogonální matici přechodu Je-li matice přechodu \mathbf{A} ortogonální matice (tj. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), pak převádí ortogonální bázi $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ opět na ortogonální bázi $\mathcal{B}' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. ★

1.10 Orientace prostoru

1.10.1 Definice Je-li determinant matice přechodu \mathbf{A} mezi bázemi \mathcal{B} a \mathcal{B}' (obecně neortogonálními) kladný, říkáme, že báze jsou *souhlasně orientovány*, nebo že určují *stejnou orientaci* vektorového prostoru \mathbb{V} .

Je-li $\det \mathbf{A} < 0$, říkáme, že báze jsou *opačně orientovány* neboli určují *opačné orientace* \mathbb{V} .

1.10.2 Poznámka Je-li \mathbf{A}_1 matice přechodu od \mathcal{B} k \mathcal{B}' a \mathbf{A}_2 je matice přechodu od báze \mathcal{B}' k bázi \mathcal{B}'' , pak $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ je matice přechodu od \mathcal{B} k bázi \mathcal{B}'' , a protože $\det(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = \det \mathbf{A}_2 \det \mathbf{A}_1$, všechny báze ve \mathbb{V} se rozdělí do dvou tříd tak, že determinant matice přechodu mezi dvěma bázemi téže třídy, resp. různých tříd, je kladný (takové báze ve \mathbb{V} se nazývají *ekvivalentní*), resp. záporný.

Orientovat vektorový prostor \mathbb{V} pak znamená *zvolit* jednu z těchto dvou tříd a jejich *báze* prohlásit za *kladné* neboli *kladně orientované báze* a báze z druhé třídy za *záporné* neboli *záporně orientované*.

Afinní prostor $\mathbb{A}(\mathbb{E}, \mathbb{V}, +)$ je orientován, je-li orientováno jeho zaměření \mathbb{V} a lineární (neboli přímočará) soustava souřadnic $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ v afinním prostoru se pak nazývá kladně, resp. záporně orientovaná, je-li kladně, resp. záporně orientovaná příslušná souřadnicová báze $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

1.10.3 Ve fyzikálních aplikacích se většinou předpokládá, že **trojrozměrný euklidovský prostor \mathbb{E}_3 je už orientován**. Bereme-li jej za model prostoru, v němž žijeme, pak je zde přirozeným způsobem definována kladná orientace tak, že *kladná* neboli *pravotočivá kartézská soustava souřadnic* $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je ta, jejíž ortonormální vektory báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ jsou po řadě určeny (orientovaným) směrem upažené pravé ruky, předpažené levé ruky a směrem od paty k hlavě. Jde o tzv. *personifikovaný model*.

1.10.4 Pravidlo pravé ruky Směřují-li zahnuté prsty pravé ruky od vektoru \vec{i} k vektoru \vec{j} po kratším oblouku a vztýčený palec ukazuje směr vektoru \vec{k} , pak ortonormální báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se nazývá *kladně orientovaná* nebo *pravotočivě orientovaná báze* nebo *pravotočivá báze*.

1.10.5 Poznámka Např. báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ na obr. 1.8 zmíněném v definici 1.4.1 je kladně orientována, stejně jako odpovídající kartézská soustava souřadnic $Oxyz$.

1.11 Vektorový součin. Smíšený součin vektorů

1.11.1 Vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorů \vec{a}, \vec{b} je vektor \vec{w} definovaný vlastnostmi

(1)

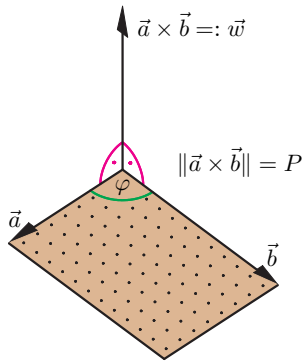
$$\|\vec{w}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi, \quad (1.45)$$

kde $\varphi := \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ je **úhel vektorů** \vec{a}, \vec{b} .

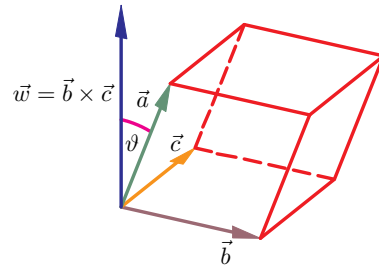
(2) jsou-li \vec{a}, \vec{b} **lineárně nezávislé vektory** (tj. $\varphi \neq 0, \pi$), je vektor \vec{w} kolmý k oběma vektorům, tj. $\vec{w} \cdot \vec{a} = 0, \vec{w} \cdot \vec{b} = 0$, viz obr. 1.13.

(3) vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ v tomto pořadí tvoří **kladně orientovanou bázi** ve \mathbb{V} , tj. **pravotočivou**, viz obr. 1.13.

1.11.2 Poznámka Podle (1.45) je norma (délka) vektorového součinu vektorů \vec{a}, \vec{b} , tj. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, číselně rovna obsahu P rovnoběžníka určeného vektory \vec{a}, \vec{b} , viz obr. 1.13. Toho lze využít v příkladech na výpočet obsahu příslušného trojúhelníka, který je samozřejmě poloviční.



Obr. 1.13



Obr. 1.14

Jsou-li vektory \vec{a}, \vec{b} **lineárně závislé**, tj. jejich úhel $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$, pak podle (1.45) je $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

1.11.3 Věta V kartézské soustavě souřadnic $\{\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lze vektorový součin vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ symbolicky vyjádřit vektorem ve tvaru determinantu¹⁷⁾

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

tj. (po úpravě) **vektorem v polokartézském tvaru**

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}. \star \quad (1.46)$$

1.11.4 Příklad Určeme jednotkový vektor \vec{n}° kolmý k vektorům $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ a tvořící s nimi levotočivě (tj. záporně) orientovanou bázi.

Řešení: Je zřejmé, že \vec{a}, \vec{b} jsou lineárně nezávislé vektory. Spojením vlastností (2),(3) z definice 1.11.1 máme

¹⁷⁾3. stupně, dále vyjádřeným např. pomocí Laplaceova rozvoje determinantu, zde konkrétně podle prvků 1. řádku. Připomeňme, že **Laplaceův rozvoj determinantu (aspoň 2. stupně) podle prvků určitého řádku (nebo sloupce)** znamená, že: **determinant je roven součtu součinů všech prvků vybraných z jednoho řádku (nebo sloupce) s jejich algebraickými doplňky.**

zaručeno, že uspořádaná trojice $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\}$ je levotočivě orientovanou bází. Tedy

$$\vec{n}^o = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{\|\vec{b} \times \vec{a}\|}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} = (-1, -1, 0),$$

$$\|\vec{b} \times \vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{n}^o = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, -1, 0).$$

1.11.5 Dokažte s využitím (1.46), že

a) $\vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}$

b) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

antikomutativní zákon

d) $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$

asociativní zákon

e) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

distributivní zákon

Dále buď pomocí (1.46) nebo (1.45) dokažte, že

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

1.11.6 **Věta – Lagrangeova identita** Platí

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d}). \star \quad (1.48)$$

1.11.7 **Důsledek Lagrangeovy identity** Platí speciálně

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2. \quad (1.49)$$

1.11.8 **Smíšený součin** tří vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v tomto pořadí) je číslo (někde také nazývané trivektor)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), \text{ které označujeme } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]. \quad (1.50)$$

1.11.9 **Věta** Jsou-li $\vec{a} = (a_i), \vec{b} = (b_i), \vec{c} = (c_i)$, pak

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \star \quad (1.51)$$

Důkaz: Použitím (1.46) postupně dostaneme

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{w} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



1.11.10 **Geometrická interpretace smíšeného součinu** spočívá v tom, že

a) absolutní hodnota smíšeného součinu tří vektorů $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ je rovna **objemu** V_1 **rovnoběžnostěnu**, viz obr. 1.14, jehož tři hrany vycházející z téhož vrcholu jsou určeny danými vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. To je zřejmé z toho, že

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \|\vec{a}\| \|\vec{b} \times \vec{c}\| |\cos \vartheta| =: V_1, \quad (1.52)$$

neboť $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$ se rovná obsahu základny rovnoběžnostěnu a $\|\vec{a}\| |\cos \vartheta|$ je výška rovnoběžnostěnu;

b) **objem** V_2 **čtyřstěnu** určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je šestinou objemu rovnoběžnostěnu, tedy

$$V_2 = \frac{1}{6} V_1 = \frac{1}{6} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]; \quad (1.53)$$

c) když smíšený součin je kladný, resp. záporný, pak **vektorová báze je pravotočivě, resp. levotočivě orientovaná**.

Účinnost a eleganci vektorového počtu budeme demonstrovat v závěru této kapitoly následujícím příkladem z oblasti metrických úloh v prostoru.

1.11.11 Příklad Odvodíme vzorec pro vzdálenost d mimoběžek p, q , kde přímka p je určena bodem $A = [3, -1, 0]$ a směrovým vektorem $\vec{p} = (-2, 3, -1)$, a podobně přímka $q \ni B = [-1, 3, 2]$ má směrový vektor $\vec{q} = (4, -3, 2)$, a pak vzdálenost vypočítejte.

Řešení: Situaci vystihuje obrázek 1.15. Vyjdeme z toho, že existuje jediná nejkratší příčka m mimoběžek p, q , tedy taková příčka mimoběžek (příčka mimoběžek je přímka spojující libovolné body X_1, X_2 , z nichž každý leží na jiné mimoběžce, např. zde necht' $X_1 \in p, X_2 \in q$), která obě protíná kolmo v bodech, které po řadě označíme $P \in p, Q \in q$. Vzdálenost bodů P, Q je vzdáleností mimoběžek p, q tj. $d = \|\vec{PQ}\|$. Nyní si stačí uvědomit, že $\|\vec{PQ}\|$ je dána velikostí pravoúhlého průmětu každého vektoru $\vec{X_1X_2}$, tj. také velikostí pravoúhlého průmětu $|p_{\vec{m}}(\vec{AB})|$ vektoru \vec{AB} do nejkratší příčky mimoběžek m , přesněji do vektoru \vec{PQ} . Jednotkový směrový vektor \vec{m}° přímky m je dán vektorovým součinem

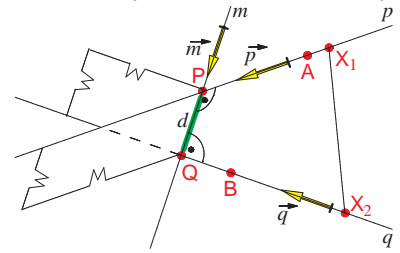
$$\vec{m}^\circ = \frac{\vec{m}}{\|\vec{m}\|} = \frac{\vec{p} \times \vec{q}}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}.$$

Dostáváme vzorec

$$d = |p_{\vec{m}}(\vec{AB})| = |\vec{AB} \cdot \vec{m}^\circ| = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})|}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|} = \frac{|[(B - A), \vec{p}, \vec{q}]|}{\|\vec{p} \times \vec{q}\|}. \quad (1.54)$$

Pak vzdálenost je

$$d = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{|-24|}{\|(3, 0, -6)\|} = \frac{24}{\sqrt{45}} = \frac{8}{5}\sqrt{5}.$$



Obr. 1.15

1.12 Cvičení

1 Určete v \mathbb{R} čísla x, y, z , má-li být $\vec{a} = \vec{b}$

a) $\vec{a} = (x, y, \sqrt{z+1}), \vec{b} = (x^3, -y^2, \sqrt{z^3+z^2+z+1}) \quad \{ \{x=0 \vee x=\pm 1, y=0 \vee y=-1, z=0 \vee z=-1\} \}$

b) $\vec{a} = (x+2)\vec{i} - y\vec{j}, \vec{b} = x^2\vec{i} - y\vec{j} \quad \{ \{x=-1 \vee x=2, y \text{ libovolné} \} \}$

c) $\vec{a} = (|x|, 0), \vec{b} = (-1, 0). \quad \{ \text{nemá řešení} \}$

2 Určete úhel φ vektorů \vec{a}, \vec{b}

a) $\vec{a} = (\sqrt{\frac{11}{20}}; 0,5; 0), \vec{b} = (0, -2, 1) \quad \{ \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2}{3}\pi \}$

b) $\vec{a} = (1, -3, 2), \vec{b} = (-2, 6, -4). \quad \{ \vec{b} = -2\vec{a} \Rightarrow \varphi = \pi, \text{ jsou nesouhlasně rovnoběžné} \}$

3 Určete směrové kosiny vektoru $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. $\{ \cos \gamma = \cos \beta = \cos \alpha = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{i}}) \equiv \cos(\widehat{\vec{u}, x}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \}$

4 Vypočítejte normu (délku) vektoru $\vec{c} = (\vec{i} - \vec{j}) \times (\vec{j} + \vec{k})$. $\{ \|\vec{c}\| = \sqrt{3} \}$

- 5** Určete nějaký vektor kolmý k vektoru $\vec{a} = (1, 2, 3)$.
 {nekonečně mnoho, dvě složky \vec{b} volíme, třetí vyčísleme z $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, např. volíme $b_1 = 0, b_2 = 1 \Rightarrow b_3 = -\frac{2}{3}$, tedy $\vec{c} = (0, 3, -2) \perp \vec{a}$ }
- 6** Určete číslo x tak, aby pravoúhlý průmět normálového vektoru $\vec{n} = x\vec{i} + 2\vec{j}$ do směru $\vec{s} = (1, 2, 2)$ byl roven -1 .
 { $x = -7$ }
- 7** Vypočítejte práci W síly $\vec{f} = 10\vec{k}$ při přemístění hmotného bodu X po dráze \overrightarrow{XY} , kde $X = [0, 1, 2]$, $Y = [2, 3, -3]$.¹⁸⁾
 { $W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{XY} = (0, 0, 10) \cdot (2, 2, -5) = -50$ (J)¹⁹⁾}
- 8** Zjistěte, zda vektor $\vec{a} \parallel \sigma$, tj. zda je rovnoběžný s rovinou $\sigma : 2x - y + 3 = 0$, kde $\vec{a} = (0, 5; 1; 1)$.
 {ano, neboť $\vec{a} \perp \vec{n}_\sigma$ }
- 9** Mějme $\triangle ABC$ a označme po řadě rádiusvektory vrcholů A, B, C jako $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Dokažte, že rádiusvektor \vec{r}_T těžiště T je

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

- 10** Buď A, B, C, D čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se navzájem půlí. Dokažte, že je pak rovnoběžníkem.
- 11** Pomocí obrázku objasněte geometrický význam vztahu

$$\vec{r}_X = \vec{a} + t\vec{b},$$

kde \vec{a}, \vec{b} jsou zadané vektory, $t \in \mathbb{R}$ je jistý parametr, \vec{r}_X je rádiusvektor bodu X.

- 12** Dokažte pomocí věty 1.11.9, že

$$\vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b}).$$

- 13** Odvoďte výsledek 1.2.17.
- 14** Dokažte tvrzení z poznámky 1.3.2 na základě axiómu o pozitivní definitnosti.
- 15** Dokažte výsledky z 1.4.4.
- 16** Odvoďte poslední výsledek vpravo ve vztahu (1.21) definice 1.5.1.
- 17** Dokažte výsledky z 1.11.5.

¹⁸⁾Síla je konstantní velikosti i směru, dráha není zakřivená. Není nutno užít křivkový integrál v silovém vektorovém poli.

¹⁹⁾J je odpovídající měřicí jednotka, např. joule, pokud zároveň souřadnice fyzikálních veličin \vec{f} , resp. \overrightarrow{XY} jsou v odvozených, resp. základních jednotkách Mezinárodní soustavy jednotek SI.

2 Poznámky k metrickým prostorům

2.1 Metrický prostor

2.1.1 Úvodní poznámka S pojmem okolí bodu, limita, otevřený a uzavřený interval se čtenář setkal již při studiu funkcí jedné reálné proměnné. Limitní přechod jako důležitá operace matematické analýzy tam byl snadný, neboť na reálné ose, která je geometrickým modelem jednorozměrného Euklidova prostoru \mathbb{E}_1 , je definována vzdálenost dvou bodů. Mnohé výsledky matematické analýzy, zvláště výsledky v numerické matematice při přibližném řešení náročných inženýrských aplikací, se opírají o možnost měřit vzdálenost prvků v množinách. Geometrická struktura těchto množin – prostorů přitom může být v závislosti na objektu zájmu inženýra velmi pestrá.

Zobecněním našich představ o reálných číslech jako o množině (algebraickém tělese), v níž je zavedena vzdálenost dvou prvků, přicházíme k pojmu **metrický prostor**, který je jedním z ústředních pojmů matematické analýzy. Tento prostor si přiblížíme na příkladech. Dalším jeho zobecněním bychom dospěli k tzv. **topologickým prostorům**. **Topologie** je matematická disciplína studující tzv. **topologické vlastnosti** matematických objektů, tj. vlastnosti, které jsou invariantní (neměnné) vzhledem k libovolnému *homeomorfnímu (topologickému) zobrazení* (str. 71). Mezi **topologické pojmy** patří otevřená nebo uzavřená množina, hranice množiny, křivka, plocha, také pojem spojitost zobrazení atd.

Ukazuje se, že při studiu funkcí více proměnných je důležité pochopit geometrii klasických euklidovských n -rozměrných prostorů \mathbb{E}_n . Východiskem k nim je **n -rozměrný aritmetický vektorový prostor \mathbb{R}^n** , se kterým se čtenář seznámil v lineární algebře. Tam byla pozornost zaměřena na jeho algebraickou a geometrickou strukturu. My se v dalším zaměříme především na topologickou strukturu prostorů \mathbb{E}_n , které jsou velmi speciálním konečnědimenzionálním případem metrických prostorů, a tedy také topologických prostorů. Bude dobře, když si čtenář souvislosti mezi uvedenými prostory uvědomí!

2.1.2 Definice Nechť M je množina. Zobrazení d kartézské mocniny této množiny do množiny všech reálných čísel \mathbb{R} , tj. $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, splňující pro libovolné prvky $x, y, z \in M$ tři podmínky (axiomy)

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{axióm totožnosti}$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{axióm symetrie}$$

$$(d3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \text{trojúhelníková nerovnost}$$

se nazývá **metrika** (vzdálenost, odchylka) d na množině M nebo také **v metrickém prostoru**¹⁾, který pak označujeme uspořádanou dvojicí (M, d) nebo pouze M (v případě, kdy je zřejmé, o kterou metriku se jedná). Prvkům z M pak říkáme **body** metrického prostoru. M se nazývá **nosná množina** daného prostoru.

2.1.3 Příklad Dokažme, že vzdálenost d je nezáporná (reálná) funkce, tedy že má očekávanou vlastnost

$$(d1*) \quad d(x, y) \geq 0, \text{ přičemž } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Platí totiž

$$d(x, y) \stackrel{(d2)}{=} \frac{1}{2} [d(x, y) + d(y, x)] \stackrel{(d3)}{\underset{(z=x)}{\geq}} \frac{1}{2} d(x, x) = 0$$

a podle (d1) je zřejmé, že $d(x, y) > 0$ právě tehdy, když $x \neq y$.

Poznamenejme, že ona očekávaná vlastnost (d1*) se velmi často formuluje jako výchozí *axióm pozitivní definitnosti*, a to místo axiomu (d1), protože axiom (d1*) je obsažnější, i když jsme právě ukázali jeho částečnou závislost, tj. že jeho část lze odvodit ze soustavy jednodušších axiomů (d1),(d2),(d3) námi vybraných. Tedy naše *soustava axiomů* je **bezesporná a úplná**, jak je vždy požadováno, ale navíc i **nezávislá**.

2.1.4 Definice Nechť (M, d) je metrický prostor a M_1 jeho libovolná *vlastní* podmnožina (též *vlastní část*), tj. $M_1 \subset M$ ($M_1 \neq M$). O metrickém prostoru (M_1, d) se stejnou metrikou d (o níž se předpokládá, že je definována také na M_1 , tj. $d|_{M_1 \times M_1} : M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$) říkáme, že je **vnořený** do (M, d) , nebo že M_1 je **podprostor prostoru M** (neboli M je **nadprostor** prostoru M_1), nebo že M_1 je **bodová množina** v prostoru M .

2.1.5 Poznámka Označením $d|_{M_1 \times M_1}$ rozumíme **zúžení** neboli **restrikci zobrazení d** na množinu $M_1 \times M_1$. Protože označujeme $M_1 \times M_1 = M_1^2$, lze stručně psát

$$d(x, y)|_{M_1^2} = d(x, y), \quad (x, y) \in M_1^2.$$

Obrácený postup zachovávající uvedené vlastnosti metriky se pak nazývá **rozšíření zobrazení** na množinu $M \times M$ z množiny $M_1 \times M_1$.

¹⁾Obsah pojmu metrický prostor zavedl Francouz M. R. Fréchet (1878-1973), jeho název Němec F. Hausdorff (1868-1942).

2.2 Aritmetický model euklidovského prostoru

2.2.1 Definice Nechť n patří do množiny všech kladných celých čísel \mathbb{N}^* . Pak (**reálný**) n -**rozměrný** (**aritmetický**) **euklidovský prostor** \mathbb{E}_n definujeme uspořádanou dvojicí $\mathbb{E}_n := (\mathbb{R}^n, \varrho)$, ve které \mathbb{R}^n je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel (zapisovaných často v hranatých závorkách). Prvky tohoto prostoru nazýváme **body** (stručně je často označujeme velkými písmeny). Přitom předpokládáme, že v \mathbb{E}_n je pro každé dva body

$$X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n, \quad Y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$$

definována jejich metrika (vzdálenost) $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$\varrho(X, Y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

kde ϱ se nazývá **euklidovská** či **sférická metrika**. **Souřadnice bodu** X (vlastně už z bodového prostoru) \mathbb{E}_n jsou odpovídající čísla v hranatých závorkách.

2.2.2 Poznámka Definovali jsme tedy pouze

aritmetický model n -rozměrného euklidovského prostoru (jako prostoru metrického), který je však **pro potřeby matematické analýzy** v mnoha směrech **dostačující**. Někdy bývá stručně označován jako \mathbb{R}^n .

V matematické analýze totiž nebývá vždy účelné úzkostlivě rozlišovat, zda uspořádaná n -tice (reálných) čísel je bod či vektor, jak je tomu u afinních (tj. bodově vektorových) prostorů (Viz následující poznámku o izometrii). Přesto budeme v tomto textu, kde to bude účelné, též námi použitou symbolikou tomuto rozlišení napomáhat.²⁾ V matematické analýze, např. v diferenciálním počtu, budeme často pracovat v pevně zvolené kartézské (tj. pravoúhlé) soustavě souřadnic, neboť většinu funkcí a zobrazení budeme definovat pomocí souřadnic. Pak některé pojmy budou záviset na zvolené kartézské soustavě souřadnic v \mathbb{E}_n , např. tzv. n -rozměrný interval nebo parciální derivace funkce, a jiné, tzv. **euklidovské invarianty**, např. euklidovská metrika, nebudou na změně této soustavy záviset.

Dospěli jsme tak jiným způsobem k pojmu, který zná čtenář už z předmětu Algebra a geometrie, kde euklidovský prostor byl speciálním reálným aritmetickým **afinním** neboli **bodově vektorovým n -rozměrným prostorem** vybaveným totiž navíc **standardním** skalárním součinem vektorů \vec{u}, \vec{v}

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Pro úplnost vyslovme ještě abstraktní definici (aritmetického) vektoru, který patří do zaměření afinního, a tedy i do zaměření euklidovského prostoru, jak víme z lineární algebry i z definice 1.2.8.

2.2.3 Vektorem (aritmetickým) \vec{u} rozumíme zobrazení, které každému bodu X z euklidovského bodového prostoru $\mathbb{E}_n := (\mathbb{R}^n, \varrho)$ přiřazuje jediný bod z \mathbb{E}_n , jenž značíme $X + \vec{u}$ tak, že pro každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ platí

$$\varrho(X, X + \vec{u}) = \varrho(Y, Y + \vec{u})$$

$$\varrho(X, Y) = \varrho(X + \vec{u}, Y + \vec{u}).$$

Množinu označenou $\mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$, stručněji \mathbb{V}_n , někdy jen \mathbb{V} , všech takových vektorů pak nazveme **zaměřením prostoru** \mathbb{E}_n .

2.2.4 Poznámky Jsou-li $X, Y \in \mathbb{E}_n$, pak lze psát

$$X - Y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) = (u_1, \dots, u_n) = \vec{u}, \quad \text{kde } \vec{u} \in \mathbb{V}_n.$$

Takové a další vztahy jsou pak podrobněji zkoumány v tzv. afinních prostorech. Přesto zcela formálně můžeme i pro libovolné vektory \vec{u}, \vec{v} z **aritmetického vektorového prostoru** \mathbb{R}^n (tj. množiny všech uspořádaných n -tic reálných čísel nazývaných aritmetické vektory a zapisovaných v kulatých závorkách, pro které je známým způsobem definován součet $\vec{u} + \vec{v}$ dvou vektorů a součin $\lambda \vec{u}$, kde skalár $\lambda \in \mathbb{R}$) definovat metriku pro vektory vztahem

$$\varrho^*(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2}.$$

²⁾i když od kapitoly 4.1 budou souřadnice bodů dávány do kulatých závorek, jak je v matematické analýze obvyklejší (Viz úmluvu 3.1.1).

Odtud porovnáním s (2.1), vzhledem k tomu, že $\varrho = \varrho^*$, je zřejmé, že aritmetický vektorový prostor \mathbb{R}^n má z hlediska v něm takto definované metriky *stejnou strukturu* jako euklidovský (bodový) prostor \mathbb{E}_n . Proto v něm lze stejně jako v \mathbb{E}_n formálně shodně zavést pojmy, se kterými se podrobněji seznámíme v příští kapitole. V případě \mathbb{R}^n by šlo o pojmy jako okolí vektoru, otevřená a uzavřená množina vektorů, limita posloupností vektorů atd. Tyto pojmy jsou významné ve vektorové analýze, zvláště u vektorových funkcí více proměnných.

Podrobněji, prostory $\mathbb{E}_n = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ a $(\mathbb{R}^n, \varrho^*)$ jsou z hlediska teorie metrických prostorů identické, neboť jde o tzv. prostory izometrické, kdy povaha prvků v prostorech může být odlišná, ale *vzdálenost* prvků se v obou metrikách zachovává, tj. je *invariantní*. Přitom říkáme, že bijekce f mezi metrickými prostory (M, d) a (M^*, d^*) je *izometrickým zobrazením*, stručně *izometrií*, když

$$d(x_1, x_2) = d^*(f(x_1), f(x_2)) \quad (2.2)$$

pro všechny prvky $x_1, x_2 \in M$. Dva metrické *prostory* se nazývají *izometrické*, když jeden z nich lze izometricky zobrazit na druhý.

Euklidovská metrika je základní *euklidovský invariant*. Z geometrického hlediska to znamená tu mimořádně důležitou vlastnost, že všechny vlastnosti i vztahy odvozené z této metriky budou invariantní vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic, tj. nebudou záviset na její volbě.

2.3 Příklady metrických prostorů

2.3.1 Příklad - Prostor izolovaných bodů (Diskrétní metrický prostor) Nechť M je množina. Zobrazení $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme takto

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{když } x = y \\ 1, & \text{když } x \neq y. \end{cases}$$

Ověřením axiomů se snadno přesvědčíte, že jde o metrický prostor.

2.3.2 Příklad - Reálná osa \mathbb{E}_1 , rovina \mathbb{E}_2 , prostor \mathbb{E}_3 Na množině všech reálných čísel $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ definujeme vzdálenost d předpisem pomocí euklidovské metriky ϱ z (2.1)

$$d(X, Y) = \varrho(X, Y) = \sqrt{(y - x)^2} = |y - x|, \text{ kde } X = [x], Y = [y] \in E_1$$

a získáme *jednorozměrný euklidovský prostor* $\mathbb{E}_1 = (\mathbb{R}, \varrho)$, jehož geometrickým modelem je přímka - reálná osa. Podobně geometrickým modelem euklidovských prostorů při $n = 2$, resp. $n = 3$, tj. prostorů $\mathbb{E}_2 = (\mathbb{R}^2, \varrho)$, resp. $\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3, \varrho)$ může být rovina, resp. trojrozměrný prostor se zavedeným kartézským systémem souřadnic. Jde o podprostory prostoru \mathbb{E}_n , tj. platí ostrá inkluze $\mathbb{E}_1 \subset \mathbb{E}_2 \subset \mathbb{E}_3 \subset \mathbb{E}_n$ ($n \geq 4$).

V \mathbb{E}_3 by byla metrika podle (2.1) dána vztahem

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2},$$

který po umocnění dá

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = \varrho^2.$$

Díváme-li se na poslední vztah jako na rovnici, kde $\varrho = \text{const.}$, $X = [x_1, x_2, x_3]$ je pevný bod, pak jde o rovnici, které vyhovují právě ty body $Y = [y_1, y_2, y_3]$, které tvoří sféru - povrch koule o poloměru ϱ se středem v $X = [x_1, x_2, x_3]$. Odtud název sférická metrika.

2.3.3 Příklad - Kubická a oktaedrická metrika na \mathbb{R}^n V matematické analýze je někdy účelné zavést na téže množině, zde tedy na (nosné) množině všech uspořádaných n -tic reálných čísel \mathbb{R}^n různé metriky (tedy ji různě metrizarovat) a získat tím další metrické prostory. Tak např. definujeme vztahy na \mathbb{R}^n

$$d_{\text{kub}}(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - x_i|\}, \quad (2.3)$$

$$d_{\text{okt}}(x, y) = |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \quad (2.4)$$

metriku kubickou, resp. *oktaedrickou*, jak se lze přesvědčit ověřením axiomů metriky. Příslušné metrické prostory bychom pak mohli označit jako $\mathbb{R}_{\text{kub}}^n = (\mathbb{R}^n, d_{\text{kub}})$, resp. $\mathbb{R}_{\text{okt}}^n = (\mathbb{R}^n, d_{\text{okt}})$. Lze také ukázat, že

$$d_{\text{kub}}(X, Y) \leq \varrho(X, Y) \leq d_{\text{okt}}(X, Y) \leq n \cdot d_{\text{kub}}(X, Y), \quad (2.5)$$

což znamená, že „největší“ (nejhrubší) z těchto metrik je nejvýše n -krát větší než „nejmenší“ (nejjemnější) z nich, přičemž pro $n = 1$ je $d_{\text{kub}} = \varrho = d_{\text{okt}}$. V úvahách následující kapitoly týkajících se limity posloupnosti

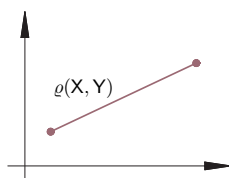
bodů v \mathbb{E}_n , limity i spojitosti funkcí více proměnných je pak jedno, kterou z těchto metrik uijeme, neboť každé z nezáporných čísel v této nerovnosti můžeme učinit „libovolně malým“.

Říkáme, že se jedná o **ekvivalentní metricky** v \mathbb{R}^n . Použitím libovolné z uvedených tří metrik nám tam pak ekvivalentně (rovnocenně) vychází pojmy - množina otevřená, uzavřená, ohraničená, kompaktní, bod vnitřní, vnější, hraniční oblast atd.

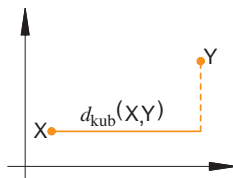
Přesněji, máme-li dány v množině M dvě metricky d, \tilde{d} takové, že platí

$$r \leq \frac{d(X, Y)}{\tilde{d}(X, Y)} \leq \tilde{r} \quad (2.6)$$

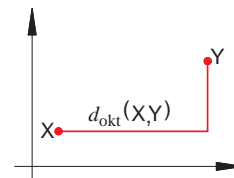
pro každé dva různé body $X, Y \in M$, kde r, \tilde{r} jsou kladná čísla, nazýváme **metricky** d, \tilde{d} (metricky) **ekvivalentní**. V \mathbb{E}_1 jsou metricky $\varrho, d_{\text{kub}}, d_{\text{okt}}$ dokonce totožné. V \mathbb{E}_2 je znázorníme obr. 2.1, 2.2, 2.3.



Obr. 2.1



Obr. 2.2



Obr. 2.3

Prostor s kubickou metrikou označený $\mathbb{R}_{\text{kub}}^n$ je v mnoha otázkách matematické analýzy stejně užitečný jako euklidovský prostor \mathbb{E}_n .

2.3.4 Poznámka s příklady dokonalých platónských těles Slovo oktaedr znamená osmistěn. Pravidelný osmistěn patří mezi pět tzv. dokonalých **platónských těles**. Jsou to: **pravidelný čtyřstěn** (tetraedr), **pravidelný šestistěn** - krychle (hexaedr), **pravidelný osmistěn** (oktaedr), **pravidelný dvanáctistěn** (dodekaedr) a konečně **pravidelný dvacetistěn** (ikosaedr), které jsou znázorněny v obr. 2.4.



Obr. 2.4

Roli platónských těles přiblížíme následovně. Kružnici můžeme reprezentovat jako pravidelný n -úhelník s libovolným počtem stran n . Odpověď na přirozenou otázku, zda také kouli lze podobně reprezentovat libovolným počtem stejných a stejně spojených těles, je záporná. V **teorii grafu** se dokazuje, že takových rozdělení je právě jen těch pět na obrázku.

2.3.5 Příklad Množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel, např. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ atd. s metrikou

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

(kde $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$, je pevné číslo), je důležitým metrickým prostorem $\mathbb{R}_p^n = (\mathbb{R}^n, d_p)$. Platnost axiomů (d1), (d2) je zřejmá. Platnost trojúhelníkové nerovnosti, tj. axiomu (d3) se dokazuje tak, že položíme

$$y_k - x_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k, \quad \text{pro } k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Trojúhelníková nerovnost

$$d_p(x, z) \leq d_p(x, y) + d_p(y, z),$$

kterou je pak nutno dokázat, získá tvar

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.8)$$

což je velmi důležitá, tzv. **Minkovského nerovnost**. Pro $p = 1$ je tato nerovnost zřejmá (absolutní hodnota součtu není větší než součet absolutních hodnot).

Při důkazu Minkovského nerovnosti pro $p > 1$ se vychází z další známé, tzv. **Hölderovy nerovnosti**

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.9)$$

kde čísla $p > 1$, $q > 1$ jsou vázána podmínkou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{tj. } q = \frac{p}{p-1}.$$

Speciálním případem, kdy $p = q = 2$, je nerovnost

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ tj. } \left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \quad (2.10)$$

známá jako **Schwarzova nerovnost** (či Cauchy-Bunjakovského). Interpretujeme-li na chvíli ve Schwarzově nerovnosti uspořádané n -tice jako aritmetické vektory \vec{a}, \vec{b} , pak lze Schwarzovu nerovnost přehledně zapsat ve tvaru

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|, \text{ tj. } |(\vec{a}, \vec{b})|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2, \quad (2.11)$$

kde $\|\cdot\|$ je norma (velikost) vektoru. Přitom v \mathbb{R}_2^n , jak víme z lineární algebry, je

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad (2.12)$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad (2.13)$$

$$\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (2.14)$$

2.3.6 Poznámka Metrika d_p uvažovaná v předchozím příkladě přejde v euklidovskou metriku ze vztahu (2.1), klademe-li $p = 2$, a v oktaedrickou metriku z příkladu 2.3.3, klademe-li $p = 1$. Dále lze ukázat, že i kubickou metriku

$$d_{\text{kub}}(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$$

zavedenou tamtéž dostaneme, přejdeme-li k limitě pro $p \rightarrow +\infty$,

$$d_{\text{kub}}(x, y) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.3.7 Poznámka Je důležité vědět, že pro $p < 1$ Minkovského rovnost neplatí. To však znamená, že v takových metrických prostorech \mathbb{R}_p^n , kde $p < 1$, **trojúhelníková nerovnost** (axióm (d3)) **neplatí!**

2.3.8 Lineární normovaný prostor a axiomy normy Termín *norma* $\|\vec{u}\|$ vektoru \vec{u} se v literatuře používá k označení jeho velikosti – délky, např. ve vztazích se skalárním, vektorovým i smíšeným součinem. Norma vektoru vystupovala také ve Schwarzově nerovnosti, kde můžeme místo vektorů jako prvky uvažovat též funkce, a získat tak pro inženýrské aplikace užitečný funkcionální prostor $L_2(a, b)$, o kterém se zmíníme v závěru této kapitoly. Proto nyní přehledně zapíšeme do tří axiómů vlastnosti normy prvků, které si čtenář může představit opět jako vektory, avšak po několika následujících příkladech pozná, že analogicky můžeme pracovat i s funkcemi.

Nechť množina prvků M je lineál (lineární prostor, viz 1.2.5 str. 15). Přiřadíme každému prvku $u \in M$ reálné číslo $\|u\|$, tj. $\|u\| \in \mathbb{R}$, tzv. **normu prvku** splňující následující **axiomy normy**

$$\text{(n1) } \|u\| \geq 0, \text{ přičemž } \underbrace{\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o, \text{ kde } o \text{ je nulový prvek v } M}_{\text{axióm definitnosti}} \quad \text{pozitivní definitnost}$$

$$\text{(n2) } \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \text{ pro každé } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{homogenita}$$

$$\text{(n3) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \text{ pro každé } u, v \in M. \quad \text{trojúhelníková nerovnost}$$

Lineál M , na němž je definována norma prvku $\|\cdot\|$ s vlastnostmi (n1), (n2), (n3), se nazývá (lineární) **normovaný prostor**. Označíme jej $P = (M, \|\cdot\|)$.

Normovaný prostor nemusí mít definován skalární součin prvků (u, v) , tj. *nemusí být vždy unitárním prostorem* (uvedeným v 1.2.6), avšak je to speciální případ prostoru metrického (Viz cvičení 2.4[3]).

Zavedeme v (lineárním) normovaném prostoru $P = (M, \|\cdot\|)$ vzdálenost

$$d(u, v) = \|v - u\|. \quad (2.15)$$

Ověřte, zda takto definovaná „vzdálenost“ d splňuje všechny tři axiomy metriky z 2.1.2, a tím zjistíte, zda každý normovaný prostor je (lineární) normovaný *metrický* prostor.

2.3.9 Příklad Seznámíme čtenáře se zajímavým prostorem, který je přirozenou analogií n -rozměrného aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^n pro $n = +\infty$. Je totiž např. významný v **Heisenbergově modelu kvantové mechaniky**.

Označme l_2 metrický prostor (nekonečnědimenzionální), jehož body jsou všechny (nekonečné) posloupnosti

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \equiv \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$$

reálných, popř. komplexních čísel splňujících podmínku

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty,$$

kteřá znamená, že uvedená číselná řada (nezáporných čísel) je konvergentní (tj. má konečný součet), přesněji

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n |x_k|^2$$

je konečné číslo. Dokážeme, že reálnou funkcí

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

je definována metrika. Z elementární nerovnosti

$$|x_k \pm y_k|^2 \leq 2|x_k|^2 + 2|y_k|^2$$

plyne, že funkce $d(x, y)$ má smysl pro všechny body $x, y \in l_2$, tj. že řada $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^2$ konverguje, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2$.

Protože axiomy (d1), (d2) evidentně platí, ověříme jen trojúhelníkovou nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.16)$$

Podle definice l_2 každá z těchto tří řad konverguje a pro každé celé kladné n platí nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^n |z_k - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kteřá plyne přímo z Minkovského nerovnosti, v níž $p = 2$ a zároveň za a_k, b_k dosadíme z rovností (2.7). Přejdeme-li pak v poslední nerovnosti k limitě pro $n \rightarrow \infty$, dostaneme (2.16), čímž je v l_2 platnost trojúhelníkové nerovnosti ověřena.

2.3.10 Příklad Uvažujeme-li množinu všech ohraničených posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ reálných čísel a definujeme-li metriku vztahem

$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |y_k - x_k|,$$

je zřejmé, že dostáváme další metrický prostor (nekonečné dimenze), který označíme B .

2.3.11 Poznámka - Definice Připomeňme, že reálné číslo $\sup M$, resp. $\inf M$ se nazývá **supremum**, resp. **infimum** množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže

- (1) pro každé $m \in M$ je $m \leq \sup M$, resp. $\inf M \leq m$
(tj. definované číslo je horní, resp. dolní ohraničení (závora, mez, odhad) množiny M)
- (2) je-li nějaké $m^* < \sup M$, resp. $\inf M < m^*$, pak existuje $m \in M$ tak, že $m^* < m$, resp. $m < m^*$ (tj. definované číslo je nejmenší, resp. největší z čísel majících vlastnost (1)).

Pro shora (zdola) neohraničené množiny je $\sup M = +\infty$ ($\inf M = -\infty$), dále je $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$. Zdůrazněme ještě, že supremum, popř. infimum dané množiny nemusí být jejím prvkem. Jedná se tedy o podstatně obecnější pojmy než jsou pojmy **maximální**, popř. **minimální prvek množiny**.

2.3.12 Příklad - Prostor funkcí definovaných a ohraničených na množině M Ukážeme, že v tomto prostoru (opět nekonečnědimenzionálním) označeném $B(M)$ je vztahem

$$d(x, y) = \sup_{t \in M} |y(t) - x(t)|$$

definována metrika. Takovému pro aplikace velmi důležité prostoru, jejichž prvky jsou funkce, nazýváme **funkcionální prostory**. Opět je třeba dokázat platnost trojúhelníkové nerovnosti (d3). Pro každé $t \in M$ však platí

$$|z(t) - x(t)| = |[y(t) - x(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |y(t) - x(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \sup_{t \in M} |y(t) - x(t)| + \sup_{t \in M} |z(t) - y(t)|.$$

Odtud

$$\sup_{t \in M} |z(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in M} |y(t) - x(t)| + \sup_{t \in M} |z(t) - y(t)|,$$

což je vlastně trojúhelníková nerovnost

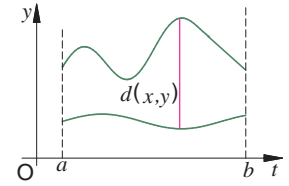
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Poznamenejme, že v teorii funkčních řad se konvergence v prostoru $B(M)$ nazývá **stejněměrná konvergence** a uvedená metrika je tzv. **stejněměrná** nebo **supremální metrika**.

2.3.13 Příklad - Prostor $C[a, b]$ Tak se v matematické analýze označuje jak množina všech spojitých funkcí reálných, popř. komplexních, na **uzavřeném** intervalu $[a, b]$, tak příslušný velmi významný prostor s **maximovou metrikou**

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |y(t) - x(t)|,$$

viz obr. 2.5, ve které už místo (obecnějšího) suprema můžeme psát maximum. Rozdíl spojitých funkcí je opět funkce spojitá na $[a, b]$ a podle druhé *Weierstrassovy věty* zde také nabývá globálních (absolutních) extrémů. Prostor $C[a, b]$ je podprostorem předešlého prostoru $B(M)$, tj. $C[a, b] \subset B(a, b)$.



Obr. 2.5

2.3.14 Příklad – Prostor spojitých funkcí $C_2[a, b]$ s kvadratickou metrikou Opět se vychází z množiny všech spojitých funkcí reálných, popř. komplexních (v případě reálných funkcí se v následujících vzorcích místo absolutních hodnot píše závorky), definovaných na uzavřeném intervalu $[a, b]$, avšak s tzv. **kvadratickou metrikou**

$$d(x, y) = \sqrt{\int_a^b |y(t) - x(t)|^2 dt}. \quad (2.17)$$

Zde jsou opět axiomy (d1), (d2) zřejmé a trojúhelníková nerovnost (d3) vyplývá z **integrálního tvaru Schwarzovy nerovnosti**

$$\left(\int_a^b |x(t)y(t)| dt \right)^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt. \quad (2.18)$$

Pro úplnost poznamenejme, že lze rovněž formulovat **Hölderovu nerovnost v integrálním tvaru**

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.19)$$

která platí pro libovolné funkce x a y , pro které integrály na pravé straně mají smysl. Odtud také dostaneme **Minkovského nerovnost v integrálním tvaru**

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.20)$$

2.3.15 Poznámka - Prostor kvadraticky lebesgueovsky³⁾ integrovatelných funkcí $L_2(a, b)$ Jde o (lineární) metrický prostor, jehož prvky zde tvoří (podrobněji viz např. [34]) reálné (obecněji lze uvažovat i funkce komplexní) **funkce** L -integrovatelné, tedy **integrovatelné** na ohraničeném intervalu $[a, b]$ **v Lebesgueově⁴⁾ smyslu** (nikoli tedy R -integrovatelné, tedy v klasickém Riemannově smyslu), a to **s druhou mocninou** neboli s kvadrátem, což znamená, že konvergují neboli jsou konečné následující tři Lebesgueovy integrály, a platí

$$\int_a^b u^2(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b |u(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b u(x) dx < +\infty. \quad (2.21)$$

Uvedené implikace jsou důsledkem základních vlastností L -integrálu.⁵⁾ Protože zde není místo na podrobnější výklad, připojme alespoň několik přiblížení. L -integrál, pokud neuvažujeme i nevlastní R -integrál, je podstatným zobecněním R -integrálu, který se opíral o pojem Jordanovy(-Peanovy) míry množiny. Tedy všechny funkce integrovatelné riemannovsky (např. funkce definované na konečném intervalu, které na něm mají nejvýše konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu) jsou integrovatelné i lebesgueovsky a navíc definují stejné hodnoty.

Zdůrazněme přitom, že u L -integrálu jde vždy o **absolutní integrovatelnost**, tj. funkce $f(x)$ je L -integrovatelná, právě když je L -integrovatelná funkce $|f(x)|$ (pak budou tvary obou posledních integrálů

³⁾Čti: *lebegovsky*

⁴⁾Lebesgue Henri Léon (1875-1941), Francouz, r. 1902 vytvořil všeobecně používanou teorii integrálu nesoucí jeho jméno.

⁵⁾Zatímco při definici klasického určitého (tj. Riemannova) integrálu, jak čtenář ví, dělíme při konstrukci integrálních součtů na „malé dílky“ definiční obor funkce, u L -integrálu oproti tomu dělíme na „malé dílky“ obor funkčních hodnot.

v (2.21) rovnocenné). Pojem L -integrálu se opírá o pojem **Lebesgueova míra** (ta je v \mathbb{E}_1 přirozeným zobecněním pojmu délka intervalu), o pojem **L -měřitelná množina** [kdy se neuvažuje konečně mnoho, ale **spočetně mnoho** (Viz **množinu spočetnou** v 3.2.15) pokrytí uvažované množiny] a **L -měřitelné funkce**. Ukazuje se, že dokonce i v \mathbb{E}_n je třída množin, které jsou lebesgueovsky měřitelné, značně rozsáhlá. Přesto byla dokázána existence takových množin, které nejsou L -měřitelné⁶⁾. Jde však o dosti abstraktní konstrukce. V inženýrských a přírodovědných aplikacích se setkáváme s množinami, které jsou L -měřitelné, a tak se zdá, že matematická teorie v tomto směru našťestí předbíhá praxi. Důsledkem obecnosti L -integrálu je mj. to, že předpoklady matematických vět lze zjednodušit nebo vynechat (např. ve větách o záměně limity a integrálu atd.). Z aplikačního hlediska vůbec nedojde ke kolizi, jestliže čtenář nezná teorii L -integrálu a na všechny integrály v příkladech bude nahlížet jako na klasické R -integrály. V aplikacích se totiž většinou setkáváme s případy, kdy uvažovaná funkce je L i R -integrovatelná, takže hodnoty obou integrálů jsou stejné a stejně tak i metody jejich výpočtu). V tomto **nekonečnědimenzionálním prostoru** funkcí je definován **skalární součin** (u, v) integrálním vztahem

$$(u, v) = \int_a^b uv \, dx \quad (2.22)$$

(tedy jde o **unitární prostor**), a tím je indukována **norma** $\|u\|$ vztahem

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\int_a^b u^2(x) dx} \quad (2.23)$$

(tedy jde o **normovaný prostor**) a normou je indukována kvadratická **metrika** $d(u, v)$

$$d(u, v) = \|v - u\| \Rightarrow d(u, v) = \sqrt{\int_a^b [v(x) - u(x)]^2 dx}. \quad (2.24)$$

Lze ukázat inkluzi

$$C[a, b] \subset L_2(a, b).$$

Z definice plyne, že každá reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je integrovatelná s druhou mocninou, neboť pro spojitou funkci jsou všechny 3 integrály konvergentní. Avšak do třídy funkcí lebesgueovsky integrovatelných s druhou mocninou patří i funkce mnohem obecnější.

Prostor $L_2(a, b)$ patří mezi nejjednodušší **Hilbertovy⁷⁾ prostory**, které jsou částí obecnějších **Banachových⁸⁾ prostorů**.

V případě **komplexních** funkcí L -integrovatelných s druhou mocninou v $L_2(a, b)$, využívaných zejména v elektrotechnických aplikacích, se jen mírně modifikují některé naše a některé další vztahy. Závěrem poznamenejme, že v modernějších partiích matematiky, včetně aplikované matematiky, je použití L -integrálu zcela nezbytné. Umožňuje také, aby významné fyzikální principy, např. **princip minima potenciální energie**, a jejich matematické vyjádření realizované často právě pomocí integrálních vztahů,⁹⁾ např. tzv. **věta o minimu funkcionálu energie**, byly v souladu.

Do moderní teorie integrálu světového věhlasu se zařadil vynikající český matematik Jaroslav Kurzweil (*1926-).¹⁰⁾

2.4 Cvičení

- 1** Rozhodněte, zda zobrazení $d : (x, y) \mapsto \sin^2(x - y)$ zobrazující $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je metrika $d(x, y)$ na \mathbb{R} .
 {není, neboť $d(x, y) = 0$ rovněž pro $x = y + k\pi, k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, takže neplatí axiom totožnosti (d1) pro metriku}
- 2** Označme M množinu všech uspořádaných n -tic $x = (x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i = 0$ nebo $x_i = 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Pro prvky $x, y \in M$ definujme celé nezáporné číslo $d(x, y) =$ počet míst (indexů), v nichž se x, y liší. Naznačte důkaz, že d je metrika. Tím ověříte, že (M, d) je metrický, tzv. **Hammingův prostor**, hrající důležitou roli v **teorii kódování**.

⁶⁾ První příklad takové množiny uvedl italský matematik Giuseppe Vitali (1875-1932).

⁷⁾ Hilbert David (1862-1943), po Gaussovi a Leibnizovi snad nejvýznamnější německý matematik.

⁸⁾ Banach Stefan (1892-1945), nejvýznamnější polský matematik. Název zavedl v roce 1928 Francouz M. R. Fréchet.

⁹⁾ Známý je Hilbertův názor, že „fyzikální zákony by neměly být formulovány pomocí diferenciálních vztahů, ale pomocí integrálních vztahů“.

¹⁰⁾ Ten v roce 1957 ve svém článku z oblasti diferenciálních rovnic definoval zcela nový integrál Riemannova typu, který však nebyl hlavním cílem jeho práce. To provedl ve svém článku z r. 1960 až severoirský matematik Ralph Henstock (*1923-), jenž prý Kurzweilův článek neznal. Kurzweilův K -integrál, častěji **Kurzweilův-Henstockův integrál**, zobecňuje klasickou součtovou definici Riemannova integrálu, aniž by přitom byl nějak obtížnější. Jeho výhodou oproti Lebesgueovu integrálu je to, že jde o integrál neabsolutně konvergentní, a také se s ním u funkcí reálných proměnných snadněji pracuje. Pro funkce reálných proměnných je ekvivalentní s dříve objeveným integrálem Perronovým, ale i zde je vůči němu podstatně jednodušší. Akademie věd ČR udělila J. Kurzweilovi v roce 1996 prestižní Bolzanovu medaili.

3 Zaveďme v normovaném prostoru $P = (M, \|\cdot\|)$ definovaném v 2.3.8 vzdálenost $d(u, v) = \|v - u\|$. Ověřte, zda takto definovaná vzdálenost d splňuje všechny 3 axiomy metriky z 2.1.2 na str. 30, a tím zjistíte, zda každý normovaný prostor je normovaný *metrický* prostor.
 {{výsledek neuvádíme, nápovědu odpovědi lze najít po přečtení odstavce 2.3.15 na str. 36 o funkcionálním prostoru $L_2(a, b)$ }}

4 Určete, pro jaké vektory $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_n \equiv \mathbb{R}_2^n = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ (kde ϱ je samozřejmě euklidovská metrika) platí pro jejich skalární součin (\vec{a}, \vec{b}) ve Schwarzově nerovnosti ze str. 34 speciálně rovnost, tj. $|(\vec{a}, \vec{b})| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ (Načrtněte si v \mathbb{E}_2 , ve kterém norma vektoru $\|\cdot\|$ z \mathbb{E}_n získá geometricky názorný význam jeho délky).
 {{lineárně závislé}}

5 Pro jaké vektory $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_n$ nastane v trojúhelníkové nerovnosti zapsané pomocí norem: $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ a platící pro každé $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_n$ speciálně rovnost, tj. $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (Načrtněte si v \mathbb{E}_2).
 {{lineárně závislé}}

6 Pouze klasickým výpočtem (tj. v Riemannově smyslu) všech potřebných určitých integrálů ve vztahu (2.21) tak, jak je umíme počítat z 1. semestru, zjistíte, zda funkce

a) $u(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

patří do prostoru $L_2(0, 1)$, tj. do prostoru funkcí lebesgueovsky integrovatelných s druhou mocninou (s kvadrátem) na intervalu $(0, 1)$.

a) {{ $u \in L_2$, neboť $\int_0^1 u^2 dx = 3, \int_0^1 |u| dx = \int_0^1 u(x) dx = \frac{3}{2}$ }}

b) {{ $v \notin L_2$, neboť $\int_0^1 v^2 dx = +\infty$, tj. diverguje (přestože $\int_0^1 |v| dx = \int_0^1 v(x) dx = 2$, tj. konverguje)}}

7 Uvažujme prostor $C_2[a, b]$ (z příkladu 2.3.14) všech *reálných spojitých* funkcí definovaných na $[a, b]$, a tedy patřících do téhož prostoru $L_2(a, b)$ všech funkcí lebesgueovsky integrovatelných s druhou mocninou (z poznámky 2.3.15) na (a, b) se skalárním součinem prvků (x, y) , resp. normou $\|x\|$, resp. metrikou $d(x, y) = \|y - x\|$ definovanými tam takto

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b [x(t)]^2 dt}, \quad \|y - x\| = \sqrt{\int_a^b [y(t) - x(t)]^2 dt}. \quad (2.25)$$

a) Je $C_2[a, b]$ a také $L_2(a, b)$ unitární (neboli prehilbertovský) prostor? K tomu je třeba ověřit axiomy jak *lineárního prostoru*,¹¹⁾ tak také *skalárního součinu* jeho prvků.¹²⁾

b) Mezi různými bázemi, které lze v $L_2(a, b)$ zavést, je pro široké využití (např. u Fourierových řad) nejdůležitější (neboť je to rovněž tzv. *úplný systém*) systém goniometrických funkcí

$$\left[\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{2\pi n}{b-a} t, \quad \sin \frac{2\pi n}{b-a} t, \quad n = 1, 2, \dots \right] \quad (2.26)$$

Přitom říkáme, že (spočetný) *systém funkcí* $\{f_n\}$, tj. f_1, f_2, \dots je *ortogonální v* (unitárním) *prostoru* P , jsou-li ortogonální v P každé dvě různé funkce této soustavy, tj. když

$$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m(t)f_n(t)dt = 0 \quad \text{pro všechna } m \neq n. \quad (2.27)$$

Ověřte, zda uvedený systém funkcí je ortogonální v obou prostorech, a to přímými výpočty integrálů podle předešlého vztahu, při využití následujících vzorců pro různé součiny integrandů (tj. funkcí za integrály), které se přitom vyskytnou

$$\cos \alpha t \cos \beta t = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)t + \cos(\alpha + \beta)t] \quad (2.28)$$

$$\sin \alpha t \sin \beta t = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)t - \cos(\alpha + \beta)t] \quad (2.29)$$

$$\sin \alpha t \cos \beta t = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)t + \sin(\alpha + \beta)t], \quad (2.30)$$

popř. s využitím dalších dvou vzorců (lze je jistě snadno získat už z předešlých)

$$\sin \alpha t - \sin \beta t = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} t \sin \frac{\alpha - \beta}{2} t, \quad \cos \alpha t - \cos \beta t = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} t \sin \frac{\alpha - \beta}{2} t. \quad (2.31)$$

¹¹⁾tj. pro operaci *sčítání* jeho prvků axiom komutativnosti, asociativnosti, existence nulového prvku, existence opačného prvku a pro operaci *násobení prvku skalárem* axiom asociativnosti, absorpce jedničky, distributivnosti vzhledem ke sčítání skalárů i prvků

¹²⁾tj. axiom pozitivní definitnosti, komutativnosti, asociativnosti, distributivnosti

- c) Vypočítejte normu každého (ze „tří“ **zadaných** (základních) prvků) prvku zadaného systému.
 d) Ze zadaného systému, pokud je ortogonální, utvořte na základě výpočtů v předešlé části c) tzv. **ortonormální systém funkcí v** uvažovaném **prostoru**. Přitom říkáme, že ortogonální **systém prvků je ortonormální v** **prostoru** P , když navíc každý jeho **prvek** $u_n \in P$ je **normovaný** (na jedničku), tj.

$$\|u_n\|_P = 1. \quad (2.32)$$

- a) $\{C_2[a, b]$ a $L_2(a, b)$ jsou unitární prostory}
- b) {systém funkcí je ortogonální v obou prostorech}
- c) $\{\|\frac{1}{2}\| = \sqrt{\frac{b-a}{2}}, \|\cos \frac{2\pi n}{b-a}t\| = \|\sin \frac{2\pi n}{b-a}t\| = \sqrt{\frac{b-a}{2}}\}$
- d) $\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{2\pi n}{b-a}t, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{2\pi n}{b-a}t, n = 1, 2, \dots\}$

8 S využitím návodu a popř. vzorců v předchozím příkladu

- určete, zda systém funkcí je v daném funkcionálním prostoru ortogonální,
- když ano, vypočtete normu všech jeho prvků a promyslete tvar příslušného ortonormálního systému

- a) $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots$ v $L_2(0, 2\pi)$

{ano, dokonce v $L_2(a, a + 2\pi)$, kde $a \in \mathbb{R}$; $\|\cos kt\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 ktdt} = \sqrt{\pi}$, $\|\sin kt\| = \sqrt{\pi}$, $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ }

- b) $1, \cos \frac{\pi t}{l}, \sin \frac{\pi t}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi t}{l}, \sin \frac{k\pi t}{l}, \dots$ v $L_2(0, 2l)$, $l \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

{ano, tento tzv. **obecný trigonometrický systém** je tam OS; $\|1\| = \sqrt{2l}$, $\|\cos \frac{k\pi t}{l}\| = \|\sin \frac{k\pi t}{l}\| = \sqrt{l}$ }

- c) $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots$ v $L_2(-l, l)$, $l \in \mathbb{R}^+$

{ano; $\|1\| = \frac{1}{\sqrt{2l}}$, $\|\cos \frac{k\pi x}{l}\| = \|\sin \frac{k\pi x}{l}\| = \frac{1}{\sqrt{l}}$ }

- d) $\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \dots$ v $L_2(0, l)$, $l \in \mathbb{R}^+$

{ano, tento tzv. **systém kosinů** je tam OS; $\|\frac{1}{2}\| = \frac{\sqrt{l}}{2}$, $\|\cos \frac{k\pi x}{l}\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$ }

- e) $\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots$ v $L_2(0, l)$, $l \in \mathbb{R}^+$

{ano, tento tzv. **systém sinů** je tam OS; $\|\sin \frac{k\pi x}{l}\| = \sqrt{\frac{l}{2}}$ }

- f) $\sin t, \sin 3t, \sin 5t, \dots, \sin(2n-1)t, \dots$ v $L_2(0, \frac{\pi}{2})$

{neuvádíme}

- g) (Úplný) systém **komplexních** funkcí (exponenciálních) e^{inx} , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ v $L_2(0, 2\pi)$.

{ano, je tam ortogonální (dokonce v $L_2(a, a + 2\pi)$, kde $a \in \mathbb{R}$).

- Je-li totiž komplexní funkce $u(x)$ reálného argumentu x ve tvaru $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$, kde $u_1(x)$, resp. $u_2(x)$ je její reálná, resp. imaginární část, pak funkce k ní komplexně sdružená je $u^*(x) = u_1(x) - iu_2(x)$ a skalární součin a normu definujeme takto

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} u(x)v^*(x)dx, \quad \|u\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx}.$$

Komutativní zákon se modifikuje do tvaru $(u, v) = (v, u)^*$ a rovněž $(u, \alpha v) = \alpha^*(u, v)$, kde α^* značí číslo komplexně sdružené k α . Použijeme-li ještě významný **Eulerův vzorec (EV)** platný pro $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (2.33)$$

a probíraný v učivu o obyčejných diferenciálních rovnicích či kmitavých dějích, dostáváme pro $m \neq n$

$$(e^{imx}, e^{inx}) = \int_0^{2\pi} e^{imx}(e^{inx})^* dx = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx \stackrel{\text{(EV)}}{=} \int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x + i \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{m-n} \{[\sin(m-n)x]_0^{2\pi} - i[\cos(m-n)x]_0^{2\pi}\} = \frac{1}{m-n} \{0 - i[1-1]\} = 0;$$

- Pro $m = n$ je $(e^{inx}, e^{inx}) = \underbrace{\|e^{inx}\|^2}_{= \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx} = \underbrace{2\pi}_{= \int_0^{2\pi} 1 dx} \Rightarrow \|e^{inx}\| = \sqrt{2\pi}$

9 Určete úhel φ , který spolu svírají v prostoru $L_2(0, 1)$ reálných lebesgueovskými integrovatelných funkcí s druhou mocninou funkce $u(t) = t^2$ a $v(t) = t^3$.

Návod: Analogicky jako u známé geometrické definice skalárního součinu dvou vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \varphi$ také v **reálném unitárním prostoru** se skalárním součinem $(u, v) = \int_a^b uv dt$ a normou indukovanou vztahem

$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_a^b u^2 dt}$ definujeme „úhel“ dvou nenulových prvků (zde funkcí) předpisem

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}, \quad (2.34)$$

což lze, neboť ze známé Schwarzovy nerovnosti $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ plyne, že ve vzorci (2.34) je výraz na pravé straně v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné. $\{\varphi = \arccos \sqrt{\frac{35}{36}} = 0,167 \text{ (rad)}\}$

- 10** Určete, jakou vzdálenost $d(u, v)$ mají libovolné dvě různé funkce u, v z obecného ortonormálního trigonometrického (úplného systému) funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

v **(normovaném) unitárním prostoru** $L_2(-\pi, \pi)$ kvadraticky lebesgueovskými integrovatelnými reálnými funkcí, jestliže ve shodě se vztahem (2.24) na str. 37 **definujeme vzdálenost**

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_a^b [v(x) - u(x)]^2 dx}. \quad (2.35)$$

Návod: Protože funkce z tohoto systému jsou navzájem ortogonální (neboli kolmé), tedy $(u, v) = 0$, dá se využít **Pythagorova věta** unitárního prostoru:

$$\text{Je-li } (u, v) = 0, \text{ pak } \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad (2.36)$$

Přímým výpočtem si vyjádříte čtverec vzdálenosti, tj.

$$\|v - u\|^2 = (v - u, v - u) = \dots$$

$\{\{d^2(u, v) = \|v - u\|^2 = \dots = \|u\|^2 + \|v\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} v^2(x) dx = 2 \Rightarrow d(u, v) = \sqrt{2}, \text{ přičemž stačí vyčíslit celkem pět vzdáleností}\}$

3 Bodové množiny především v euklidovských prostorech

3.1 Úvod

V této kapitole, která je jakýmsi úvodem do oblasti matematické analýzy, zejména do diferenciálního počtu funkcí více proměnných, se setkáváme s mnoha klíčovými pojmy. Například pojem konvergence lze budovat v abstraktně pojatých metrických prostorech. My však z důvodů lepší geometrické názornosti zůstaneme většinou na půdě euklidovských (aritmických) prostorů \mathbb{E}_n . I tak bude mít náš postup dostatečně široký záběr, a navíc mnoho úvah v \mathbb{E}_n budeme moci bezprostředně ilustrovat v jeho speciálních geometrických modelech, a to v \mathbb{E}_2 , resp. \mathbb{E}_3 .

V matematické analýze funkcí jednoho argumentu byla oborem funkce vždy jistá množina reálných čísel, zpravidla interval, ať ohraničený nebo neohraničený. U funkcí více argumentů půjde o vícerozměrné obory, což jsou opět bodové množiny. Jejich prvky však nejsou čísla, tj. body na reálné ose \mathbb{E}_1 , ale uspořádané skupiny čísel někdy nazývaných body, jindy vektory v rovině \mathbb{E}_2 nebo v prostoru \mathbb{E}_3 nebo i ve vícerozměrném prostoru.

Pokud se týká označování uspořádaných n -tic z \mathbb{E}_n , uveďme včas následující úmluvu.

3.1.1 Úmluva *V matematické analýze často využíváme geometrickou terminologii, a tím je výklad podstatně srozumitelnější. Proto také v našem výkladu nazveme uspořádanou n -tici reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n někdy bodem a někdy vektorem a jako na bod z \mathbb{E}_n nebo na vektor z jeho zaměření $\mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ (při pevně zvolené kartézské soustavě souřadnic) se na tuto n -tici budeme dívat. Konkrétněji, zatímco v analytické geometrii v prostoru \mathbb{E}_3 se body a vektory vzhledem k dané problematice úzkostlivě rozlišují, v matematické analýze se ztotožněním bodů (např. tam někdy mluvíme o bodu $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, který je popř. místo se šipkou tištěn tučně) a vektorů mnoho úvah podstatně zjednoduší. Např. u diferenciálu funkce více proměnných se může stát, že některé proměnné mají charakter bodu a jiné zase charakter vektoru. Proto je v matematické analýze obvyklé označit souřadnice bodu \mathbf{X} v kulatých závorkách, tj. $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$. Podobně k -tice jistých funkcí definuje zobrazení Φ (čti: velké f_i), které pak zapíšeme*

$$\text{bodově: } \Phi = [\phi_1, \dots, \phi_k], \quad \text{vektorově } \vec{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_k) \quad \text{či jen } \Phi = (\phi_1, \dots, \phi_k).$$

Předpokládáme tedy, že čtenář bude v tomto směru tolerantnější k pozdější větší volnosti v označování.

3.2 Okolí bodu. Limita posloupnosti bodů v \mathbb{E}_n

Pomocí pojmu vzdálenost, který známe z metrických prostorů, definujeme pojem okolí bodu. Ten je východiskem pro základní pojem matematické analýzy – limitu.¹⁾

3.2.1 Definice Mějme reálné číslo $\delta > 0$, tj. $\delta \in \mathbb{R}^+$ a libovolný bod $\mathbf{A} = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. Množinu všech bodů $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, jejichž vzdálenost $\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ od bodu \mathbf{A} je menší než δ , tj. množinu definovanou definatorickou rovností

$$\mathcal{O}_\delta(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid 0 \leq \varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A}) < \delta\}, \quad (3.1)$$

přičemž $\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ je známá *euklidovská* (sférická, též kruhová) *metrika*

$$\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}, \quad (3.2)$$

nazveme *okolím bodu* $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$ (podrobněji *sférickým* (kulovým) δ -*okolím bodu* \mathbf{A} či *sférickým* (kulovým) *okolím bodu* \mathbf{A} o poloměru δ). Bývá také označováno jako $\mathcal{O}(\mathbf{A}, \delta)$ nebo stručněji $\mathcal{O}(\mathbf{A})$. Nepatří-li bod \mathbf{A} do svého okolí, tj. $\mathbf{A} \notin \mathcal{O}_\delta(\mathbf{A})$ neboli $\mathbf{A} \in \mathcal{O}_\delta \setminus \{\mathbf{A}\}$, pak takové okolí nazveme *redukované okolí* $\mathcal{O}_\delta^*(\mathbf{A})$ *bodu* \mathbf{A} a definujeme

$$\mathcal{O}_\delta^*(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid 0 < \varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A}) < \delta\}. \quad (3.3)$$

(Lze se také setkat s názvy ryzí, resp. neúplné, resp. prstencové okolí atd.)

¹⁾Zásady na rozvoji pojmu limita v souvislosti s konvergencí posloupnosti mají (1655) Angličan J. Wallis (1616-1703), Francouzi (1765) Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) a (1821) Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Dnešní aritmetickou a „statickou“ ε - δ -definici nezaloženou na starších geometrických a dynamických představách podal v r. 1861 Němec Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

3.2.2 Poznámka Sférickým (kulovým) okolím bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je **otevřená koule**²⁾ $B(A, r)$ o středu A a poloměru $r > 0$, tj. koule bez bodů tvořících její povrch, tedy množina

$$B_3(A, r) = \{X = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{E}_3 \mid \sum_{i=1}^3 (x_i - a_i)^2 < r^2\} \quad (3.4)$$

a zcela analogicky sférickým (kulovým) okolím bodu $A \in \mathbb{E}_n$ je **otevřená n -rozměrná koule o poloměru r**

$$B_n(A, r) = \{X = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2\}. \quad (3.5)$$

Pokud předchozí dvě nerovnosti jsou neostré, pak mluvíme o **uzavřené kouli**, kterou jakožto uzavřenou množinu pro odlišení často označíme pruhem, tj. $\bar{B}_3(A, r)$, resp. $\bar{B}_n(A, r)$.

Množinu všech bodů $X \in \mathbb{E}_n$, jejichž vzdálenost od bodu A se rovná $r > 0$, tj. množinu (čti: *kapa*)

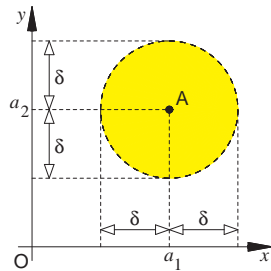
$$\varkappa_n(A, r) = \{X \in \mathbb{E}_n \mid \varrho^2(X, A) := \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 = r^2\}$$

nazýváme **n -rozměrnou kulovou plochou** se středem A a poloměrem r .

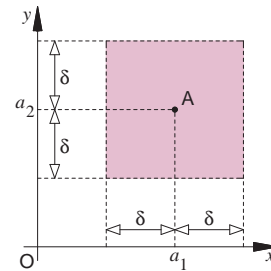
(Kulovým) Okolím bodu $A \in \mathbb{E}_2$ je každý **otevřený kruh**, tzv. **kruhové okolí** se středem v bodě A (tj. ke kruhu nepočítáme jeho hraniční kružnici) a v \mathbb{E}_1 , tj. na reálné číselné ose je okolím bodu A , jak víme, otevřený symetrický interval. Lze tedy pro uvažované body (indexy jsou zbytečné) $X = [x], A = [a] \in \mathbb{E}_1$ psát

$$\mathcal{O}_\delta(a) = B_1(A, \delta) = \{X = [x] \in \mathbb{E}_1 \mid \varrho(X, A) = \sqrt{(x - a)^2} = |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

3.2.3 Příklad Načrtněme v obrázcích 3.1, 3.2 kruhové okolí a pro pozdější úvahy i pro porovnání taktéž tzv. **čtvercové okolí** bodu $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{E}_2$.



Obr. 3.1 Kruhové okolí



Obr. 3.2 Čtvercové okolí

3.2.4 Věta (Axióm konvergenčního³⁾ prostoru) Ke každým dvěma různým bodům prostoru \mathbb{E}_n existují taková jejich okolí, která jsou navzájem disjunktní. ★

Důkaz: Mějme body $A, B \in \mathbb{E}_n, A \neq B$. Označme si $2\delta = \varrho(A, B)$ a uvažujme okolí bodů $\mathcal{O}(A, \delta), \mathcal{O}(B, \delta)$. Důkaz provedeme sporem. Oproti tvrzení věty předpokládejme, že existuje bod $X \in \mathbb{E}_n$ ležící v obou okolích. Pak ale podle definice musí být

$$\varrho(A, X) < \delta \text{ a zároveň } \varrho(B, X) < \delta,$$

a tedy sečtením máme

$$\varrho(A, X) + \varrho(B, X) < 2\delta. \quad (3.6)$$

Přitom však z trojúhelníkové nerovnosti (d3) (známé už jako jeden z axiomů metriky, viz definice 2.1.2), kterou, uvažujeme-li ji ve tvaru

$$(d3) \quad \varrho(A, B) \leq \varrho(A, C) + \varrho(C, B),$$

dostáváme, položíme-li tam $C = X$, vztahy

$$\varrho(A, X) + \varrho(B, X) \geq \varrho(A, B) = 2\delta.$$

To je ale spor s nerovností (3.6). Tím je důkaz hotov. ♣

3.2.5 Geometrický důsledek věty např. v \mathbb{E}_2 tkví v tom, že kolem dvou různých bodů lze v rovině opsat dva otevřené kruhy (např. čárkované), které nemají společný bod.

²⁾sféra = kulová plocha

³⁾Množina P , na níž je definována konvergence posloupnosti jejích prvků, se nazývá **konvergenční prostor**.

3.2.6 Poznámka Je zřejmé, že kulové okolí splňuje všechny tři *axiómy konvergenčního prostoru*

- (1) Ke každému bodu v \mathbb{E}_n existuje aspoň jedno okolí.
- (2) Každý bod z \mathbb{E}_n leží v každém svém okolí.
- (3) Pro každé dva různé body z \mathbb{E}_n existuje aspoň jedna dvojice disjunktních okolí.

3.2.7 Definice Každé zobrazení f množiny všech kladných celých čísel \mathbb{N}^* do množiny \mathbb{E}_n , stručně $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{E}_n$, nazýváme (nekonečnou) **posloupností (bodů) v \mathbb{E}_n nebo bodovou posloupností v \mathbb{E}_n** a definujeme-li $X_k := f(k) \forall k \in \mathbb{N}^*$, potom tuto posloupnost zapisujeme

$$\{X_1, X_2, \dots, X_k, \dots\}$$

(složené závorky označující množinu bodů v předchozím řádku, tj. před X_1 a za druhými třemi tečkami, někdy pro zjednodušení vynecháme) nebo stručně

$$\{X_k\}_{k=1}^\infty \text{ nebo stručněji } \{X_k\}, \text{ resp. } (X_k),$$

a X_k je tzv. **k -tý člen** této **posloupnosti** neboli člen s indexem k , který lze např. rozepsat takto

$$X_k = [x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k], \quad x_i^k \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

(Samozřejmě k nahoře označuje vždy horní index a nikoli k -tou mocninu, proto bývá někdy psán v okrouhlých závorkách (k))

3.2.8 Poznámka Občas je v literatuře autor ještě stručnější a mluví o posloupnosti X_k , takže „ušetří“ jedny závorky. Budeme-li uvažovat jen **konečnou posloupnost**, tj. s konečným počtem členů, vždy toto slovo zdůrazníme. Prázdná množina \emptyset je konečná a počet jejích prvků je 0.

3.2.9 Poznámka Pro $n = 1$ je $\{X_k\}$ posloupnost bodů v \mathbb{E}_1 , tedy je to **posloupnost (reálných) čísel** neboli **číselná posloupnost**, kde pro zjednodušení místo $\{X_k\}$ píšeme

$$\{x_k\}, \text{ přičemž } x_k \equiv [x_1^k] \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dolní index jednička byl v předchozím vztahu zbytečný, a proto je přirozené horní index psát pro pohodlí dole, jak je obvyklé.

3.2.10 Poznámka Místo označení v (3.7) se také používá dvojný dolní index vpravo pro k -tý člen posloupnosti bodů z \mathbb{E}_n

$$X_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}], \text{ popř. } X_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}] \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Ukazuje se výhodné v úvahách připouštět možnost, aby indexy všech členů posloupnosti tvořily i jinou (nekonečnou) posloupnost čísel než jen $1, 2, 3, 4, \dots$

3.2.11 Definice Mějme posloupnost $\{X_k\}$. Posloupnost $\{X_{j_k}\}$, kde j_k jsou přirozená čísla $j_1 < j_2 < \dots$, nazýváme **posloupností vybranou** z $\{X_k\}$ nebo také **podposloupností** posloupnosti $\{X_k\}$.

3.2.12 Příklad Uvažujme pro zjednodušení číselnou posloupnost (tj. z \mathbb{E}_1) $\{x_k\} = \{\frac{k+1}{k}\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$. Vybranou posloupnost utvoříme např. tak, že vezmeme jen každý druhý člen (se sudým indexem $2m$, kde $m = 1, 2, \dots$), tj. $j_k = 2m, j_k = 2, 4, 6, \dots$. Tím vznikne vybraná posloupnost $\{x_{j_k}\} = \{x_2, x_4, x_6, \dots\}$ čísel

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \dots$$

a lze ji ještě přeindexovat do indexu m na tvar $\{\frac{2m+1}{2m}\} =: \{x_m\}$ a přehledně tak definovat podposloupnost $\{x_m\}$.

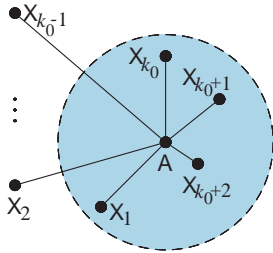
Vidíme, že **vybraná posloupnost** vznikne z dané posloupnosti vynecháním konečně nebo nekonečně mnoha členů tak, aby jich ještě nekonečně mnoho (přesněji spočetně mnoho - viz dále) zůstalo.

3.2.13 Cvičení Dokažte, že vyberete-li každý lichý člen z předešlé číselné posloupnosti, lze ji po úpravě zapsat jako

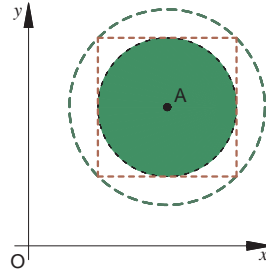
$$\left\{ \frac{2m}{2m-1} \right\} = 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \text{ atd.}$$

3.2.14 Definice *Posloupnost* $\{X_k\}$ se nazývá **prostá**, jestliže pro $k \neq j$ je vždy $X_k \neq X_j$ (tedy žádný prvek se neopakuje, čímž je vyloučena tzv. **konstantní posloupnost**, kde se opakuje jeden prvek).

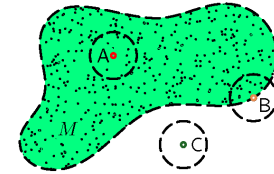
3.2.15 Definice Množina (bodů) se nazývá **spočetná** a říkáme o ní také, že má **spočetně mnoho** prvků, když všechny její prvky lze vzájemně jednoznačně (tj. bijektivním zobrazením) přiřadit kladným celým číslům $1, 2, 3, \dots$, tedy uspořádat je v *prostou posloupnost*. Nazývá se **nejvýše spočetná**, též říkáme, že má **nejvýše spočetně mnoho** prvků, když je to množina konečná (včetně prázdné množiny \emptyset) nebo spočetná. Množiny, které nejsou nejvýše spočetné, nazýváme **nespočetné množiny**.



Obr. 3.3 Vzdálenosti konvergující k nule



Obr. 3.4 Ekvivalence okolí

Obr. 3.5 Důležité body v \mathbb{E}_n

3.2.16 Poznámka Stručně řečeno, množina je (nekonečnou) spočetnou množinou tehdy a jen tehdy, lze-li její prvky seřadit do prosté (nekonečné) posloupnosti. Např. množina všech bodů v \mathbb{E}_1 s racionálními souřadnicemi (tj. množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel) je spočetná! Totéž lze dokázat i pro body v \mathbb{E}_n . Naopak **množina** \mathbb{R} všech reálných čísel je už **nespočetná** a stejně tak i libovolný interval reálných čísel nenulové délky, např. interval $[0, 1)$.

3.2.17 Poznámka Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina, avšak např. množina všech (nekonečných) posloupností přirozených čísel je už nespočetná.

3.2.18 Definice Řekneme, že *posloupnost* $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n **má limitu** $A \in \mathbb{E}_n$, a píšeme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A \text{ nebo jen } \lim X_k = A \text{ nebo } X_k \rightarrow A,$$

právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq k_0 : X_k \in \mathcal{O}_\varepsilon(A).$$

Pokud má *posloupnost* $\{X_k\}$ limitu, říkáme o ní, že je **konvergentní v \mathbb{E}_n** , a pokud tato limita neexistuje, je to **divergentní posloupnost v \mathbb{E}_n** .

3.2.19 Poznámka Lze také říci, že posloupnost v \mathbb{E}_n má limitu $A \in \mathbb{E}_n$, když ke každému ε -okolí bodu A existuje index k_0 (závislý na ε , tj. $k_0 = k_0(\varepsilon)$) tak, že všechny členy takto vybrané posloupnosti od tohoto indexu počínaje leží v uvedeném okolí bodu A (zapsáno, $\mathcal{O}_\varepsilon(A) \ni X_{k_0}, \mathcal{O}_\varepsilon(A) \ni X_{k_0+1}$, atd.), což vysloveno pomocí (euklidovské) metriky ϱ znamená, že číselná posloupnost vzdáleností všech bodů (v \mathbb{E}_1)

$$\varrho(X_1, A), \varrho(X_2, A), \dots, \varrho(X_n, A), \dots$$

konverguje k nule, viz obr. 3.3. Tuto skutečnost formuluje následující nutná i postačující podmínka konvergence $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n . Pro svou názornost bývá často uváděna jako definice konvergence $\{X_k\}$ (a v takové publikaci by naše definice 3.2.18 byla formulována jako věta). Poznamenejme ještě, že *číselná posloupnost* (tj. posloupnost v \mathbb{E}_1) se nazývá **nulová posloupnost**, když konverguje k nule, což zapíšeme $x_k \rightarrow 0$.

3.2.20 Věta (o ekvivalenci konvergenčí posloupnosti bodů v \mathbb{E}_n a posloupnosti vzdáleností v \mathbb{E}_1) Posloupnost bodů $\{X_k\}$ konverguje k bodu A v \mathbb{E}_n právě když číselná posloupnost euklidovských vzdáleností těch bodů od A $\{\varrho(X_k, A)\}_{k=1}^\infty$ konverguje k nule (je nulovou posloupností). Symbolicky

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(X_k, A) = 0. \star \quad (3.9)$$

3.2.21 Příklad Předpisem

$$\{X_k\} = \left\{ \left[7, \frac{(-1)^k}{k}, \sqrt[k]{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right] \right\} \quad (3.10)$$

je dána bodová posloupnost v \mathbb{E}_4 .

3.2.22 Definice *Množina* M , resp. *posloupnost* $\{X_k\}$ se nazývá *ohraničená* (omezená), existuje-li n -rozměrná koule $B_n(P, r)$ o středu $P = [p_1, \dots, p_n] \in \mathbb{E}_n$ a (konečném) poloměru r tak, že M , resp. $\{X_k\}$ leží v této kouli.

3.2.23 Poznámka Lze také říci, že $\{X_k\}$ je v \mathbb{E}_n ohraničená posloupnost, právě když

$$\exists r > 0 \forall k \in \mathbb{N}^* : X_k \in \mathcal{O}(P),$$

kde obvykle volíme bod (střed koule) $P \equiv O = [0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{E}_n$.

Připomeňme, že *číselná posloupnost* $\{x_k\} \in \mathbb{E}_1$ je *ohraničená* (omezená), když existuje číslo $r > 0$ tak, že $|x_n| < r$, což znamená, že $x_n \in (-r, r) = \mathcal{O}(O) = B_1(O, r)$. Je zřejmé, že posloupnost bodů $\{X_k\}$ je ohraničená právě tehdy, když všechny posloupnosti vytvořené vždy z odpovídajících si souřadnic jsou rovněž ohraničené. Následující tři tvrzení jsou známa z partií matematické analýzy o číselných posloupnostech.

3.2.24 Věta Každá posloupnost $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n má nejvýše jednu limitu. ★

Důkaz: Lze provést sporem.

3.2.25 Věta (o existenci vybrané konvergentní posloupnosti) Jestliže posloupnost $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n má limitu $A \in \mathbb{E}_n$, potom každá z ní vybraná posloupnost má rovněž limitu, a tou je A . ★

Důkaz: Je založen na tom, že když $\lim X_k = A$, pak v každém okolí bodu A leží skoro všechny členy (přesněji všechny členy s výjimkou nejvýše spočetně mnoha členů, viz definice 3.2.15) X_k konvergentní posloupnosti, a tedy také skoro všechny členy každé její podposloupnosti.

3.2.26 Věta Konstantní posloupnost $\{C\}$ v \mathbb{E}_n

$$[c_1, \dots, c_n], [c_1, \dots, c_n], \dots$$

má limitu $C = [c_1, \dots, c_n]$. ★

Důkaz: si čtenář může provést sám.

3.2.27 Věta (o limitě podle souřadnic) Uvažujme posloupnost $\{X_k\}$ bodů z \mathbb{E}_n , tj. $\{X_k\} = X_1, X_2, X_3, \dots$ a označme $X_k = [x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k]$, $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. Potom posloupnost $\{X_k\}$ konverguje k bodu A právě tehdy, když každá z n číselných posloupností odpovídajících souřadnic posloupností bodů X_k z \mathbb{E}_n konverguje k odpovídající souřadnici bodu A neboli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i, \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad \star \quad (3.11)$$

Důkaz: provedeme ve dvou krocích

1. \Rightarrow Předpokládejme nejprve, že $X_k \rightarrow A$. Pak $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}^* \forall k \geq k_0$:

$$\varrho(X_k, A) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i^k - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Protože však je

$$|x_i^k - a_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i^k - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

platí pro každé přirozené $k \geq k_0$

$$|x_i^k - a_i| < \varepsilon,$$

což je vlastně (3.11).

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Předpokládejme obráceně, že platí (3.11). Potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho(\mathbf{X}_k, \mathbf{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^k - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^k - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

což podle věty 3.2.20 dokazuje, že $\mathbf{X}_k \rightarrow \mathbf{A}$. Tím je důkaz hotov. \clubsuit

3.2.28 Důsledek Věta říká, že limitu posloupnosti bodů $\{\mathbf{X}_k\}$ v \mathbb{E}_n určíme jako uspořádanou n -tici limit číselných posloupností jednotlivých souřadnic bodů $\{\mathbf{X}_k\}$. Dává tedy praktický návod pro výpočet limit.

• Analogicky také limitu $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{V}_n$ posloupnosti $\{\vec{x}_k\}$ vektorů $\vec{x}_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ z vektorového prostoru \mathbb{V}_n (zaměření prostoru \mathbb{E}_n) určíme jako uspořádanou n -tici limit číselných posloupností jednotlivých souřadnic vektorů $\{\vec{x}_k\}$, tj. platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i \text{ pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.12)$$

3.2.29 Příklad V \mathbb{E}_4 uvažujme bodovou posloupnost z příkladu 3.2.21. Platí $\lim_{k \rightarrow \infty} 7 = 7$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ a berme jako výsledek vhodný k zapamatování [že pomocí l'Hôpitalova (čti: *l'opitalova*) – Bernoulliho pravidla⁴⁾ lze odvodit], že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3.13)$$

Pak v \mathbb{E}_4 nastává konvergence zmíněné bodové posloupnosti

$$\{\mathbf{X}_k\} = \left\{ \left[7, \frac{-1}{1}, 1, 2 \right], \left[7, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right], \left[7, \frac{(-1)^3}{3}, \sqrt[3]{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^3 \right], \dots \right\}, \text{ neboť } \mathbf{X}_k \rightarrow [7, 0, 1, e],$$

kde e je Eulerovo číslo, $e = 2,718\dots$ (které je transcendentním číslem, tj. není kořenem algebraické rovnice s celočíselnými reálnými kořeny).

3.2.30 Příklad Posloupnost $\{\mathbf{X}_k\}$, kde $\mathbf{X}_k = \left[\frac{1}{k^2}, (-1)^k\right]$, je podle poznámky 3.2.23 ohraničená, neboť posloupnost prvních souřadnic $x_1^k = \frac{1}{k^2}$ i posloupnost druhých souřadnic $x_2^k = (-1)^k$ je ohraničená (v \mathbb{E}_1).

3.2.31 Příklad Posloupnost $\{\mathbf{X}_k\}$, kde $\mathbf{X}_k = \left[\frac{1}{k^2}, k^2\right]$ není ohraničená, neboť posloupnost druhých souřadnic $x_2^k = k^2$ není ohraničená.

3.2.32 Věta (o ohraničenosti konvergentních posloupností) Každá konvergentní posloupnost v \mathbb{E}_n je tam ohraničená. \star

Důkaz: plyne z poznámky 3.2.23.

3.2.33 Věta Bolzanova⁵⁾ – Weierstrassova o existenci konvergentní podposloupnosti v ohraničené posloupnosti Z každé ohraničené posloupnosti v \mathbb{E}_n lze vybrat podposloupnost konvergentní v \mathbb{E}_n . \star

Důkaz: Nechť $n \geq 2$ a $\{\mathbf{X}_k\}$ je posloupnost bodů ohraničená v \mathbb{E}_n . Z posloupnosti $\{\mathbf{X}_k\}$ vybereme takovou ohraničenou podposloupnost $\{\mathbf{X}_{1_k}\}$, aby v ní první souřadnice bodů tvořily konvergentní číselnou posloupnost, a nechť konverguje k číslu a_1 . To podle klasické Bolzano-Weierstrassovy věty v \mathbb{E}_1 (tj. při $n = 1$) je možné. Nyní podobným způsobem vybereme z $\{\mathbf{X}_{1_k}\}$ další podposloupnost označenou $\{\mathbf{X}_{2_k}\}$ tak, aby v ní druhé souřadnice bodů tvořily číselnou posloupnost, která konverguje k číslu, které si označíme a_2 . Po n krocích dospějeme k n -té vybrané podposloupnosti $\{\mathbf{X}_{n_k}\}$ konvergující k bodu $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. \clubsuit

⁴⁾Toto pravidlo je patrně dílem Švýcara Johanna Bernoulliho (1667-1748) z r. 1691/92 a jeho žák i mecenáš renomovaný francouzský matematik, který odkoupil práva publikovat jeho výsledky, markýz Guillaume Françoise Antoine de l'Hôpital (1661-1704) pravidlo uvedl a vydal v r. 1696 ve vůbec první učebnici matematické analýzy.

⁵⁾**BERNARD BOLZANO** (5.10.1781 - 18.12.1848) nejvýznamnější český matematik a významný filozof narozený v Praze, po předcích italskoněmeckého původu, který se hrdě hlásil k našemu národu. V Praze vystudoval teologii, filozofii a stal se profesorem náboženství na Univerzitě Karlově. Svými pokrokovými spisy a přednáškami výrazně ovlivnil českou obrozeneckou generaci. Odmítl nabídku profesury na vídeňské univerzitě a dal přednost zápasu proti pronikající německé idealistické filozofii. V roce 1820, po krutém pronásledování metternichovským režimem, byl po četných udáních zbaven profesury za *nonkonformismus*

3.2.34 Příklad Z ohraničené posloupnosti $\{X_k\}$, kde $X_k = \left[\frac{1}{k^2}, (-1)^k\right]$, lze vybrat podposloupnost

$$\{X_{2k}\} = \left\{ \left[\frac{1}{(2k)^2}, (-1)^{2k} \right] \right\} = \left\{ \left[\frac{1}{4k^2}, 1 \right] \right\}$$

konvergující k bodu $A = [0, 1]$.

3.2.35 Poznámka V kapitole o metrických prostorech, v příkladě 2.3.3 na str. 32, jsme se zmínili o ekvivalenci v abstraktní množině \mathbb{R}^n (všech uspořádaných n -tic reálných čísel) metriky kubické (krychlové), euklidovské (sférické, též kulové) i oktaedrické, dané nerovnostmi (2.5). V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_n = (\mathbb{R}^n, \varrho)$ nyní můžeme s přihlédnutím k (2.3) definovat mj. i kubické (krychlové) okolí bodu v \mathbb{E}_n .

3.2.36 Definice Mějme n kladných reálných čísel, tj.

$$\delta_i \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ a bod } A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n.$$

Množinu všech bodů $X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro jejichž souřadnice platí

$$|x_1 - a_1| < \delta_1, |x_2 - a_2| < \delta_2, \dots, |x_n - a_n| < \delta_n,$$

tj. množinu

$$\boxed{Q_n := \{X[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n \mid |x_i - a_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, n\} =: {}^{Q_n}\mathcal{O}_{\delta_1, \dots, \delta_n}(A)} \quad (3.14)$$

nebo též množinu zapsanou kartézským součinem okolí jednotlivých souřadnic bodu A

$$Q_n(A, 2\delta_1, \dots, 2\delta_n) = (a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1) \times (a_2 - \delta_2, a_2 + \delta_2) \times \dots \times (a_n - \delta_n, a_n + \delta_n)$$

nazýváme *otevřeným n -rozměrným kvádrem se středem A a délkou hran $2\delta_1, 2\delta_2, \dots, 2\delta_n$* nebo též *otevřeným n -rozměrným intervalem se středem A* , čímž je definováno („nesymetrické“) *n -rozměrné kvádrové okolí* ${}^{Q_n}\mathcal{O}_{\delta_1, \dots, \delta_n}(A)$ bodu A . Platí-li $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n =: \delta$, mluvíme o *otevřené n -rozměrné krychli $C_n(A, 2\delta)$ se středem A a délkou hrany 2δ* a definujeme

$$C_n(A, 2\delta) := \{X[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n \mid |x_i - a_i| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\} =: {}^C\mathcal{O}_\delta(A), \quad (3.15)$$

přičemž ${}^C\mathcal{O}_\delta(A)$ označuje *kubické* nebo též *krychlové δ -okolí bodu A* (s délkou hrany 2δ). Pokud všechny výše uvedené nerovnosti jsou neostré a intervaly jsou uzavřené, pak mluvíme o *uzavřeném n -rozměrném kvádru (též intervalu)*, jehož označení nese pruh, tj. \bar{Q}_n , resp. o *uzavřené n -rozměrné krychli $\bar{C}_n(A, 2\delta)$* .

3.2.37 Věta (o ekvivalenci kubických a sférických okolí v \mathbb{E}_n) Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v \mathbb{E}_n konverguje k bodu A nezávisle na tom, zda v \mathbb{E}_n uvažujeme sférická či kubická okolí. ★

Důkaz: plyne podle poznámky 3.2.35 z nerovností (2.5), tedy z toho, že v \mathbb{E}_n jsou kubická a sférická metrika ekvivalentní metriky (Viz 2.3.3).

3.2.38 Poznámka Situaci v \mathbb{E}_2 , kdy věta pojednává o ekvivalenci kruhového okolí a čtvercového okolí, znázorňuje obrázek 3.4 na str 44. Libovolně malé kruhové okolí bodu A obsahuje (vnořené) čtvercové okolí bodu A a naopak.

Poznamenejme, že pro $n = \infty$, tj. v prostorech nekonečnědimenzionálních věta obecně neplatí, tj. z ekvivalence nějakých dvou metrik a konvergence posloupnosti bodů v jednom z (nekonečnědimenzionálních) prostorů neplyne konvergence v druhém prostoru.⁶⁾ A nyní zobecníme pojem přímky a úsečky pro \mathbb{E}_n .

a osvícenský teologický *rationalismus*. Především zásluhou Josefa Dobrovského (1793-1829) nebyl uvězněn.

Ke studiu matematiky jej již za jeho filozofických studií přivedli vynikající učitelé *Stanislav Vydra* (1741 - 1804) a *František Josef Gerstner* (1756 - 1832). Vlivem těžkého životního osudu zanechal mnoho spisů jen v rukopisech a jeho největší dílo „Die Paradoxien des Unendlichen“ vyšlo až po jeho smrti v roce 1851, současníky nepochopeno, a pak zapomenuto. Svou dobu totiž Bolzano předběhl asi o půl století a za mnoho jeho výsledků sklídl jejich znovuoobjevením světový věhlas německý matematik K. Weierstrass. Jako první důsledně budoval svůj matematický aparát na pojmu limity zavedeném Angličanem J. Wallisem (1616 - 1703) a velmi se přiblížil její dnešní Cauchy-Weierstrassové ε - δ -definici.

Dnes je Bolzano uváděn mezi předními zakladateli moderní matematiky, jako jsou A.L. Cauchy, K. Weierstrass, G. Cantor, N.H. Abel a další.

V roce 1817 Bolzano jako první formuloval obecné kritérium konvergence řad. Známa je Bolzanova věta o mezihodnotě spojitě funkce. Bolzano je také první, kdo se zabýval množinami, jejichž teorii vybudoval až německý matematik G. Cantor (1845-1918). Uvedme Bolzanovu větu o supremu a infimu číselné množiny. Ta říká, že každá neprázdná číselná množina ohraničená shora, resp. zdola má supremum, resp. infimum. Větu dokázal metodou půlení, a tak i ona nese jeho jméno. Už kolem roku 1834, před K. Weierstrassem (1815 - 1897) sestrojil spojitou funkci, kterou si nelze představit, má totiž dokonce v každém svém bodě „hrot“, tj. jednostranné derivace zleva i zprava v každém bodě sice existují, ale jsou od sebe různé.

Nejvýznamnějším oceněním v matematických oborech udělovaným u nás je prestižní Bolzanova medaile.

⁶⁾Proto v některých publikacích ekvivalenci metrik definují autoři speciálněji až na základě konvergence takto: Nechť $X_k \rightarrow X$ v metrickém prostoru $(M, d_1) \Leftrightarrow X_k \rightarrow X$ v metrickém prostoru (M, d_2) . Pak říkáme, že d_1, d_2 jsou *ekvivalentní metriky*.

3.2.39 Definice Mějme dva různé body $A[a_1, \dots, a_n], B[b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{E}_n$. *Přímku* v \mathbb{E}_n *procházející body* A, B nazveme množinu všech bodů $X[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n$, pro jejichž souřadnice platí parametrické rovnice

$$x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t, \quad x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad \dots, \quad x_n = a_n + (b_n - a_n)t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

tj. množinu

$$\overleftrightarrow{AB} := \{X[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n \mid x_i = a_i + (b_i - a_i)t, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Úsečkou, podrobněji *uzavřenou úsečkou*, resp. *otevřenou úsečkou s krajními body* A, B , pak nazveme množinu o stejných parametrických rovnicích, kde však je parametr $t \in [0, 1]$, resp. $t \in (0, 1)$. (Uzavřenou) Úsečku obvykle značíme \overline{AB} (popř. \overline{AB}).

Polopřímku, podrobněji *uzavřenou polopřímku s počátečním bodem* A *a vnitřním bodem* B , nazýváme množinu

$$\{X[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{E}_n \mid x_i = a_i + (b_i - a_i)t, \quad t \in [0, +\infty), \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

3.2.40 Poznámka Soustavu parametrických rovnic přímky (3.16) procházející body A, B lze v euklidovském (afinním) prostoru \mathbb{E}_n bodově interpretovat zápisem

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \mathbb{R}$$

a v jeho vektorovém zaměření $\mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$, např. pomocí příslušných rádiusvektorů, pak zápisem

$$\vec{r}_X = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad \text{nebo} \quad \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), \quad t \in \mathbb{R},$$

kde označíme

$$\vec{r}_X \equiv \vec{x} := (x_1, \dots, x_n), \quad \vec{r}_A \equiv \vec{a} := (a_1, \dots, a_n), \quad \vec{r}_B \equiv \vec{b} := (b_1, \dots, b_n).$$

Snadno si čtenář zformuluje definici *polouzavřených úseček* a *otevřené polopřímky*.

3.3 Hromadný bod a další důležité body i množiny především v \mathbb{E}_n

Tento článek by se také mohl nazývat **Některé topologické pojmy v \mathbb{E}_n** , protože se opírá o základní *topologický pojem*, kterým je *okolí bodu*. Termínům, které v hovorové řeči běžně používáme (např. hranici, oblasti atd.), však dáme přesný význam.

3.3.1 Definice Mějme množinu $M \subseteq \mathbb{E}_n$. Bod A , resp. B , resp. C z \mathbb{E}_n se nazývá

- (1) *vnitřní bod množiny* M , když existuje takové jeho okolí $\mathcal{O}(A)$, že celé leží v M , tj. $\mathcal{O}(A) \subset M$ (Viz obr. 3.5 na str. 44),
- (2) resp. *hraniční bod množiny* M , když v každém jeho okolí $\mathcal{O}(B)$ leží alespoň jeden bod $X \in M$ a aspoň jeden bod $Y \notin M$,
- (3) resp. *vnější bod množiny*, když existuje takové jeho okolí $\mathcal{O}(C)$, že neobsahuje žádný bod množiny M , tj. platí $\mathcal{O}(C) \cap M = \emptyset$.

3.3.2 Definice Bod $B \in \mathbb{E}_n$ se nazývá *hromadný bod množiny* $M \subset \mathbb{E}_n$, když v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod $X \in M, X \neq B$.

3.3.3 Poznámka Při pečlivém čtení předchozí definice (a za pomoci náčrtků) si čtenář uvědomí, že *hromadný bod je jakýmsi „bodem zhuštění - kondenzace“* bodů v této množině.

Zvolíme-li libovolně redukované δ -okolí $\mathcal{O}_\delta^*(B)$ bodu B , bude v něm např. aspoň bod $X_1 \neq B, X_1 \in M$. Pak zvolíme další redukované okolí bodu B o poloměru menším než je vzdálenost bodu X_1 od středu okolí a v něm máme bod $X_2 \neq B, X_2 \neq X_1, X_2 \in M$. Opakováním této procedury získáme (nekonečnou) posloupnost bodů $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ množiny M v daném redukovaném okolí $\mathcal{O}_\delta^*(B)$. Platí tedy

3.3.4 Věta (o okolí hromadného bodu) Každé okolí hromadného bodu nějaké množiny z \mathbb{E}_n obsahuje nekonečně mnoho bodů této množiny. ★

3.3.5 Definice Bod $C \in \mathbb{E}_n$ se nazývá **izolovaný bod množiny** $M \subset \mathbb{E}_n$, když existuje takové jeho okolí $\mathcal{O}(C)$, že v něm z množiny M leží právě jeden bod C , tj. $\mathcal{O}(C) \cap M = \{C\}$. Také lze říci, že v $\mathcal{O}(C)$ neleží žádný bod množiny M různý od C .

3.3.6 Poznámka Hraniční bod množiny M může, ale nemusí patřit do M a totéž platí i pro hromadný bod množiny. Hraniční bod množiny M nemusí být jejím hromadným bodem, zatímco každý izolovaný bod je hraniční a není hromadný. Každý vnitřní bod je hromadný a není hraniční.

Celou situaci, kterou je nutné si umět správně představit, nám ozřejmí následující přehledné schéma klasifikace bodů euklidovského prostoru \mathbb{E}_n vzhledem k dané množině $M \subset \mathbb{E}_n$. Jistě vydá za víc než množství subjektivně vybraných příkladů a vyplatí se dobře si schéma zapamatovat.

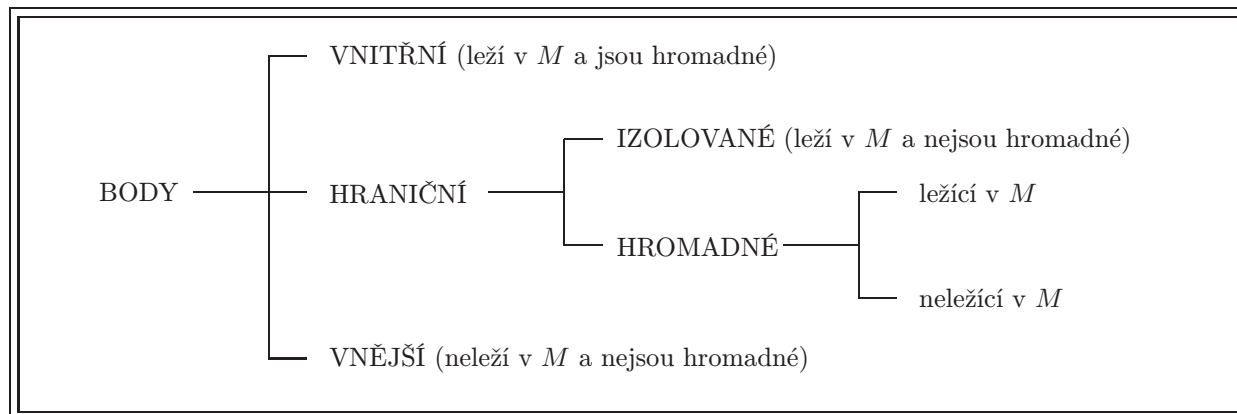


Schéma 3.1: Klasifikace bodů v \mathbb{E}_n

3.3.7 Věta (o limitě a hromadném bodě) Bod $B \in \mathbb{E}_n$ je hromadným bodem množiny M právě tehdy, když existuje *prostá* posloupnost bodů $\{B_k\}$ v množině $M \setminus \{B\}$ (tj. $\forall k \in \mathbb{N}^* : B_k \in M, B_k \neq B$), jejíž limitou je B . ★

Důkaz:

- \Rightarrow Buď B hromadný bod množiny M . Zvolme nějakou **klesající posloupnost** kladných reálných čísel $\{\delta_k\}$ (tj. pro všechny indexy k platí $\delta_k > \delta_{k+1}$), pro niž platí $\delta_k \rightarrow 0$. Pak v každém okolí $\mathcal{O}_{\delta_k}(B)$ leží nekonečně mnoho bodů z M různých od B . Jeden z nich zvolme a označme jako B_k . Takto postupně vybíraná posloupnost $\{B_k\}$ v $M \setminus \{B\}$ zřejmě konverguje k B , tj. $B_k \rightarrow B$.
- \Leftarrow Obráceně, nechtě $\{B_k\}$ je posloupnost v $M \setminus \{B\}$ taková, že $B_k \rightarrow B$. V každém okolí $\mathcal{O}(B)$ leží skoro všechny členy posloupnosti $\{B_k\}$, tj. leží zde nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{B_k\}$ patřících do M . Podle věty 3.3.4 je tedy B hromadným bodem. ♣

Důsledek: Hromadný bod množiny, ať už v ní leží nebo ne, si můžeme představit jako limitu (nekonečné) prosté posloupnosti bodů z dané množiny.

Poznámka k větě a důsledku věty: Slovo *prostá* posloupnost (tj.: kdy $X_k \neq X_j$ pro $k \neq j$) je v předchozí větě a jejím důsledku klíčové. *Hromadný bod posloupnosti bodů $\{X_k\}$ nemusí být hromadným bodem množiny M tvořené těmito body*, tedy množiny $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_k\}$. Je-li např. posloupnost $\{X_k\}$ rovna konstantní posloupnosti, tj. $X_k = C$ pro $k \in \mathbb{N}^*$, pak M je jednobodová množina, tj. $M = \{C\}$, a ta nemá žádný hromadný bod, protože aby množina M měla hromadný bod, musí mít nekonečný počet prvků. Přitom ale bod C je limitou této konstantní posloupnosti, a protože každá limita je zároveň i hromadným bodem (obrácené tvrzení neplatí), je také hromadným bodem zmíněné konstantní posloupnosti. Konstantní posloupnost však samozřejmě není prostá.

3.3.8 Definice dalších topologických pojmů

- (1) Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek množiny** M a značíme ji M° .
- (2) Množina všech vnějších bodů množiny M se nazývá **vnějšek množiny** M a značíme ji M^e .

- (3) Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá **hranice množiny** M a značíme ji ∂M nebo $hr M$.
- (4) Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá **otevřená množina** v \mathbb{E}_n , stručně **otevřená množina**, když každý její bod je jejím vnitřním bodem (tj. $M = M^\circ$).
- (5) Sjednocení množiny $M \subset \mathbb{E}_n$ s množinou všech jejích hromadných bodů (pokud existují) označenou jako M' a nazývající se **derivace množiny** (nebo derivovaná množina) se nazývá **uzávěr množiny** M a značíme jej \bar{M} , podrobněji $\bar{M}_{\mathbb{E}_n}$. Tedy $\bar{M} = M \cup M'$. Je-li množina totožná se svým uzávěrem, tj. $M = \bar{M}$, nazývá se **uzavřená množina** v \mathbb{E}_n , stručně **uzavřená množina**. Označujeme ji často rovněž \bar{M} .
- (6) Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá **ohraničená**, též **omezená množina** v \mathbb{E}_n , stručně **ohraničená množina**, když existuje bod $X \in \mathbb{E}_n$ a takové jeho δ -okolí $\mathcal{O}(X)$ (např. sférické, tj. existuje otevřená n -rozměrná koule $B_n(X, \delta)$ o poloměru δ), že $M \subset \mathcal{O}_\delta(X)$ (tedy, že M lze vnořit do $B_n(X, \delta)$). Není-li množina v \mathbb{E}_n ohraničená, nazývá se **neohraničená**.
- (7) Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá **kompaktní množina** v \mathbb{E}_n nebo **kompakt** (v \mathbb{E}_n), když M je uzavřená a ohraničená.

3.3.9 Poznámka

Užitečná je další terminologie metrických prostorů:

- (8) **Množina** G se nazývá **hustá v metrickém prostoru** P , jestliže její uzávěr \bar{G} splývá s celým prostorem P , tj. $\bar{G} = P$ (tj. každý prvek prostoru P je hromadným bodem množiny G v tomto prostoru). Například množina všech racionálních čísel (tj. bodů v \mathbb{E}_1 s racionální souřadnicí) \mathbb{Q} je hustá v \mathbb{R} (tj. hustá na reálné ose $\mathbb{E}_1 = (\mathbb{R}, \varrho)$). \mathbb{Q} je také (nekonečná) spočetná množina, jak víme z definice 3.2.15. Také množina všech polynomů (mnohočlenů) je hustá v prostorech $C_2[a, b]$, $C[a, b]$, $L_2(a, b)$, čehož se využívá při přibližných výpočtech.
- (9) Množina, která se skládá pouze z izolovaných bodů, se nazývá **izolovaná množina** nebo **diskrétní množina** v \mathbb{E}_n . Například množina všech kladných celých čísel \mathbb{N}^* je **izolovaná**, **neohraničená**, a také **uzavřená**, neboť množina všech jejích hromadných bodů, tj. její derivace $(\mathbb{N}^*)'$, je množina prázdná.
- (10) **Obojetná množina**, je ta, která je zároveň otevřená i uzavřená. Prázdná množina \emptyset a celý prostor, konkrétně \mathbb{E}_n , jsou obojetné množiny, neboť neexistuje žádný jejich hraniční bod. Předpokládáme-li totiž (nepravdivý) opak, potom pro obě zmíněné množiny musí platit obě následující implikace

$$(X \in \partial \emptyset \Rightarrow X \notin \emptyset) \wedge (X \in \partial \emptyset \Rightarrow X \in \emptyset),$$

$$(X \in \partial \mathbb{E}_n \Rightarrow X \notin \mathbb{E}_n) \wedge (X \in \partial \mathbb{E}_n \Rightarrow X \in \mathbb{E}_n), \text{ což je spor.}$$

- (11) **Průměr množiny** M v metrickém prostoru (P, d) je hodnota (vč. nevlastní)

$$\boxed{\text{diam } M = \sup_{X, Y \in M} d(X, Y)}.$$

Přitom víme, že supremum shora neohraničené množiny je rovno $+\infty$. Definujeme $\text{diam } \emptyset = 0$. Pak tedy platí $\text{diam } M < +\infty$ (je konečné číslo), resp. $\text{diam } M = +\infty$, právě když M je **ohraničená**, resp. **neohraničená** v (P, d) , popř. v \mathbb{E}_n (při ekvivalentních metrikách d, ϱ).

- (12) **Vzdálenost bodu** A **od množiny** M v metrickém prostoru (P, d) je infimum množiny všech reálných čísel $d(A, X)$, kde bod X proběhne množinu M , tj. číslo $\text{dist}(A, M) = \inf\{d(A, X) \mid X \in M\}$. Jestliže $A \in M$, pak $\text{dist}(A, M) = 0$. Může však být $\text{dist}(A, M) = 0$, a přitom $A \notin M$. Které z bodů na obr. 3.6 mají posledně zmíněnou vlastnost?

- (13) **Vzdálenost množin** M_1, M_2 v metrickém prostoru (P, d) je hodnota

$$\boxed{\text{dist}(M_1, M_2) = \inf\{d(X, Y) \mid X \in M_1, Y \in M_2\}}.$$

Platí $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Rightarrow \text{dist}(M_1, M_2) = 0$, avšak obráceně $\text{dist}(M_1, M_2) = 0 \not\Rightarrow M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

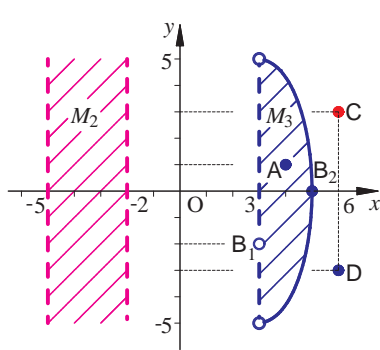
3.3.10 Příklady s poznámkou

- (a) **Otevřený interval** (a, b) reálné osy \mathbb{E}_1 je **otevřená množina**. Když totiž $x \in (a, b)$, pak okolí $\mathcal{O}_\delta(x)$, kde zvolíme $\delta = \min\{x - a, b - x\}$, leží celé v intervalu (a, b) .
- (b) **Okolí** $\mathcal{O}_\delta(A)$ bodu A z \mathbb{E}_n nebo obecně z nějakého metrického prostoru (P, d) , tj. také **otevřená koule** $B(A, \delta)$, **jsou otevřené množiny**. Když totiž $X \in B(A, \delta)$, pak vzdálenost $d(X, A) < \delta$. Zvolíme-li $\delta_1 = \delta - d(X, A)$, pak $\mathcal{O}(X, \delta_1) \subset B(A, \delta)$. Načrtněte si.
- (c) Protože tedy každý otevřený, resp. uzavřený interval reálné osy je otevřená, resp. uzavřená množina, mají slova „otevřený“, resp. „uzavřený“ stejný význam jako u dříve zavedených n -rozměrných množin, tj. u koule, kvádrů (intervalu), krychle i úsečky.

3.3.11 Příklad Množina $M_1 = \{[x, y] \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ představovaná v \mathbb{E}_2 kruhem o poloměru 1, z něhož je vyjmut střed $[0, 0]$, není množina otevřená, a protože není ani uzavřená, tak to není kompaktní. Je to však ohraničená množina, neboť ji můžeme celou vnořit do dvojrozměrné koule, vlastně kruhu $B_2([0, 0], 2)$. Načrtněte si. Co by M_1 představovala v \mathbb{E}_3 ?

3.3.12 Příklad Množina $M_2 = \{[x, y] \mid -5 < x < -2\}$, kde $-\infty < y < +\infty$, je v \mathbb{E}_2 pás bodů na obr. 3.6 mezi přímkami $x = -5$, $x = -2$, je otevřená v \mathbb{E}_2 . Není ohraničená, protože ji nelze vnořit do žádné dvojrozměrné otevřené koule (tj. kruhu). Dále je $\text{diam } M_2 = +\infty$, $\text{dist}([0, 0], M_2) = 2$.

3.3.13 Příklad Množina



Obr. 3.6

$$M_3 = \{[6, -3]\} \cup \left\{ [x, y] \mid \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \wedge x > 3 \right\}$$

v \mathbb{E}_2 je ohraničená (Viz obr. 3.6) poloelipsou (se středem $[3, 0]$, délkami poloos $a = 2, b = 5$) a úsečkou na přímce $x = 3$. Bod $A[4, 1]$ je vnitřní bod, $B_1[3, -2]$ na úsečce je bod hraniční a nepatří do M_3 , zatímco $B_2[5, 0]$ je také hraniční bod, ale $B_2 \in M_3$. Bod $C[6, 3]$ je vnější, bod $D[6, -3]$ je izolovaný bod množiny M_3 , a jako **každý izolovaný bod je bodem hraničním**. Body A, B_1, B_2 jsou zároveň hromadné body množiny M_3 . Dále je

$$M_3^\circ = \{[x, y] \mid \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{25} < 1 \wedge x > 3\},$$

$$\partial M_3 = \{[6, -3]\} \cup \{[3, y] \mid y \in [-5, 5]\} \cup \left\{ [x, y] \mid \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1 \wedge x \geq 3 \right\},$$

$$\bar{M}_3 = \{[6, -3]\} \cup \left\{ \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \wedge x \geq 3 \right\}.$$

M_3 obsahuje jen část své hranice, konkrétně neobsahuje hromadné body na čárkované úsečce, a není proto ani otevřená ani uzavřená. Dále je $\text{diam } M_3 = 10$, $\text{dist}(M_2, M_3) = 5$, $\text{dist}([6, 0], M_3) = 1$, $\text{dist}([3, 0], M_3) = 0$, i když $[3, 0] \notin M_3$, $A \in M_3 \Rightarrow \text{dist}(A, M_3) = 0$ atd.

3.3.14 Poznámka Nyní přehledně uvedeme několik tvrzení a vztahů, jejichž důkazy většinou nejsou obtížné, a které nám ujasní mnoho dříve uvedených pojmů.

- (1) **Sjednocení** konečného počtu nebo také *nekonečně* mnoha, přesněji *spočetně* mnoha, *otevřených* množin a průnik konečného počtu otevřených množin jsou *otevřené* množiny.

Průnik nekonečně (*spočetně*) mnoha otevřených množin nemusí už být otevřená množina, neboť

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

není otevřená množina v \mathbb{E}_1 . Charakterizujte ji pojmy z 3.3.8 až 3.3.10.

- (2) **Průnik** konečného počtu nebo také *nekonečně* (*spočetně*) mnoha *uzavřených* množin a sjednocení konečného počtu uzavřených množin jsou *uzavřené* množiny.

Analogicky, sjednocení nekonečně (*spočetně*) mnoha uzavřených množin nemusí být uzavřená množina, neboť

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{n}{n+1}\right] = [0, 1)$$

není uzavřená množina v \mathbb{E}_1 . Charakterizujte ji.

- (3) **Uzávěr** \bar{M} množiny M je nejmenší uzavřená množina obsahující množinu M , tj. průnik všech uzavřených množin obsahujících M .

(4) Množina M v metrickém prostoru P je v něm *otevřená*, právě když její *doplňek*, tj. $P \setminus M$, je *uzavřenou* množinou v P .

(5) *Vlastnosti uzávěru množin*

$$\bar{\emptyset} = \emptyset, \quad M \subseteq \bar{M}, \quad \overline{\bar{M}} = \bar{M}, \quad M_1 \subset M_2 \Rightarrow \bar{M}_1 \subseteq \bar{M}_2, \quad \overline{M_1 \cup M_2} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$$

(6) *Uzávěr \bar{M} každé množiny M obsahuje body tří typů:*

1. izolované body množiny M
2. hromadné body množiny M , které patří do M (tj. $M' \cap M \neq \emptyset$)
3. hromadné body množiny M , které nepatří do M .

(7) *Pro každou množinu M tedy platí*

$$\bar{M} = M \cup \partial M = M \cup M' = M^\circ \cup \partial M, \quad M^\circ \cap \partial M = \emptyset.$$

Proto se někdy *uzavřená množina* definuje rovností $\bar{M} := M \cup \partial M$ místo našeho $\bar{M} := M \cup M'$.

3.3.15 Poznámka k následující větě o nekonečných ohraničených množinách v \mathbb{E}_n Z poznámky 3.3.9 část (9) víme, že množina všech kladných celých čísel \mathbb{N}^* je v \mathbb{E}_1 izolovaná, $\partial \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$, je *neohraničená* a ovšem spočetná, tj. *nekonečná*, přesto však žádné reálné číslo není jejím hromadným bodem. Je přirozené položit si otázku, zda také mezi nekonečnými avšak ohraničenými množinami existují množiny, které by se nezhušťovaly kolem žádného hromadného bodu. Kupodivu žádná taková množina v euklidovských prostorech \mathbb{E}_n neexistuje. To však má např. ten důsledek, že **nekonečně mnoho bodů ve čtverci nelze rozmístit rovnoměrně, tj. tak, aby se nezhušťovaly kolem nějakého hromadného bodu**. Přesněji to formuluje následující existenční věta.

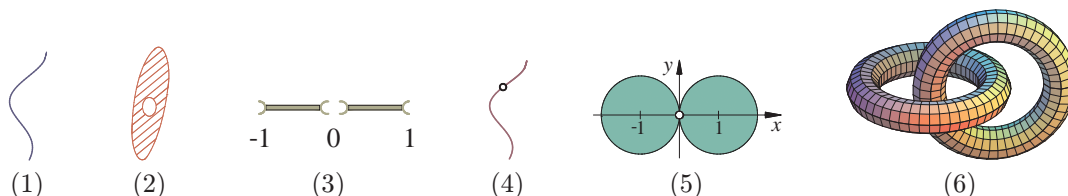
3.3.16 Věta o hromadném bodě nekonečných ohraničených množin v \mathbb{E}_n Každá nekonečná ohraničená množina v euklidovském prostoru \mathbb{E}_n má aspoň jeden hromadný bod. ★

3.3.17 Tři konvergenční věty v \mathbb{E}_n (o bodu uzávěru, o hraničním bodě, o kompaktu)

1. **Věta (o bodu uzávěru)** Bod $A \in \mathbb{E}_n$ je bodem uzávěru \bar{M} množiny $M \subset \mathbb{E}_n$, tj. platí $A \in \bar{M}$, právě když existuje taková bodová posloupnost $\{X_k\}$ v množině M , že platí $\lim X_k = A$. ★
2. **Věta (o hraničním bodě)** Bod $A \in \mathbb{E}_n$ je hraničním bodem množiny $M \subset \mathbb{E}_n$, tj. $A \in \partial M$, když existuje bodová posloupnost $\{X_k\}$ v M a zároveň posloupnost $\{Y_k\}$ v $\mathbb{E}_n \setminus M$, že platí $\lim X_k = \lim Y_k = A$. ★
3. **Věta (o kompaktu)** Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ je v něm kompaktní, právě když z každé bodové posloupnosti v M lze vybrat posloupnost, která konverguje k bodu množiny M . ★

3.3.18 Příklad Interval $[0, +\infty)$ *není kompaktní* v \mathbb{E}_1 , neboť je to sice množina v \mathbb{E}_1 uzavřená, ale nikoli ohraničená. Podle předchozí věty musí existovat v tomto intervalu posloupnost, konkrétně je to např. posloupnost $\{n\}$, ze které už nelze vybrat konvergentní posloupnost (platí $\lim n = +\infty, \lim(2n - 1) = +\infty$ apod.).

3.3.19 Příklad Interval $(0, 1]$ *není kompaktní* v \mathbb{E}_1 , neboť je to sice množina v \mathbb{E}_1 ohraničená, avšak není tam uzavřená, tudíž v intervalu $(0, 1]$ ve shodě s předešlou 1. větou musí existovat posloupnost v něm obsažená, konkrétně je to posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$, jejíž limita 0 už nepatří do $(0, 1]$, tj. není bodem uzávěru tohoto intervalu. Podle (negace) předešlé 3. věty o kompaktu musí existovat v $(0, 1]$ posloupnost, konkrétně je to opět např. posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$, ze které už nelze vybrat konvergentní posloupnost mající limitu v $(0, 1]$. Protože platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, má podle věty 3.2.25 na str. 45 o existenci vybrané konvergentní posloupnosti také každá vybraná posloupnost stejnou limitu, tj. nulu. Ta ovšem nepatří do $(0, 1]$.



Obr. 3.7 Souvislé a nesouvislé množiny

3.4 Souvislý metrický prostor. Souvislá množina. Oblast. Konvexní množina

3.4.1 Pojem SOUVISLOST množiny Z běžné řeči máme každý intuitivní představu, co slova souvislý a souvislost znamenají. Řekneme-li, že (metrický) prostor je *souvislý*, představíme si množinu, která „drží pohromadě“, což odpovídá situacím (1), (2) v obr. 3.7, a tedy nerozpadá se na dvě či více „částí“, jako je tomu v dalších situacích (3), (4), (5), (6).

Můžeme si však také vybavit prostor, ve kterém je možné přejít z libovolného místa na jiné, avšak tato vlastnost by už představovala podstatně silnější (speciálnější) vlastnost, a to tzv. „obloukovou“ souvislost. V mnoha podmnožinách euklidovských prostorů se oba pojmy shodují, takže intuice nás až tak neklame. Souvislost je tzv. *topologický pojem*, tj. je vlastností samotného prostoru a vůbec nezávisí na tom, jak je prostor vnořen do prostoru většího.

V části (10) poznámky 3.3.9 jsme ukázali, že prázdná množina \emptyset a celý prostor \mathbb{E}_n jsou *triviální případy obojetných množin*, tj. množin, které jsou zároveň otevřené i uzavřené. Mohou však existovat i vlastní podmnožiny, které jsou otevřené i uzavřené. Tak např. v prostoru izolovaných bodů, který má aspoň dva prvky, je každá množina otevřená i uzavřená. Na reálné ose \mathbb{E}_1 však žádná taková (neprázdňá) množina není. Metrický prostor (M, d) , $M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s metrikou $d(x, y) = |y - x|$ je sjednocením dvou množin $M_1 = (-\infty, 0)$ a $M_2 = (0, \infty)$, které jsou otevřené v \mathbb{R} .

Ukazuje se, že pojem souvislosti nějakého prostoru se opravdu dá založit na tom, zda v něm existují ještě další obojetné množiny. Řekneme, že metrický prostor P je *nesouvislý*, existují-li neprázdňé disjunktní otevřené množiny P_1, P_2 (tj. $P_1 \neq \emptyset \neq P_2$, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$) tak, že $P = P_1 \cup P_2$. V opačném případě říkáme, že P je *souvislý*. Zároveň je nám ale vzhledem k části (4) poznámky 3.3.14 jasné, že smysl vyslovené definice zůstane zachován, když v ní nahradíme slovo „otevřené“ slovem „uzavřené“. Můžeme proto vyslovit následující definici souvislého prostoru.

3.4.2 Definice Metrický *prostor* (P, d) se nazývá *souvislý*, když neexistuje vlastní (tj. netriviální) obojetná množina $M^* \subset P$. *Množina* $M \subset P$ se nazývá *souvislá*, když je souvislý podprostor (M, d) . V opačném případě jsou prostor, resp. jeho množina *nesouvislé*. Říkáme, že *množina* M *roztíná souvislý prostor* P , když $M \subset P$ a podprostor $P \setminus M$ je nesouvislý.

3.4.3 Lemma Metrický prostor P není souvislý právě tehdy, když v něm existují otevřené neprázdňé disjunktní množiny $M_1, M_2 \subset P$ (tj. $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$) takové, že $M_1 \cup M_2 = P$.

Důkaz:

1. \Rightarrow Necht' P není souvislý prostor. Tedy v něm existuje neprázdňá obojetná množina M_1 . Její doplněk $M_2 = P \setminus M_1$ je také obojetná množina a platí $M_1 \cup M_2 = P$.
2. \Leftarrow Necht' $M_1, M_2 \subset P$ jsou otevřené množiny $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = P$. Množina M_2 je proto doplněkem množiny M_1 , a tedy je uzavřená a celkově je to obojetná neprázdňá vlastní množina v P . To ale znamená, že P není souvislý. ♣

3.4.4 Věta (o souvislých množinách reálné osy \mathbb{E}_1) Množina M reálné osy je souvislá, právě když platí,

$$\text{jestliže } a, b \in M, a < c < b, \text{ pak } c \in M. \star$$

3.4.5 Důsledek 1 Není-li M souvislá množina, pak existují čísla $a, b \in M$, $c \in \mathbb{R}$, taková, že platí $a < c < b$, $c \notin M$.

3.4.6 Důsledek 2 Jednobodová množina a každý interval (s konci nebo bez koncových bodů) konečný či nekonečný jsou jedinými (netriviálními) souvislými množinami na reálné ose \mathbb{E}_1 .

3.4.7 Poznámka Z příkladu množiny $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uvedeném v odstavci 3.4.1 je zřejmé, že *sjednocení souvislých množin nemusí být souvislá množina*. Avšak platí praktická a názorná věta:

3.4.8 Věta (o souvislých množinách metrického prostoru) Nechť M_α (α je index probíhající nějakou (v obecném případě) neuspořádanou množinou indexů) je systém souvislých množin metrického prostoru P . Jestliže

$$\bigcap_{\alpha} M_\alpha \neq \emptyset, \text{ pak sjednocením } \mathcal{M} = \bigcup_{\alpha} M_\alpha \text{ je souvislá množina. } \star$$

3.4.9 Důsledek Když v metrickém prostoru P ke každým dvěma bodům $A, B \in P$ existuje souvislá množina $\mathcal{M} \subset P$ taková, že $A, B \in \mathcal{M}$, pak P je souvislý prostor.

Důkaz: Uvažujme pevný bod $A \in P$ a označme C_B souvislou množinu obsahující (a „spojující“) body A, B . Označíme-li $\mathcal{M} = \bigcup_{B \in \mathcal{M}} C_B$, přičemž $\bigcap_{B \in \mathcal{M}} C_B$ je neprázdný (neboť obsahuje aspoň A), pak podle předchozí věty je \mathcal{M} souvislý prostor. ♣

3.4.10 Definice Otevřená souvislá množina M metrického prostoru P se nazývá **oblast**. Obvykle se značí písmeny D, G, Ω atd. Množina M se nazývá **uzavřená oblast**, je-li uzávěrem některé oblasti, tj. existuje-li taková oblast M_1 , že platí $M = \bar{M}_1$.

3.4.11 Poznámka Jak už jsme naznačili v odstavci 3.4.1, jsou na obr. 3.7 množiny ze situací (1), (2) souvislé a ze situací (3), (4), (5), (6) nesouvislé. Přestože určovat souvislost konkrétní množiny může být složité, čtenář se může pokoušet *určovat souvislost množiny pomocí věty 3.4.8 nebo jejího důsledku*. V případě otevřené množiny má k tomu navíc následující větu 3.4.12, která často bývá formulována jako definice otevřené oblasti. V situaci (6) jde o množinu v \mathbb{E}_3 tvořenou dvěma do sebe zaklesnutými prstenci – anuloidy. Množina M ze situace (5), která je v \mathbb{E}_2 dána sjednocením dvou uzavřených kruhů bez počátku

$$M = \{[x, y] \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{[0, 0]\},$$

není souvislá, i když obě její části mají společný bod uzávěru, tj. počátek.

Oblasti v \mathbb{E}_n je pak např. každý otevřený n -rozměrný interval (neboli otevřený kvádr či krychle), popř. otevřená koule. Nyní uvedeme důležitou větu opírající se o pojem polygon, který je definován hned po jejím uvedení.

3.4.12 Věta (o oblasti a polygonu) Otevřená neprázdná množina $M \subseteq \mathbb{E}_n$ je oblast⁷⁾ právě tehdy, když každé dva její body A, B lze spojit polygonem (tj. lomenou čarou), který celý leží v množině M . ★

3.4.13 Definice Mějme m různých bodů ($m \geq 2$) $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{E}_n$. Utvořme posloupnost na sebe navazujících uzavřených úseček (definice 3.2.39) $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m$. Množina $L \subset \mathbb{E}_n$, která je sjednocením všech takových $m-1$ úseček, se nazývá **polygon** nebo **lomená čára** $A_1A_2 \dots A_m$ **spojující body** A_1, A_m , s **krajními body** A_1, A_m (Viz obr. 3.8). Píšeme

$$L = A_1A_2 \dots A_m = A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_{m-1}A_m.$$

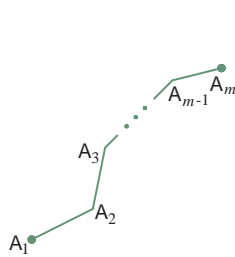
(Úsečku A_1A_m můžeme považovat za speciální případ polygonu)

3.4.14 Poznámka Předchozí věta říká, že otevřená množina je souvislá právě tehdy, když se z každého jejího výchozího bodu dostaneme po úsečkách do libovolného jiného jejího bodu, aniž množinu opustíme. Na obr. 3.9 je znázorněn polygon spojující body A, B ležící uvnitř čárkovaně znázorněné oblasti. Musíme upozornit, že ukázat souvislost množiny ze situace (1) na obr. 3.7, kterou by čtenář nazval „čára“, „křivka“, (resp. „cesta“, „dráha“, „trajektorie“) atd., není vůbec tak jednoduché, i když je to tam „vidět“. Vždyť obecný pojem rovinná nebo prostorová **křivka** (nezaměňujeme s pojmem *rovnice křivky* v \mathbb{E}_2 nebo \mathbb{E}_3) podal až ukrajinský matematik Pavel Samuilovič Uryson (1898 - 1924).

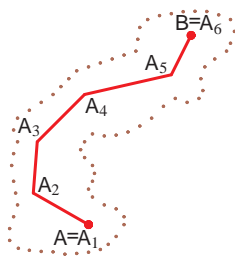
Křivka je jeden z nejkomplicovanějších pojmů v topologii, a přitom ve škole se s tímto termínem setkáváme velmi brzy. Následující věta je v diferenciálním a integrálním počtu často využívána.

3.4.15 Věta (o zachování souvislosti množiny spojitým zobrazením) Spojitý obraz souvislé množiny je souvislý. Tj., je-li $\Phi : (P_1, d_1) \rightarrow (P_2, d_2)$ zobrazení metrického prostoru P_1 do P_2 , které je *spojité* (str. 68) na souvislé množině $M \subset P_1$, pak také její obraz $\Phi(M)$ je souvislá množina (v P_2). ★

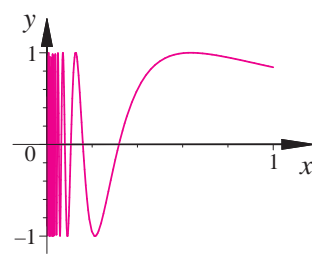
⁷⁾Jde o tzv. *lineárně souvislou* množinu.



Obr. 3.8 Polygon



Obr. 3.9 Oblast



Obr. 3.10

3.4.16 Příklad Pomocí předchozí věty lze vytvářet souvislé množiny. Poněvadž každý neprázdný interval v \mathbb{E}_1 je souvislá množina, je v \mathbb{E}_2 také elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ souvislá, protože je spojitým obrazem intervalu $[0, 2\pi]$ vytvořeným *spojitým zobrazením* Φ o složkách $\phi_1 : x = a \cos t$, $\phi_2 : y = b \sin t$, tj. píšeme

$$\Phi(t) = [\phi_1, \phi_2] = [a \cos t, b \sin t], \text{ resp. } \vec{\Phi}(t) = (a \cos t, b \sin t),$$

kde $\Phi(t)$, resp. $\vec{\Phi}(t)$ je tzv. **bodové zobrazení** neboli **bodová funkce**, resp. **vektorová funkce**. Zároveň tak značíme i hodnoty těchto funkcí v nějakém bodě $t \in [0, 2\pi]$. Uvedené termíny prozatím nebudeme podrobněji rozebírat.

3.4.17 Příklad souvislého grafu nespojité funkce (a přitom bez bodu nespojitosti prvního druhu) dává, jak lze odvodit, funkce (Viz obr. 3.10)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

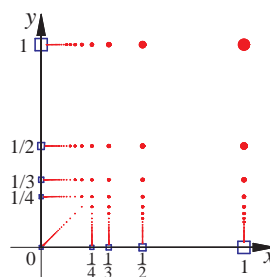
Vzpomeňte si, proč tato funkce není v bodě $x = 0$ spojitá zprava? Částečně napovězme, že v počátku neexistuje limita funkce zprava $f(0+)$, neboť lze ukázat, že v každém pravostranném (redukováném) okolí počátku nabývá $f(x)$ jak hodnot $+1$, tak hodnot -1 . Příklad ukazuje, že **spojitost funkce definované na intervalu a pojem souvislosti jejího grafu nejsou totéž**.

3.4.18 Poznámka Přísnějším požadavkem než souvislost je to, aby každé dva body A, B dané množiny M bylo možné spojit pouze *jednou* úsečkou AB, která je obsažena v M . Taková **množina** se nazývá **konvexní**.

Např. množina ze situace (2) obr. 3.7 je uzavřenou oblastí, která není konvexní, stejně jako není konvexní např. n -rozměrná koule bez svého středu. Na obr. 3.11 je znázorněna nejprve nekonvexní uzavřená oblast, a pak konvexní oblast.



Obr. 3.11 Nekonvexní a konvexní množina



Obr. 3.12 Izolovaná (diskrétní) množina bodů

3.5 Cvičení

1 Rozhodněte, zda daná posloupnost $\{X_k\}$ v příslušném prostoru \mathbb{E}_n konverguje, a vyčíslete její případnou limitu, když

a) $X_k = \left[\frac{\sin(k)}{k}, 3, e^{-k} \right]$ $\{ \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = [0, 3, 0] \}$

b) $X_k = \left[\frac{k}{e^k}, \frac{\sqrt{k+4}-k}{k}, k^2 e^{-k} \right]$ $\{ X_k \rightarrow [0, -1, 0] \}$

c) $X_k = \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{k^2}{k+1}}, \frac{\sqrt{k^2+4}-k}{k}, \arctan(k) \right]$ $\{ [e, 0, \frac{\pi}{2}] \}$

d) $X_k = [1, (-1)^k]$ $\{ \text{diverguje, neboť limita posloupnosti 2. souřadnic neexistuje} \}$

- e) $X_k = [\sqrt{k+2} + \sqrt{k-2}, (-1)^k k]$ { diverguje, proč? }
 f) $X_k = \left[\frac{(-1)^k}{k^2}, 0, \sqrt{k+2} - \sqrt{k-2} \right]$. { [0, 0, 0] }

2 Na obr. 3.12 je znázorněna množina $M \subset \mathbb{E}_2$, $M = \{[\frac{1}{k}, \frac{1}{m}] \in \mathbb{E}_2 \mid k, m = 1, 2, \dots\}$. Najděte hromadné body množiny M v \mathbb{E}_2 a dokažte, že jsou hromadné, ukažte, že M se skládá jen z izolovaných bodů a na základě toho zapište M množinovou rovností.

{ počátek $O[0, 0]$, body osy x : $B_k[\frac{1}{k}, 0]$, body osy y : $B_m[0, \frac{1}{m}]$, kde $k, m \in \mathbb{N}^*$ }

Řešení: Protože $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ a také $\frac{1}{m} \rightarrow 0$, dostáváme z těchto limit ihned hromadné body O, B_k, B_m . Zkoumejme nejprve libovolné δ -okolí $\mathcal{O}_\delta(B_k)$. Pak existuje $m_k \in \mathbb{N}^*$ takové, že $\frac{1}{m_k} < \delta$ a vzdálenost bodů B_k a $X_k[\frac{1}{k}, \frac{1}{m_k}]$ je $\varrho(B_k, X_k) = \sqrt{(\frac{1}{k} - \frac{1}{k})^2 + (\frac{1}{m_k})^2} = \frac{1}{m_k} < \delta$, tedy $X_k \in \mathcal{O}_\delta(B_k)$. Tak jsme v libovolném okolí $\mathcal{O}_\delta(B_k)$ našli aspoň jeden bod $X_k \in M$, takže podle definice jsou body B_k hromadné. Stejně lze ukázat, že i B_m jsou hromadné body. Zvolme ještě libovolné okolí $\mathcal{O}_\delta(O)$ počátku. Pak existuje $m_0 \in \mathbb{N}^*$ takové, že $\frac{1}{m_0} < \frac{\delta}{2}$. Vezměme nyní např. bod ležící na symetrále 1. kvadrantu $X_0[\frac{1}{m_0}, \frac{1}{m_0}] \in M$. Pak $\varrho(O, X_0) = \sqrt{(\frac{1}{m_0})^2 + (\frac{1}{m_0})^2} < \sqrt{(\frac{\delta}{2})^2 + (\frac{\delta}{2})^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$, tedy existuje bod $X_0 \in \mathcal{O}_\delta(O)$, a proto počátek je zbývajícím hromadným bodem.

Množina M není uzavřená, tj. $M \neq \bar{M}$, neboť neobsahuje své hromadné body, není ani otevřená, neboť nemá vnitřní body, tj. $M^\circ = \emptyset$. M je rovna své hranici složené jen z izolovaných bodů. Je to tedy izolovaná neboli diskrétní množina, kterou lze charakterizovat rovnostmi

$$M = \partial M \setminus M' = \partial M.$$

3 Dá se dokázat, že v prostoru $P = (\mathbb{R}^2, d)$, kde $X = [x_1, x_2], Y = [y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$, je funkcí

$$d(X, Y) = \frac{|x_1 - y_1|}{1 + |x_1 - y_1|} + \frac{|x_2 - y_2|}{1 + |x_2 - y_2|}$$

definována metrika, tj. P je metrický prostor. Dokažte, že P je ohraničený prostor. Přitom např. definujeme: *Existuje-li $K > 0$ tak, že $d(X, Y) < K \forall X, Y \in M$, říkáme, že **metrický prostor** (M, d) je **ohraničený** (též **omezený**).* { je ohraničený, je totiž $d(X, Y) < 2$, takže $\exists K \geq 2$ }

4 Je prázdná množina \emptyset kompaktní? { neuvádíme }

5 Určete, které z množin jsou otevřené, uzavřené v \mathbb{E}_1 a stanovte jejich hranice

- a) $[-1, 1]$ b) $(1, 3)$ c) $[0, 4)$ d) $(-2, 5]$ e) $\{10, 20\}$. { neuvádíme }

6 Zjistěte vnitřek M° a hranici ∂M množiny M , když

- a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid y = x^2\}$ { $M^\circ = \emptyset, \partial M = M$ }
 b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 < 9\}$
{ $M^\circ = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 + y^2 < 9\}, \partial M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x \leq 3 \wedge y = \sqrt{9 - x^2} \vee x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 3 \vee 0 \leq x \leq 3 \wedge y = 0\}$ }
 c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 - 4x + y^2 \leq 0\}$
{ $M^\circ = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 - 4x + y^2 < 0\}, \partial M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x \in [0, 1] \wedge x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \vee x \in [1, 2] \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$ }
 d) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid 3x + 2y - z > 1\}$ { $M^\circ = M, \partial M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid 3x + 2y - z = 1\}$ }
 e) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid \frac{z^2}{c^2} > \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, abc \neq 0$ (tj. konstanty jsou nenulové).
{ $M^\circ = M, \partial M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\}$ tj. ∂M je (kolmá) eliptická kuželová plocha s osou v ose z a vrcholem v počátku }

7 Určete ještě uzávěr \bar{M} všech množin z předešlého příkladu.

{ stačí si uvědomit známou rovnost $\bar{M} = M^\circ \cup \partial M$ }

8 Charakterizujte danou množinu, tj. zda M je otevřená, uzavřená, ohraničená, kompaktní, zda je to oblast, popř. konvexní oblast. Pokud lze, situaci načrtněte.

- a) $M = \{[x, z] \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq y^2\}$ { neohraničená konvexní uzavřená oblast, tedy obsahuje svou hranici ∂M }
 b) $M = [-2, 2] \times (3, 5] \subset \mathbb{E}_2$ { ohraničená konvexní (tj. souvislá) oblast, $\bar{M} = [-2, 2] \times [3, 5]$ }

- c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge xy \leq 1\}$ $\{\{\text{neohraničená uzavřená (nekonvexní) oblast, } \bar{M} = M\}\}$
- d) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$
 $\{\{\text{ohraničená (nekonvexní) oblast, } \bar{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}\}\}$
- e) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\}$ $\{\{\text{neohraničená konvexní uzavřená oblast (tj. } \bar{M} = M)\}\}$
- f) $M = \{[x, y, z, u] \in \mathbb{E}_4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \leq 1\}$
 $\{\{\text{jednotková (uzavřená) čtyřrozměrná koule } B_4(\mathbf{O}, 1), \text{ (tj. } \bar{M} = M), \text{ je konvexní kompaktní oblast}\}\}$
- g) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 \mid |x| + |y| + |z| \leq \delta, \delta > 0\}$. $\{\{\text{třetí z pěti } \mathbf{platónských těles}$ (Viz 2.3.4):
pravidelný (uzavřený) **oktaedr** neboli **osmistěn** se středem v počátku \mathbf{O} , délkou hrany $\sqrt{2}\delta$, výškou a zároveň průměrem diam $M = 2\delta$. Jeho průmětem do roviny xy je čtverec s úhlopříčkami o délce 2δ ležícími na osách x a y . Vnitřek oktaedru M° zde představuje oktaedrické δ -okolí počátku s *oktaedrickou metrikou* definovanou v (2.4) na str. 32. Je to konvexní kompaktní oblast}

9

- a) Proveďte totéž co v předešlém příkladě pro množiny, které jsou doplňky (komplementy) tam uvedených množin M do daného prostoru \mathbb{E}_n . Půjde tedy o množiny $\mathbb{E}_n \setminus M$.
- b) U předešlého příkladu částí a) až e) množinově zapište hranici ∂M , načrtněte ji a co nejpřesněji určete její název.
- c) U předešlého příkladu částí a) až e) zapište vnitřek M° těch množin.

10 Nejen v teorii aproximace, ale zejména v moderních numerických variačních metodách, jakými je v inženýrských aplikacích např. **metoda konečných prvků**, je cílem nalézt k danému prvku (bodu) A metrického prostoru (P, d) s metrikou d v daném podprostoru (M, d) , tj. $M \subset P$, takový bod $X_0 \in M$, aby (Viz poslední část v 3.3.9)

$$d(A, X_0) = \text{dist}(A, M).$$

Existuje-li takový bod $X_0 \in M$, nazývá se *nejbližší bod* prvku A v množině M , častěji však nese název **bod nejlepší aproximace** prvku A v podprostoru M .

Rozhodněte (za pomoci náčrtu), zda nejlepší aproximace X_0 vždy existuje.

$\{\{\text{nemusí existovat nebo nemusí být jediný}\}\}$

11 Čemu je rovna množina všech bodů, jejichž vzdálenost od dané množiny M je nulová?
 $\{\{\text{uzávěru množiny, tj. } \bar{M}\}\}$

12 Dokažte, $X \in \bar{M} \Leftrightarrow \text{dist}(X, M) = 0$.

13 Rozhodněte, zda množina \mathbb{Q} všech racionálních čísel, která je hustá v množině \mathbb{R} všech reálných čísel, je také souvislá.
 $\{\{\text{není souvislá}\}\}$

14 Pro jaké tři různé body $A, B, C \in \mathbb{E}_n$ platí pro euklidovskou metriku ϱ v trojúhelníkové nerovnosti speciálně rovnost, tj. $\varrho(A, C) = \varrho(A, B) + \varrho(B, C)$?

Návod: Načrtněte si v \mathbb{E}_2 a použijte v odpovědi pojem *polygon*.

$\{\{\text{body tvoří polygon } L = ABC \text{ takový, že je částí přímky } \overleftrightarrow{AC}\}\}$

Část II

Základy diferenciálního počtu funkcí více proměnných

4 Úvod k diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných

4.1 Pojem reálné funkce více argumentů

4.1.1 Úvod S pojmem reálné funkce více proměnných (argumentů) se čtenář setkal už ve škole. Např. objem V rotačního válce závisí jak na poloměru r jeho podstavy, tak na jeho výšce v a je vyjádřen vztahem $V = \pi r^2 v$. Také ztráty na elektrickém proudu I , který po dobu t prochází vodičem o odporu R , Joulovým teplem Q , jež přitom vzniká, jsou podle Joulova zákona dány rovností $Q = RI^2 t$. Jsou tedy závislé na třech veličinách R, I, t .

Počátky diferenciálního (i integrálního) počtu funkcí několika argumentů spadají do 2. poloviny 18. století a na jejich základech se kromě celé řady vynikajících matematiků podílel i geniální **Leonhard Euler** (1707 – 1783).

4.1.2 Úmluva o tolerantnosti k označení a interpretaci Dříve než matematicky přesně zavedeme pojem (reálné) funkce více argumentů, dodejme ve shodě s dřívější úmluvou a poznámkou k rozdílnosti bodové a vektorové interpretace (byly to úmluva 3.1.1 na str. 41 a poznámka 3.2.40) několik řádků. Jak je v matematické analýze obvyklé, nebudeme až do konce tohoto textu tak striktně rozlišovat mezi bodovou a vektorovou interpretací uspořádané n -tice reálných čísel. Přesněji řečeno, často ztotožníme bodový euklidovský prostor \mathbb{E}_n s jeho vektorovým zaměřením $\mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$, tj. $\mathbb{E}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$. Např. při úvahách o zobrazení se lze přiklonit k interpretaci vektorové. Dohodněme se, že v dalších kapitolách budeme souřadnice bodu $A \in \mathbb{E}_n$ zapisovat v kulatých závorkách, a to i v obrázcích, tj.

$$A = (a_1, \dots, a_n),$$

přičemž označení bodů velkými písmeny zachováváme. Pouze při úvahách převážně geometrických, např. v kapitolách o křivkových a plošných integrálech, je vhodné body a vektory interpretovat rozdílně jako doposud. Konkrétněji o těchto otázkách pojednáme až v článku 4.2.5 na str. 63 a v příkladech za ním následujících.

4.1.3 Definice Mějme množinu D bodů X z euklidovského prostoru \mathbb{E}_n , tj. $D = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n\} \subseteq \mathbb{E}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Zobrazení f množiny D do reálné osy \mathbb{E}_1 , tedy $D \xrightarrow{f} \mathbb{E}_1$, které každému bodu $X \in D$ přiřadí (jednoznačně) jisté reálné číslo (bod) $u \in \mathbb{E}_1$, tj. $X \xrightarrow{f} u$, se nazývá **reálná funkce n reálných nezávisle proměnných** neboli **argumentů** x_1, \dots, x_n .

Funkci označujeme zápisem $u = f(x_1, \dots, x_n)$ nebo $u = f(X)$, přičemž v užším smyslu $f(X)$ představuje též jen hodnotu **funkce f v bodě X** . Množina vzorů D označená též $D(f), D_f$ nebo $\text{dom } f$ (anglicky: domain) je **definiční obor funkce f** a množina obrazů $f(D_f) = \{f(X) \mid X \in D_f\}$ označovaná též $H(f), H_f$ je **obor hodnot** funkce f , též obor hodnot závislé proměnné u .

Řekneme, že **funkce f je definována na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$** , když $M \subseteq D_f$. **Graf funkce f** označovaný $G(f)$ nebo graf f je množina

$$G(f) := \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{E}_{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in D_f \wedge x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}, \quad (4.1)$$

která může být chápána ve smyslu ztotožnění $\mathbb{E}_{n+1} \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_{n+1}) \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ jako podmnožina prostoru \mathbb{E}_{n+1} , a tedy může být (při pevně zvoleném kartézském systému souřadnic) nazvaná též **kartézský graf** funkce f (To, že funkční hodnota funkce f je poslední souřadnice bodu grafu, je jen věc naší úmluvy).

4.1.4 Některé důležité pojmy Funkce n argumentů je tedy každé zobrazení z \mathbb{E}_n do $\mathbb{E}_1 = (\mathbb{R}, \varrho)$, kde ϱ je euklidovskou metrikou (vzdáleností). Pokud je $D_f = \emptyset$, je i $H_f = \emptyset$ a f se nazývá **prázdná funkce**, jejíž zavedení je užitečné při definici různých operací s funkcemi. Dále nevyklučujeme, že $n = 1$, tedy při úvahách máme zahrnuty funkce jednoho argumentu $f(x)$, kde mluvíme o bodu $x \in \mathbb{E}_1$ namísto těžkopádného $X = (x) \in \mathbb{E}_1$. V prostorech nižších dimenzí \mathbb{E}_2 nebo \mathbb{E}_3 se často indexování argumentů vyhýbáme a píšeme

$$z = f(x, y), \text{ též } z = z(x, y) \text{ v } \mathbb{E}_2 \text{ či } u = f(x, y, z), \text{ též } u = u(x, y, z) \text{ v } \mathbb{E}_3.$$

Je-li funkce f v \mathbb{E}_n dána vzorcem a není-li zadán její definiční obor, rozumíme jím *maximální* definiční obor (též *přirozený* definiční obor), tedy všechny body $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$, pro které mají všechny výrazy vystupující v tom vzorci smysl. Připomeňme také, že dvě funkce f_1, f_2 se sobě rovnají, když mají nejen stejné obory hodnot, tj. $H_{f_1} = H_{f_2}$, ale též stejné definiční obory, tj. $D_{f_1} = D_{f_2}$, což např. nenastane, jsou-li to množiny různých dimenzí.

Funkce n -argumentů se nazývá funkce **ohraničená (omezená)**, když množina $H_f \subset \mathbb{E}_1$ je ohraničená. Sami si vyslovte definici funkce *shora*, resp. *zdola ohraničené*. **Supremum** $\sup f$ **funkce** f definujeme jako supremum množiny H_f . Analogicky se definuje *infimum*, resp. maximum a minimum funkce. Analogicky jako u funkce jedné proměnné definujeme následující *operace s funkcemi* a funkce $f + g, f - g, f g, \frac{f}{g}, |f|$.

4.1.5 Poznámka Čtenář po čase zjistí, že klíčem k pochopení vlastností funkcí více argumentů bude seznámit se především s funkcemi dvou argumentů, jejichž graf v \mathbb{E}_3

$$\text{graf } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in D_f \wedge z = f(x, y)\}$$

je v jednoduchých případech nějaká plocha v \mathbb{E}_3 , a tu lze znázornit zobrazovacími metodami, např. volným rovnoběžným promítáním nebo matematickým softwarem na počítači. Průmětem (kolmým) grafu z \mathbb{E}_3 do roviny xy je zřejmě definiční obor. U funkcí tří a více argumentů, jejichž grafy byly částí \mathbb{E}_n , kde $n \geq 4$, a kde geometrická představivost selhává, si často pomůžeme fyzikální interpretací nebo se užívá nomogramů.

Při sestrojování grafu funkce $f(x, y)$ je výhodné sestrojit řezy grafu souřadnicovými rovinami nebo rovinami s nimi rovnoběžnými nebo rovinami procházejícími některou ze souřadnicových os. Této metodě zkoumání grafu funkce říkáme **metoda řezů**. Ve složitějších případech musíme využít metod diferenciálního počtu (např. vyšetřování extrémů funkce). Kolmé průřezy řezů grafu funkce rovinami rovnoběžnými s rovinou xy do roviny xy (tj. půdorysy těchto řezů) nazýváme **vrstevnice funkce**. Konečná množina vrstevnic vytvoří tzv. **vrstevnicový diagram**, tedy jakousi „mapu plochy“, která bývá východiskem k získání představ o grafu funkce. **Vrstevnice** jsou *rovinné křivky (někdy i rovinné plochy, to u konstantních funkcí – viz cvičení 4.9 [6h])*, které **leží v definičním oboru funkce** D_f v rovině xy a mají rovnice $f(x, y) = c = \text{const}$. Jde o jednoparametrický systém křivek, kde za parametr c dosazujeme vhodné hodnoty.

Obecně může být situace geometricky komplikovaná, protože taková „křivka“ či „plocha“ se může značně vymykat naší dosavadní intuitivní představě.

Poznamenejme závěrem, že **průnikové křivky řezů** grafu funkce $f(x, y)$ rovinami (o rovnicích $z = c, c \in H_f$) rovnoběžnými s rovinou xy , které promítáme do vrstevnic, a **nezaměňujeme je s nimi**, jsou rovinné křivky v prostoru \mathbb{E}_3 , které mají rovnice

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c, \text{ kde } c \in \mathbb{R} \text{ je } \textit{kóta průnikové křivky}. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.6 Definice Mějme funkci f a $c \in H_f$ vhodnou konstantu. Potom množina bodů z D_f

$$V_c = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$$

se nazývá **vrstevnice funkce f o kótě c** nebo stručně **izokřivka (izočára)**. V případě \mathbb{E}_3 se množina bodů z D_f

$$H_c = \{(x, y, z) \in D_f \mid f(x, y, z) = c\}$$

nazývá **vrstevnicová plocha**, respektive v případě $\mathbb{E}_n, n \geq 4$, (**vrstevnicová nadplocha**) nebo při $n \geq 3$ též (**vrstevnicová**) **c -hladina** nebo **konstantní hladina funkce f** nebo stručně **izoplocha**. Při znázorňování c -hladiny funkce f připisujeme k této hladině (k vrstevnici, v případě \mathbb{E}_2) číslo c jako příslušnou kótu v závorkách: (c) .

Poznamenejme, že z praxe už izokřivky (vrstevnice) nebo izoplochy (konstantní hladiny) známe jako *izobary, izoterm, ekvipotenciální hladiny* apod.

4.1.7 Příklad Ekonomové odvodili, že v některých případech je celková výroba P při daném rozložení nákladů výrobního procesu na částku R určenou na mzdy a na částku S určenou na ostatní výdaje (investice, suroviny atd.) definována tzv. Cobbovou-Douglasovou funkcí produkce

$$P(R, S) = cR^a S^{1-a},$$

kde $a, c \in \mathbb{R}, a \in (0, 1)$ jsou konstanty dané konkrétními podmínkami. Ukažme, že zvětší-li se t -krát obě složky nákladů, zvětší se t -krát i celková produkce. Jak se změní produkce, vzrostou-li mzdy o 50% při poklesu ostatních nákladů na polovinu?

Řešení: $P(tR, tS) = ct^a R^a t^{1-a} S^{1-a} = t c R^a S^{1-a} = tP(R, S)$.

Podobně

$$P\left(\frac{3}{2}R, \frac{1}{2}S\right) = c\left(\frac{3}{2}\right)^a R^a \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} S^{1-a} = \frac{3^a}{2} P(R, S).$$

Produkce bude $\frac{3^a}{2}$ násobek původní produkce.

4.1.8 Příklad Vyšetřeme definiční obor D_f , načrtněme vrstevnicový diagram, a na základě něj, popř. dalších pomocných řezů, také graf funkce $z = f(x, y) = y^2 - x^2$.

Řešení: $D_f = \mathbb{E}_2$, neboť jde o polynom $p_2(x, y)$ druhého stupně dvou argumentů (tzv. bikvadratický polynom), a ten je definován v celé rovině xy .

1. krok (k náčrtu grafu): *sestrojíme vrstevnicový diagram*

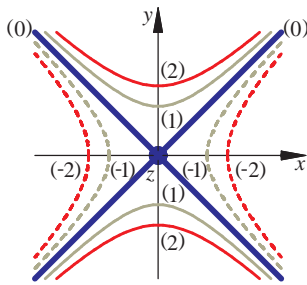
$y^2 - x^2 = c = \text{const.}$, tj. vrstevnicový diagram (obr. 4.1) je tvořen jednoparametrickým systémem hyperbol, $c = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow y = \pm x$, tyto dvě přímky, asymptoty hyperbol, jsou vrstevnice V_0 o nulové kótě, které splývají s řezem grafu funkce rovinou xy a jsou zakresleny *silně plně*,

$c = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$, hyperbola (*plně*) s vrcholy $(0, 1)$, $(0, -1)$, kóty jsou v závorkách,

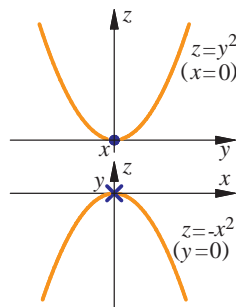
$c = 2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 2 \Rightarrow (y/\sqrt{2})^2 - (x/\sqrt{2})^2 = 1$, (*plně*) hyperbola s vrcholy $(0, \pm\sqrt{2})$,

podobně postupujeme pro $c < 0$ (vrstevnice jsou ale *čárkovaně*). Přitom kladně orientovaná osa z splývá s počátkem $O(0, 0)$ a míří proti pozorovateli. Z vrstevnicového grafu, konkrétně z kolmých průmětů do půdorysny $z = 0$ řezů grafu funkce rovinami $z = 0, 1, 2, -1, -2$, a pak ještě z pomocných řezů souřadnicovými rovinami (**2. krok: řez nárysou** $x = 0 \Rightarrow z = y^2$ a **3. krok: řez bokorysnu** $y = 0 \Rightarrow z = -x^2$, kde kladně orientovaná osa y míří od pozorovatele, viz obr. 4.2) plyne, že graf charakterizují hyperboly a paraboly.

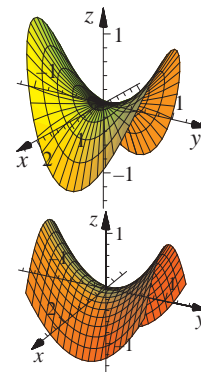
Skutečně, **4. krok: načrtneme graf**, který má tvar sedla. Je to známá kvadrika **hyperbolický paraboloid** neboli *sedlová plocha* (obr. 4.3) se **sedlovým bodem funkce** v počátku $O(0, 0)$, jemuž na grafu funkce f odpovídá **sedlo funkce** v bodě $(O, f(O)) = (0, 0, 0)$.



Obr. 4.1 Vrstevnicový diagram



Obr. 4.2 Řezy grafu souřadnicovými rovinami $x = 0, y = 0$



Obr. 4.3 Graf hyperbolického paraboloidu $z = y^2 - x^2$

Následuje ukázka zdrojového textu v Maple pro variantu zobrazenou v dolní části obr. 4.3.

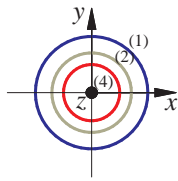
```
> with(plots):
> f:=plot3d(y^2-x^2,x=-1..1,y=-1..1):
> b:=arrow([0,0,0],vector([0,0,1.39]),color=black,width=[0.005, relative],
  head_length=[0.17, relative],head_width=[12, relative]):
> c:=arrow([0,0,0],vector([0,1.58,0]),color=black,width=[0.005,relative],
  head_length=[0.12, relative],head_width=[11.8, relative]):
> d:=arrow([0,0,0],vector([3.18,0,0]),color=black,width=[0.005,relative],
  head_length=[0.105, relative],head_width=[5.5, relative]):
> e:=textplot3d([[2.95,0,-0.25,'x'],[0,1.5,-0.25,'y'],[0,-0.2,1.15,'z']],
  color=black,font=[TIMES,ITALIC,11]):
> display(f,b,c,d,e,tickmarks=[3,3,3],orientation=[27,62],
  view=[-1.45..3.18,-1.57..1.58,-1.59..1.39],labels=[z,x,y],axes=normal,
  labelfont=[TIMES,ROMAN,1],style=PATCH,shading=ZGRAYSCALE,scaling=unconstrained);
```

4.1.9 Příklad Určeme definiční obor funkce $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ a pomocí vrstevnicového diagramu znázorníme její graf.

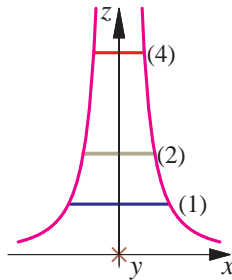
Řešení: Definiční obor je $D_z = \mathbb{E}_2 \setminus \{(0, 0)\}$, tj. rovina xy bez počátku, $H_z = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

1. krok: $\frac{1}{x^2+y^2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{c} > 0$, tj. též kóty c můžeme volit pouze kladné, což je zřejmé také z oboru hodnot H_z naší funkce. Vrstevnicový diagram tvoří jednoparametrický *systém kružnic* se středem v počátku (a poloměrem $\sqrt{\frac{1}{c}}$, který se zmenšuje se zvětšující se kótou c), viz obr. 4.4. Grafem tedy musí být nějaká rotační plocha, takže ušetříme jeden pomocný řez (pro boční pohled), např. nárysnou $x = 0$ (tj. ušetříme **2. krok**). Při řezu bokorysnou $y = 0$ (**3. krok**) jsou do obrázku také umístěny *průnikové křivky* řezů, tj. kružnice o rovnicích [Viz (4.2)] $z = \frac{1}{x^2+y^2}$, $z = c$ (kde za c postupně volíme 1, 2, 4), které se zde jeví jako úsečky. Celý postup zachycuje několik dosazení a obr. 4.4, obr. 4.5, obr. 4.6. Je-li $z = 1 : \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$; $z = 2 : \frac{1}{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \doteq (0,71)^2$; $z = 4 : \frac{1}{x^2+y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$.

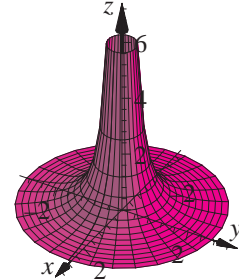
Grafem funkce je rotační plocha na obr. 4.6 vzniklá rotací kolem osy z křivky o rovnici $z = \frac{1}{x^2}$ v rovině xz , což je hyperbola stupně 2. Výsledná plocha připomíná televizní vysílač na Ještědu nad Libercem.



Obr. 4.4



Obr. 4.5

Obr. 4.6 Graf funkce $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

4.1.10 Příklad Vyšetřeme a vyšrafováním vyznačme definiční obor D_f funkce

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)} + \sqrt{\sin(x^2+y)}$$

Řešení: Necht k je celé číslo, tj. $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{llll} x - y^2 \geq 0 & \wedge & \ln(1 - x^2 - y^2) \neq 0 & \wedge & 1 - x^2 - y^2 > 0 & \wedge & \sin(x^2 + y) \geq 0 \\ x \geq y^2 & & 1 - x^2 - y^2 \neq 1 & & x^2 + y^2 < 1 & & 0 + k2\pi \leq x^2 + y \leq \pi + k2\pi \\ & & x^2 + y^2 \neq 0 & & & & -x^2 + 2k\pi \leq y \leq -x^2 + (2k+1)\pi \end{array}$$

Uzavřená oblast uvnitř paraboly $x = y^2$ s osou v ose x a vrcholem $(0, 0)$, ležící v 1. a 4. kvadrantu, včetně paraboly.

$(x, y) \neq (0, 0)$,
tj. $\mathbb{E}_2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Rovina xy bez počátku $(0, 0)$.

Otevřený kruh $S = (0, 0), r = 1$.

$k = 0 : -x^2 \leq y \leq -x^2 + \pi$
 $k = 1 : -x^2 + 2\pi \leq y \leq -x^2 + 3\pi$
atd. Uzavřená oblast ohraničená parabolou $y = -x^2$ a posunutou parabolou $y = -x^2 + \pi$ s osami v ose y .¹⁾

D_f je průnikem čtyř množin. Je znázorněn vyšrafováním na obr. 4.7. Jde o křivočarý trojúhelník OAB. Vyčíslíme nejprve např. x -ové souřadnice bodu B, tj. porovnáme jeho y -ové souřadnice na parabole a kružnici $y = y \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x = 1-x^2 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow 0 < x_B = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq 0,618$. Pak $y_B = \sqrt{x_B} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \doteq 0,786$. $B = (x_B, y_B) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) = (0,618; 0,786)$. Bod A je určen, neboť $A = (y_B, -x_B) = (0,786; -0,618)$. Zbývá zapsat D_f . Použijeme oba způsoby, které budeme využívat v integrálním počtu. $D_f = M^x = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x \leq x_B \wedge -x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \vee x_B \leq x \leq x_A \wedge -x^2 \leq y < \sqrt{1-x^2} \vee x_A \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}$.

$$D_f = M^y = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y_A \leq y \leq 0 \wedge \sqrt{-y} \leq x < \sqrt{1-y^2} \vee 0 \leq y \leq y_B \wedge y^2 \leq x < \sqrt{1-y^2}\}.$$

M^x je tzv. *množina elementární (normální) vzhledem k ose x* , M^y je *množina elementární (normální) vzhledem k ose y* . Vidíme, že vyjádřit D_f pomocí M^y je jednodušší, neboť je sjednocením jen dvou množin, zatímco M^x tří množin.

¹⁾Při vyšších výškách mostů, např. u železničního mostu v Bechyni, je použit jako hlavní nosný prvek železobetonový oblouk ve tvaru klesající paraboly.

4.1.11 Příklad Vyšetřeme definiční obor D_f a konstantní hladiny H_c funkce $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

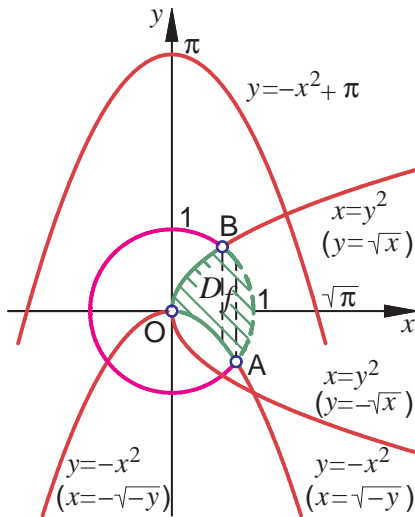
Řešení: Argument (\cdot) funkce $\arcsin(\cdot)$ musí být v intervalu $[-1, 1]$, tj.

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

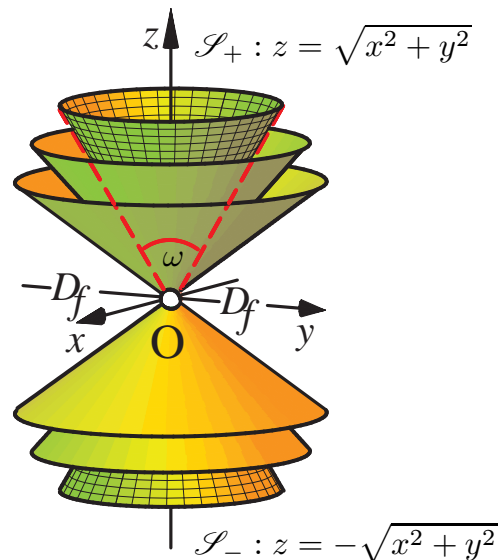
Grafem hraničních funkcí $z_+ = \sqrt{x^2 + y^2}$, resp. $z_- = -\sqrt{x^2 + y^2}$ je horní, resp. dolní část **rotační kuželové plochy** \mathcal{S}_+ , resp. \mathcal{S}_- s osou v ose z , vrcholem v počátku $O(0, 0, 0)$ a vrcholovým úhlem ω , který je pravý, tj. $\omega = \frac{\pi}{2}$ (Viz obr. 4.8). Oba grafy, tj. celou rotační kuželovou plochu $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-$, umíme vyjádřit jediným zápisem pomocí (ternární) relace $z^2 = x^2 + y^2$. Definiční obor D_f je pak ta část prostoru \mathbb{E}_3 , z něž vyjmeme počátek O a vnitřek rotačního kuželového prostoru. Protože obor hodnot funkce $\arcsin(\cdot)$ je $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, lze volit pouze kóty $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] =: J$. Konstantní hladina H_c příslušná kótě c je pak množina všech řešení rovnice

$$\arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = c \iff \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin c, \quad c \in J,$$

a je tedy opět jednou z kuželových ploch s vrcholem v počátku O a osou z bez tohoto počátku, které vyplňují D_f . V případě, kdy $c = 0$, pak kuželová plocha degeneruje v rovinu xy ($z = 0$) bez počátku.



Obr. 4.7



Obr. 4.8

4.2 Zobrazení množin a funkce v \mathbb{E}_n

4.2.1 Poznámka Funkce více argumentů jsme definovali jako zobrazení f z \mathbb{E}_n do \mathbb{E}_1 . S pojmem zobrazení budeme i nadále často operovat, nejvíce v integrálním počtu, ale bude vhodné mít i pro úvahy o spojitosti a limitě funkcí o zobrazení přesnější představu. K tomu poslouží následující odstavce.

4.2.2 Definice **Zobrazením** Φ (čti: *velké fí*) **typu** (n, m) , podrobněji označeným ${}^{(n,m)}\Phi$, prozatím rozumíme zobrazení neprázdné bodové množiny $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{E}_n$ do bodového prostoru \mathbb{E}_m , tj.

$$\Phi : \mathbb{E}_n \supseteq M \longrightarrow \mathbb{E}_m.$$

(V poznámce 4.2.5 o interpretacích uvidíme, že lze také uvažovat zobrazení z $\mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{V}_m$, z $\mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{V}_m$, či z $\mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$)

4.2.3 Poznámka s definicemi obrazu a vzoru množiny Zobrazení typu (n, m) tedy každé uspořádané n -tici reálných čísel z množiny $M \subseteq \mathbb{E}_n$, přiřadí uspořádanou m -tici z \mathbb{E}_m . Analogicky jako u funkce, množinu M všech vzorů zobrazení Φ nazveme jeho **definiční obor** $D_\Phi \subseteq \mathbb{E}_n$, množinu všech jeho obrazů nazveme **obor hodnot** zobrazení Φ a označíme $H_\Phi \subseteq \mathbb{E}_m$, tj. platí $H_\Phi = \Phi(D_\Phi)$.

Mějme dále zobrazení Φ .

- Nechť množina M_1 je částí M , tj. $M_1 \subseteq M$. Pak množinu všech obrazů odpovídajících všem vzorům z množiny M_1 , tj.

$$\Phi(M_1) = \{Y \mid Y = \Phi(X) \wedge X \in M_1\} = \{\Phi(X) \mid X \in M_1\}, \quad (4.3)$$

nazveme **obraz množiny** M_1 při zobrazení Φ .

- **Vzor** (proobraz) **množiny** $N_1 \subseteq N$ při zobrazení $\Phi : M \rightarrow N$ se nazývá množina $\Phi^{-1}(N_1) = \{X \in M \mid \Phi(X) \in N_1\}$. Zdůrazněme, že $\Phi^{-1}(N_1)$ je nerozdělitelný symbol a má smysl, i když neexistuje inverzní zobrazení Φ^{-1} . Je-li ovšem Φ prosté zobrazení M na N , je $\Phi^{-1}(N_1)$ rovněž **obraz** množiny N_1 při inverzním zobrazení Φ^{-1} .

4.2.4 Příklad Reálná funkce n -reálných argumentů, tedy zobrazení

$$\Phi : \mathbb{E}_n \supseteq M \rightarrow \mathbb{E}_1, \text{ je zobrazení } {}^{(n,1)}\Phi \text{ typu } (n, 1).$$

4.2.5 Poznámka o interpretacích Je-li $n = m = 3$, lze takové zobrazení ${}^{(3,3)}\Phi$ fyzikálně modelovat jako **elastickou** (pružnou) **deformaci** tělesa, kdy body $X = (x_1, x_2, x_3)$ tělesa mění svou polohu. Některá zobrazení z \mathbb{E}_1 do \mathbb{E}_n ($n = 2, 3$) nám v dalším poslouží pro popis křivek v rovině nebo prostoru, jiná z \mathbb{E}_2 do \mathbb{E}_3 zase pro popis ploch v prostoru.

- Vztah (4.3) z 4.2.3

$$Y = \Phi(X) \text{ rozepíšeme jako } (y_1, \dots, y_m) = \Phi(x_1, \dots, x_n). \quad (4.4)$$

Protože se jedná o rovnost bodů o m souřadnicích, lze poslední rovnost rozepsat jako systém m rovností pro jednotlivé souřadnice bodu Y . Souřadnice bodu $\Phi(X)$ značíme $\phi_1(X), \dots, \phi_m(X)$ a nazýváme je **souřadnicové funkce**, stručně **souřadnice** (též **složky** či **komponenty**) **zobrazení** typu (n, m) . Při pevné kartézské soustavě souřadnic v \mathbb{E}_m lze pak psát tzv. **definující rovnice zobrazení** Φ

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = \phi_m(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \text{ resp. vektorově } \vec{y} = \vec{\Phi}(\vec{x}) \text{ nebo } \vec{y} = \vec{\Phi}(X), \quad (4.5)$$

kde **při dosavadní bodové interpretaci**, přesněji interpretaci **bod**→**bod** (tj. bod se zobrazí na bod), píšeme

$$Y = (y_1, \dots, y_m) = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)) = (\phi_1(X), \dots, \phi_m(X)) = \Phi(X), \quad (4.6)$$

resp. analogicky **při vektorové interpretaci zobrazení**, tj. interpretaci **vektor**→**vektor** nebo **bod**→**vektor**, kdy obrazem je (aritmetický) vektor ze zaměření euklidovských prostorů, píšeme

$$\mathbb{V}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n) \ni \vec{x} \xrightarrow{\vec{\Phi}} \vec{y} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_m) \equiv \mathbb{V}_m \text{ nebo } \mathbb{E}_n \ni X \xrightarrow{\vec{\Phi}} \vec{y} \in \mathbb{V}_m. \quad (4.7)$$

Zobrazení

$$\vec{y} = \vec{\Phi}(\vec{x}) = (\phi_1(\vec{x}), \dots, \phi_m(\vec{x})) = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)) \quad (4.8)$$

nebo

$$\vec{y} = \vec{\Phi}(X) = (\phi_1(X), \dots, \phi_m(X)) = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)) \quad (4.9)$$

se pak nazývá **vektorová funkce** n -reálných proměnných a je definovaná na jisté množině vektorů $M \subseteq \mathbb{V}_n$ nebo bodů $M \subseteq \mathbb{E}_n$, kde $M = D_{\phi_1} \cap D_{\phi_2} \cap \dots \cap D_{\phi_m}$.

• Je-li $n = m$, pak se ve fyzikálních aplikacích, kdy je nejčastěji $n = m = 3$, vektorová funkce označovaná tam např. symbolem \vec{f} , avšak definovaná obvykle na bodové množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$, nazývá též **vektorové pole**, přesněji je to uspořádaná dvojice $(M, \vec{f}(X))$. V tomto případě používaná interpretace **bod**→**vektor** vede k zápisu do vektorové rovnosti ve tvaru

$$\vec{y} = \vec{f}(X), \text{ kde bod } X \in M \subseteq \mathbb{E}_n. \quad (4.10)$$

• Pojem zobrazení Φ typu (n, m) bude užitečný jak při geometrických úvahách o křivkách a plochách v \mathbb{E}_3 , které jsou speciálním případem tzv. **k -rozměrné variety** v euklidovském prostoru libovolné dimenze, tak také v příkladech z fyzikální teorie pole. Shrňme dosavadní úvahy do následující

4.2.6 Definice Nechť \mathbb{E}_n , $n = 1, 2, 3$, je euklidovský prostor, v němž je pevně zvolena kartézská soustava souřadnic a označme \mathbb{V}_n jeho (vektorové) zaměření $\mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$. Mějme množinu $M \subseteq \mathbb{E}_n$. Každé zobrazení $M \rightarrow \mathbb{E}_m$ (kde v aplikacích je $m = 3$, popř. $m = 2$), resp. $M \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{E}_m)$ [přičemž zobrazení $M \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{E}_m)$ může připouštět též $M \subseteq \mathbb{V}_n$] se nazývá **bodová**, resp. **vektorová funkce n -reálných proměnných** (s definičním oborem M a s hodnotami v \mathbb{E}_m , resp. ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_m)$).

4.2.7 Zápis bodových a vektorových funkcí a operace s nimi Bodovou funkci Y s definičním oborem $M \subseteq \mathbb{E}_1$, resp. $M \subseteq \mathbb{E}_2$ můžeme (při pevné kartézské soustavě souřadnic) v \mathbb{E}_3 zapsat ve tvaru

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \text{ resp. } Y(v_1, v_2) = (y_1(v_1, v_2), y_2(v_1, v_2), y_3(v_1, v_2)), \quad (4.11)$$

kde bod (číslo) $t \in \mathbb{E}_1$, resp. bod $V := (v_1, v_2) \in \mathbb{E}_2$, a kde y_1, y_2, y_3 jsou výše zmíněné *souřadnicové funkce*²⁾ bodové funkce Y , přičemž t , resp. v_1, v_2 se nazývají **vnitřní souřadnice bodu** Y nebo parametry.

Podobně zapíšeme vektorovou funkci \vec{y} s definičním oborem $M \subseteq \mathbb{E}_1$, resp. $M \subseteq \mathbb{E}_2$, popř. $M \subseteq \mathbb{V}_2$ zobrazovaným do \mathbb{E}_3 , která má tytéž souřadnicové funkce y_1, y_2, y_3 , jako bodová funkce Y , předpisem

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \text{ resp. } \vec{y}(v_1, v_2) = (y_1(v_1, v_2), y_2(v_1, v_2), y_3(v_1, v_2)), \quad (4.12)$$

kde bod $t \in \mathbb{E}_1$, resp. bod $(v_1, v_2) = V \in \mathbb{E}_2$, popř. vektor $(v_1, v_2) = \vec{v} \in \mathbb{V}_2$.

V praktických úlohách se indexům vyhýbáme a píšeme místo v_1, v_2 např. u, v a místo x_1, x_2, x_3 např. x, y, z . Podobně, je-li dána vektorová funkce $\vec{u}(t)$, používá se v diferenciální geometrii i inženýrských aplikacích pro zjednodušení místo přesnějšího zápisu $\vec{y} = \vec{u}(t)$, též $\vec{u} = \vec{u}(t)$, kde symbol \vec{u} označuje jak závisle proměnnou, tak vektorovou funkci.

Z analytické geometrie víme, že součtem bodu X a nenulového vektoru \vec{u} je bod Y , takže $X + \vec{u} = Y$. Podobně součtem bodové funkce X a vektorové funkce \vec{u} je bodová funkce, kterou označíme $X + \vec{u}$ a definujeme předpisem

$$(X + \vec{u})(t) := X(t) + \vec{u}(t), \text{ resp. } (X + \vec{u})(u_1, u_2) := X(u_1, u_2) + \vec{u}(u_1, u_2).$$

Její definičním oborem je průnik definičních oborů funkcí X, \vec{u} , přičemž součtová operace se provede sčítáním odpovídajících si souřadnicových funkcí (složek).

Zcela analogicky bychom mohli pro reálnou funkci f , bodové funkce X, Y a vektorové funkce $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ definovat (po složkách) funkce $X - Y = \vec{z}$, $f\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

4.2.8 Příklad Předpisem

$$\vec{f}(x, y, z) = (\sin xyz, \ln(x^2 + y^2 + z^2))$$

je definována (nelineární) vektorová funkce $\vec{f}: \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_2$ s definičním oborem $D_{\vec{f}} = \mathbb{V}_3 \setminus \{\vec{0}\}$, kde $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

4.2.9 Příklad Předpisem pro sílu \vec{F}

$$\vec{F}(X) \equiv \vec{F}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \sqrt{2} \right), \quad (4.13)$$

uvažovaným často jen na jisté ohraničené množině $M \subset D_{\vec{F}}$, např. nechť $M = \{X \in \mathbb{E}_3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, r \in \mathbb{R}^+\}$, tedy na uzavřené kouli o poloměru r s vyjmutým počátkem O , v němž je její střed, je definováno **silové vektorové**⁴⁾ **pole** (M, \vec{F}) , stručněji, silové pole \vec{F} o souřadnicích (souřadnicových funkcích) $F_1(X) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $F_2(X) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $F_3(X) = \sqrt{2}$. Geometricky je F_1, F_2, F_3 **pravoúhlý průmět vektoru** \vec{F} do osy x, y, z .

4.2.10 Poznámka s příkladem lineárního zobrazení Je-li speciálně v (4.5) **zobrazení** $\Phi: \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{V}_m$ typu (n, m) **lineární** (tj. obraz součtu vektorů je součet obrazů těch vektorů a obraz násobku vektoru je násobek obrazu toho vektoru), pak je dokázáno, že toto zobrazení lze zprostředkovat maticí **A**

$$\vec{y} = \vec{\Phi}(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}, \quad \text{kde } \mathbf{A} \text{ je typu } (m, n), \text{ a } \vec{x}, \vec{y} \text{ jsou sloupcové vektory.} \quad (4.14)$$

Uvažujeme-li speciálně lineární zobrazení typu (n, n) , pak se často nazývá **lineární transformace**, matice je čtvercová a zobrazení je prosté a na množinu, právě když **A** je regulární matice (tj. $\det A \neq 0$).

Například při zobrazení ^(2,2) $\vec{\Phi}$ nazvaném **kontrakce** (stlačení, zkrácení) s koeficientem kontrakce $k = \frac{1}{2}$ se body roviny dvakrát přiblíží k počátku, takže platí

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}x_1 \\ y_2 &= \frac{1}{2}x_2 \end{aligned}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\vec{x},$$

kde **A** je **matice kontrakce**. Existuje inverzní zobrazení $\vec{\Phi}^{-1}$ dané inverzní maticí \mathbf{A}^{-1} a nazývané **dilatace** (roztahení).

²⁾Místo y_1, y_2, y_3 často píšeme indexy vpravo nahoře, tj. y^1, y^2, y^3 , chceme-li v mechanice kontinua využívat Einsteinovy součtové konvence.

³⁾Také zde se jedny závorky vynechávají a nepíše se $\vec{F}((x, y, z))$, kde $(x, y, z) = \vec{x} \in \mathbb{V}_3$, stejně jako my nepíšeme $\vec{F}([x, y, z])$, kde bod $[x, y, z] = X \in \mathbb{E}_3$.

⁴⁾Přesněji, sílu \vec{F} interpretujeme, jak víme, v každém bodě $X \in M$ jako **vázaný vektor** (X, \vec{F}) .

4.2.11 Poznámka Pro zobrazení ${}^{(n,m)}\Phi$ zůstávají v platnosti všechny definice (např. o rovnosti zobrazení) a věty o zobrazení *prostém, na množinu, inverzním*. Dále platí, že zobrazení ${}^{(n,m)}\Phi$, kde $n > m$, $D_{(n,m)}\Phi = \mathbb{E}_n$, nemůže být prosté (tj. injekce) a zobrazení ${}^{(n,m)}\Phi$, kde $n < m$, nemůže být na množinu (tj. surjekce, nakrytí).

4.2.12 Poznámka k zobrazení složenému, k zúžení a rozšíření zobrazení Připomeňme několik definic probíraných u zobrazení.

• Mějme neprázdné množiny M_1, M_2 , z nichž každá patří do jiného prostoru (třeba metrického), ať pro určitost $M_1 \subseteq \mathbb{E}_n$, $M_2 \subseteq \mathbb{E}_m$. Necht⁵⁾ Ψ je zobrazení zobrazující M_1 do \mathbb{E}_m (tj. $\Psi : M_1 \rightarrow \mathbb{E}_m$) takové, že $\Psi(M_1) \subseteq M_2$, a Φ ať je zobrazení množiny M_2 do prostoru \mathbb{E}_l (tj. $\Phi : M_2 \rightarrow \mathbb{E}_l$). Pak zobrazení $\Upsilon : M_1 \rightarrow \mathbb{E}_l$, které předepisuje bod $Y \in \mathbb{E}_l$

$$Y = \Upsilon(X), \quad \Upsilon(X) = \Phi(\Psi(X)), \quad \text{kde bod } X \in M_1, \quad (4.15)$$

se nazývá **složené zobrazení** (*kompozice zobrazení*) ze zobrazení Ψ, Φ (v tomto pořadí) a značíme je

$$\Phi(\Psi), \text{ popř. } \Phi \circ \Psi.$$

Zobrazení Φ , resp. Ψ nazýváme **vnějším**, resp. **vnitřním** zobrazením složeného zobrazení $\Phi(\Psi)$. Je-li $l = 1$, tj. když zobrazení Φ je (reálnou) funkcí, mluvíme o **složené funkci** místo o složeném zobrazení.

Tvrzení: Je-li vnitřní i vnější zobrazení **prosté**, je takové i **složené zobrazení**.

• Jsou-li $\Phi : M \rightarrow N, \Psi : M_1 \rightarrow N$ taková zobrazení, že $M_1 \subset M (M_1 \neq M)$ a $\Phi(X) = \Psi(X)$ pro každý bod $X \in M_1$, nazývá se zobrazení Ψ **zúžení** (restrikce) **zobrazení Φ na množinu M_1** a píšeme $\Psi = \Phi|_{M_1}$. Zobrazení Φ je **rozšíření** (prodloužení) **zobrazení Ψ na množinu M** .

4.2.13 Poznámka V odstavci 4.2.5 jsme ukázali, že zobrazení Φ typu (n, m) lze vyjádřit jako uspořádanou m -tici $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ souřadnic, z nichž každá je opět zobrazení typu $(n, 1)$. To však znamená, že ke studiu vlastností zobrazení typu (n, m) euklidovských prostorů stačí studovat jen zobrazení typu $(n, 1)$, což je zobrazení $\mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1$ (do reálné osy), a podle definice 4.1.3 na str. 58 jde o **reálnou** (bodovou) **funkci n reálných argumentů $f(\mathbf{X})$** , kterou **stačí zkoumat podrobněji**.

4.2.14 Definice Mějme f funkci n argumentů. Snížením, resp. zvýšením počtu argumentů při zachování funkčního předpisu, vznikne funkce nazývaná **zúžení funkce**, resp. **rozšíření funkce f** definovaná v prvním případě předpisem

$$u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

kteřá má $(n - 1)$ argumentů, resp. v druhém případě funkce $(n + 1)$ argumentů

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

(Pro jednoduchost je „nový“ argument psán jako poslední.) Zde jde o zúžení či rozšíření funkce vzhledem k množinám z různých prostorů (prostorů různé dimenze).

4.2.15 Příklad Zúžením funkce $f(x, y) = x^2 + y$ jsou např. funkce

$$u_1(x) = f(x, 3) = x^2 + 3, \quad u_2(y) = f(2, y) = 4 + y, \quad \text{apod.}$$

Vzpomeňte, že takovýmto dosazováním za $z = 0, y = 0, x = 0$ atd. jsme získávali průnikové křivky grafu funkce mj. se souřadnicovými rovinami, které nám pomohly při jeho načrtu.

Rozšířením funkce $f(t) = \ln t$ na funkce dvou argumentů jsou např. funkce

$$p(x, y) = \ln x \quad , \quad q(x, y) = \ln y.$$

Rozšířením funkce ze zadání příkladu je též např. funkce

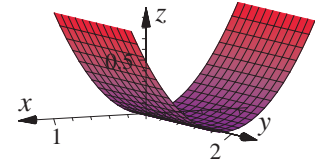
$$q(x, y, z) = x^2 + y.$$

⁵⁾Velká písmena řecké abecedy Φ, Ψ, Υ čtete: *velké fí, velké psí, velké řecké ypsilon*. V definici si je můžete nahradit např. písmeny f, g, h . Načrtněte si celou situaci.

Sami si promyslete, jaké jsou definiční obory zúžení a rozšíření funkce f vzhledem k D_f a jak pro malý počet argumentů získáme z grafu funkce f grafy zúžení nebo rozšíření této funkce.

Pro posledně jmenovaný případ je inspirací následující příklad.

4.2.16 Příklad Grafem funkce dvou argumentů $z = f(x, y) = x^2$ je **kolmá parabolická válcová plocha** (Viz obr. 4.9). Je to přímková plocha, jejímž (kolmým) průmětem do roviny xz je parabola, která je v \mathbb{E}_3 určena rovnicemi $z = x^2, y = 0$. Naše funkce může být chápána jako zúžení funkce $f(x, y) = x^2 + y$ z předešlého příkladu nebo jako rozšíření funkce jednoho argumentu $z = f(x) = x^2$, u které formálně přidáme argument y při zachování funkčního předpisu.



Obr. 4.9

4.2.17 Definice **Elementární funkce** n argumentů (tj. definovaná v \mathbb{E}_n) je každá funkce vytvořená z **elementárních funkcí** neboli **elementárních transcendentů** jednoho argumentu [což jsou *konstantní* funkce, funkce *obecná mocnina* $y = x^r$ ($r \in \mathbb{R}$), $e^x, \ln x$, *goniometrické* funkce $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$, *cyklometrické* funkce $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$, *hyperbolické* funkce, *hyperbolometrické* funkce, a všechny funkce, které lze z uvedených vytvořit konečným počtem *aritmetických operací*, tj. sčítáním, odčítáním, násobením, dělením funkcí, a dále operací (přípustného) *skládání* těchto funkcí⁶⁾] konečným počtem *aritmetických operací* s těmito funkcemi, popř. operacemi *skládání funkcí* (tj. přípustným způsobem provedené složené zobrazení) a *rozšiřování funkcí*.

4.2.18 Příklad Funkce $z = x \ln y + \sqrt{x+y}$ se dá vyjádřit

- 1) jako **funkce** $h(x, y)$ **složená** z jedné *vnější funkce* $f(u, v)$ a dvou *vnitřních funkcí* $g_1(x, y), g_2(x, y)$. Vše lze zapsat např. takto

$$f(u, v) = u + v, \quad D_f = \{(u, v) \in \mathbb{E}_2\},$$

$$g_1 : u = x \ln y = g_1(x, y), \quad g_2 : v = \sqrt{x+y} = g_2(x, y), \text{ kde } u, v \text{ se nazývají } \textit{pomocné argumenty}.$$

$$D_{g_1} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y > 0\}, \quad D_{g_2} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y \geq -x\}.$$

Pak složená funkce $h : h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$ je funkce $h(x, y) = x \ln y + \sqrt{x+y}$, $D_h = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y > 0 \wedge y \geq -x\}$.

- 2) Zadaná funkce je zároveň **elementární funkce** dvou argumentů, neboť je vytvořena ze tří *elementárních* funkcí jednoho argumentu $\alpha(x) = x$, $\beta(y) = \ln y$, $\gamma(y) = y$, jejich *rozšířením* na funkce $p_\alpha(x, y) = x$, $p_\beta(x, y) = \ln y$, $p_\gamma(x, y) = y$, a dalšími podle předešlé definice dovolenými operacemi patrnými z následujícího zápisu

$$z = p_\alpha(x, y)p_\beta(x, y) + g_2(x, y),$$

kde funkce $g_2(x, y) = \sqrt{x+y}$ je (algebraická funkce dvou argumentů) *funkce složená z funkce* $\phi(t)$ *vnější*, tj. $\phi : s = \sqrt{t} = \phi(t)$, a z *funkce* $\psi(x, y)$ *vnitřní*, tj.

$$\psi : t = x + y = p_\alpha(x, y) + p_\beta(x, y) = \psi(x, y),$$

$$g_2(x, y) = \phi(\psi(p_\alpha(x, y), p_\beta(x, y))) = \sqrt{x+y}.$$

4.2.19 Příklad Funkce *signum*, např. $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$, není elementární, jak si ukážeme v odstavci 4.6.4 na str. 73, stejně jako funkce *charakteristika* (tj. *celá část*) $\operatorname{ent} \sqrt{x^2 + y^2}$ ve cvičení 4.9 6h.

4.3 Příklady operátoru a funkcionálu v metrickém prostoru

4.3.1 Poznámka V matematické analýze se často místo termínu *zobrazení* Φ používá termín *operátor* L . V tom případě jsou zobrazovaná množina M a její obraz $\Phi(M)$ nějak specifikovány. Bude stačit, když vyjdeme z prostorů metrických, neboť ze speciálních metrických prostorů pochází nejvíc aplikací, např. týkajících se diferenciálních či integrálních rovnic.

⁶⁾Mezi *elementární funkce* tedy patří i *algebraické funkce*, tj. ty funkce $y = f(x)$, které (v určitém oboru) splňují identicky *algebraickou rovnici* $p(x, y) = 0$, kde $p(x, y)$ je polynom v proměnných x, y . Je to např. funkce $y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$, neboť splňuje rovnici $1 - x^2 - y^2 = 0$ a funkce $p(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ je mnohočlen 2. stupně v proměnných x, y . Jinými slovy, *algebraická funkce* obsahuje v analytickém výrazu $f(x)$ všechny *algebraické operace* (tj. zmíněné *aritmetické operace* a operaci *umocňování* racionálním exponentem) s argumentem x .

4.3.2 Definice Mějme $(P_1, d_1), (P_2, d_2)$ dva metrické prostory. Řekneme, že je dán **operátor** L z **prostoru** P_1 do P_2 , jsou-li dány

- (1) množina $M_1 \subset P_1$
- (2) předpis jednoznačně přiřazující každému prvku (*vzoru*, bodu) $u \in M_1$ určitý prvek (*obraz*) v z množiny $M_2 \subset P_2$; tento prvek označíme Lu , tj.

$$v = Lu. \quad (4.17)$$

Také říkáme, že **operátor** L **zobrazuje** M_1 do M_2 . Množina M_1 se nazývá **definiční obor** operátoru L a značí se D_L nebo $D(L)$, množina H_L všech $v \in M_2$, kterou dostaneme z **operátorové rovnice** (4.17), se nazývá **obor hodnot operátoru** L (tj. $H_L \subset M_2$). Je-li $H_L = M_2$, říkáme, že operátor L zobrazuje množinu M_1 na množinu M_2 .⁷⁾

4.3.3 Příklad Čtvercová matice A n -tého řádu je **maticový operátor**, který podle předpisu $\vec{v} = A\vec{u}$ přiřazuje každému (zde sloupcovému) vektoru $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{V}_n$ vektor \vec{v} téhož typu, tj. z téhož \mathbb{V}_n , kde $A\vec{u}$ je obvyklý součin matic.

4.3.4 Příklad diferenciálního operátoru v $C^k[a, b]$ Pro nezáporné celé číslo k a ohraničený uzavřený interval $[a, b]$ označme $C^k[a, b]$ (též $C^{(k)}[a, b]$) množinu všech funkcí $u = u(x)$ definovaných na intervalu $[a, b]$, které tam jsou spojité a pro $k > 0$ tam mají spojité derivace až do k -tého řádu včetně, přičemž v krajních bodech a , resp. b uvažujeme derivace spojité zprava, resp. zleva. Je-li J interval *otevřený*, pak o funkcích z množiny (prostoru) $C^k(J)$ hovoříme jako o **funkcích třídy** C^k na J . Množina $C^k[a, b]$ je funkcionální (tzv. *úplný*, nebudeme to specifikovat) lineární **normovaný prostor** hladkých funkcí s normou

$$\|u\|_k = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |u^{(i)}(x)| = \max_x |u(x)| + \max_x |u'(x)| + \dots + \max_x |u^{(k)}(x)|.$$

Mějme tzv. lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = g(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.18)$$

s hledanou funkcí $u = u(x)$, kde α, β, γ jsou spojité funkce a g je spojitá pravá strana rovnice, jež jsou zadány. Definujeme-li **diferenciální operátor** L

$$Lu := \alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u, \quad x \in [a, b],$$

pak řešení $u = u(x)$ diferenciální rovnice v operátorovém tvaru

$$Lu = g$$

můžeme hledat v různých funkcionálních prostorech, např. v prostoru $C^2[a, b]$, předpokládáme přitom, že $g \in C^0[a, b]$. S prostorem $C^0[a, b] \equiv C[a, b]$ jsme se už setkali v 2.3.13 na str. 36. Lze ukázat, že **operátor** L je **lineární** (diferenciální operátor 2. řádu), tj. že

$$L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Lu_1 + \lambda_2 Lu_2 \quad (4.19)$$

pro libovolné prvky (funkce) $u_1, u_2 \in C^2[a, b]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

4.3.5 Definice a příklad funkcionálu Je-li prostor obrazů P_2 prostorem reálných čísel (tj. reálná osa \mathbb{E}_1), pak operátor L se nazývá (reálný) **funkcionál**. Příkladem funkcionálu definovaného na (celém) prostoru $L_2(a, b)$ je operátor f definovaný předpisem

$$fu = \int_a^b u(x)dx, \quad (4.20)$$

kteřý každé funkci $u \in L_2(a, b)$ přiřazuje číslo definované *Lebesgueovým integrálem*.

4.4 Spojitost a limita zobrazení (funkcí) v metrických prostorech

Úvahy o zobrazení Φ z tohoto článku lze speciálně přenést na reálnou funkci f n reálných argumentů, jak je zřejmé z nadpisu tohoto článku, přičemž symboliku $\Phi : (P_1, d_1) \rightarrow (P_2, d_2)$ jen nahradíme symbolikou $f : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_1$, takže metriky d_1 , resp. d_2 přejdou v euklidovskou metriku ϱ .

⁷⁾Vlastně si čtenář jen připomněl definici zobrazení při operátorovém zápisu zobrazení. Bylo by možné analogicky definovat operátor prostý, ohraničený atd.

4.4.1 Jak to bylo se spojitostí funkce jednoho argumentu Nechť M je definiční obor D_f funkce $f(x)$ jednoho argumentu, tj. funkce $z \mathbb{E}_1$. **Funkce** $f : \mathbb{E}_1 \supseteq M \rightarrow \mathbb{E}_1$ se nazývá **spojitá v bodě** $a \in M$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in M$ splňující nerovnost $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Tedy δ je funkcí ε , což zapíšeme $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Tam byly (M, d) a $\mathbb{E}_1 = (\mathbb{R}, d)$ dva metrické, konkrétně euklidovské prostory s euklidovskou metrikou, tj. vzdáleností d dvou bodů označovanou tam symbolem ϱ , která je definována (Viz příklad 2.3.2 na str. 32) vztahem

$$d(x, y) = \varrho(X, Y) = |y - x|, \text{ kde } X = [x] \equiv x, Y = [y] \equiv y \in \mathbb{E}_1. \quad (4.21)$$

Tím jsou tam zároveň definována i okolí bodů, potřebná pro úvahy o spojitosti a limitě.

4.4.2 Definice (Cauchy-Weierstrassova) spojitosti zobrazení (funkce) Mějme $P_1 = (M_1, d_1)$, $P_2 = (M_2, d_2)$ dva metrické prostory. **Zobrazení**, resp. **funkce** $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ (tj. $D_\Phi = M_1$) nazveme **spojitými v bodě** $A \in M_1$, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny body $X \in M_1$ splňující $d_1(X, A) < \delta$ platí $d_2(\Phi(X), \Phi(A)) < \varepsilon$. Zobrazení, resp. funkce Φ nazveme **spojitými na** (v) **množině** $M \subset M_1$, když jsou spojitá v každém bodě množiny M . **Zobrazení**, resp. **funkce** Φ se nazvou **spojitými**, když jsou spojitá v každém bodě svého definičního oboru D_Φ .

(Často se místo M_1 rovnou použije symbol metrického prostoru P_1 a místo M_2 symbol P_2)

4.4.3 Poznámka o izolovaném bodě množiny Je-li bod A *izolovaný bod* metrického prostoru P_1 , pak **každé zobrazení** Φ definované na P_1 (tj. také v A) je v *izolovaném bodě* A **spojité**.

Důkaz: Existuje totiž číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $d_1(X, A) < \delta$ může být splněna pouze pro $X = A$. Pak však platí $d_2(\Phi(X), \Phi(A)) = 0 < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. ♣

Následující věta charakterizuje spojitá zobrazení.

4.4.4 Věta (o spojitosti zobrazení při otevřeném vzoru každého otevřeného obrazu) Zobrazení Φ metrického prostoru (M_1, d_1) do metrického prostoru (M_2, d_2) je **spojité na množině** M_1 , právě když *vzor*⁸⁾ $\Phi^{-1}(M_2^*)$ množiny obrazů M_2^* , $M_2^* = \Phi(M_1)$ je *otevřená množina* v M_1 pro **každou takovou množinu** M_2^* otevřenou v M_2 . ★

Důkaz: \Rightarrow Nechť Φ je spojitá na M_1 a M_2^* je otevřená množina v M_2 . Dokážeme, že každý bod množiny $\Phi^{-1}(M_2^*)$ je vnitřním bodem, tedy jde o otevřenou množinu. Mějme bod $A \in \Phi^{-1}(M_2^*)$, tj. $\Phi(A) \in M_2^*$. Protože M_2^* je otevřená množina, existuje ε -ové okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(A))$ bodu $\Phi(A)$ takové, že je podmnožinou v M_2^* , tj. $\mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(A)) \subset M_2^*$. Protože zobrazení Φ je v bodě A spojitá, tj. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že $\Phi : \mathcal{O}_\delta(A) \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(A)) \subset M_2^*$, a tedy existuje okolí bodu A takové, že se celé zobrazí do M_2^* . To však znamená, že toto okolí je podmnožinou $\Phi^{-1}(M_2^*)$. Bod A je tedy vnitřní bod množiny vzorů $\Phi^{-1}(M_2^*)$.

\Leftarrow Buď $\Phi^{-1}(M_2^*)$ otevřená množina v M_1 , jestliže M_2^* je otevřená množina v M_2 . Zvolme bod $B \in M_1$ a $\varepsilon > 0$. Buď N množina všech bodů $Y \in M_2$, pro něž $d_2(\Phi(B), Y) < \varepsilon$. Evidentně N je otevřená množina v M_2 . Její vzor $\Phi^{-1}(N)$ je podle předpokladu otevřená množina v M_1 . Tedy existuje δ -okolí $\mathcal{O}_\delta(B)$ bodu B , pro něž $\mathcal{O}_\delta(B) \subset \Phi^{-1}(N)$. Pak však platí $\Phi : \mathcal{O}_\delta(B) \rightarrow N = \mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(B))$, tj. Φ je v bodě B spojitá zobrazení. ♣

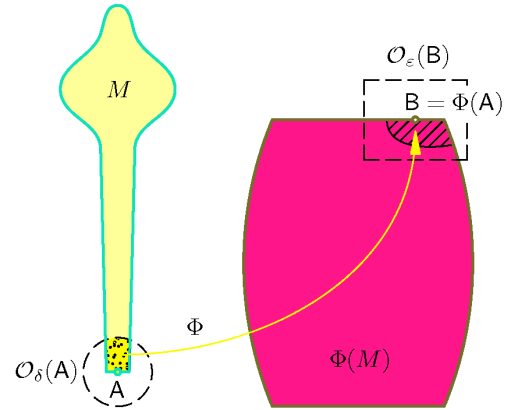
4.4.5 Poznámka k úvodu o spojitosti a limitě zobrazení

• Protože otázku o spojitosti zobrazení, a tedy i spojitosti funkce, v „nezajímavém“ izolovaném bodě jsme právě vyřešili kladně, bude naopak zajímavé zabývat se spojitostí a později rovněž limitou zobrazení jen v těch bodech A , v jejichž okolí je nekonečně mnoho bodů různých od A , tedy kdy A je **hromadný bod**⁹⁾ nějaké podmnožiny M definičního oboru zobrazení Φ . **Pak však pojem spojitosti zobrazení (i funkce) úzce souvisí s pojmem limity** (Viz větu 4.4.11). V tom případě bod A náleží *derivaci* (Viz definice 3.3.8 na str. 49) M' množiny M .

⁸⁾ Viz definici vzoru (proobrazu) množiny v 4.2.3 na str. 62. Zde je $\Phi^{-1}(M_2^*) = \{X \in M_1 \mid \Phi(X) \in M_2^*\}$.

⁹⁾ Řekneme (srovnej s definicí 3.3.2), že bod A *konvergenčního prostoru* P (tj. prostoru kde je definována konvergence, jímž rozumíme metrický prostor) se nazývá **hromadný bod** množiny $M \subset P$, když existuje posloupnost $\{X_n\}$ bodů různých od A obsažená v M a konvergující k A .

• My jsme při Cauchy-Weierstrassově ε, δ definici spojitého zobrazení na množině M pomocí metrik d_1, d_2 vyšli pro zřehlednění úvah z toho, že $M = D_\Phi$, tj. že zobrazovaná množina M je definičním oborem. V literatuře se často rovnou vyjde ze situace, kdy bod A je hromadným bodem (vlastní) podmnožiny M definičního oboru zobrazení, tj. je $M \subset D_\Phi, M \neq D_\Phi$. Tím je možno definovat spojitost i v jiných bodech D_Φ než jen vnitřních (tj. v hraničních i izolovaných bodech). Pak je **nutno všude uvažovat** bod $X \in M \cap \mathcal{O}_\delta(A)$, místo $X \in \mathcal{O}_\delta(A)$ (což je ekvivalentní našemu $d_1(X, A) < \delta$). Takové okolí se pak nazývá (relativní) **okolí bodu A vzhledem k množině M** , označuje se $\mathcal{O}_M(A)$ a definuje se tím tzv. **spojitost zobrazení (i funkce) Φ v bodě A vzhledem k množině M** , viz obr. 4.10. Jinak řečeno, jde o spojitost zúžení (tj. restrikcí)¹⁰⁾



Obr. 4.10

$\Phi|_M$ zobrazení na množinu $M \subset D_\Phi$, při které si vůbec nevšíváme bodů z prostoru P_1 (tj. z jeho nosné množiny M_1), které nepatří do M . Považujeme tak M za samostatný metrický prostor (podprostor prostoru P_1).

Čtenář si jistě snadno naši předchozí definici spojitého zobrazení vysloví ekvivalentně pomocí okolí bodu A a okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(A))$ bodu $\Phi(A)$ (přičemž $\Phi(X) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Phi(A)) \Leftrightarrow d_2(\Phi(X), \Phi(A)) < \varepsilon$).

• Analogicky se postupuje u definice *limity* zobrazení Φ v bodě A , který je hromadným bodem množiny M (tj. při limitě zúžení zobrazení $\Phi|_M$), kdy při Cauchy-Weierstrassově definici, např. pomocí okolí bodů, se všude uvažuje jen **redukované** (relativní) **okolí bodu A vzhledem k množině M** ($M \subseteq P_1$), ze kterého je vyjmut bod A (tedy nemusí existovat hodnota $\Phi(A)$), označujeme jej $\mathcal{O}_M^*(A)$, definujeme $\mathcal{O}_M^*(A) = M \cap \mathcal{O}_\delta^*(A)$, přičemž připomeňme, že $\mathcal{O}_\delta^*(A) = \mathcal{O}_\delta(A) \setminus \{A\}$. Definuje se pak **limita B zobrazení Φ v bodě A vzhledem k množině M** , zapisovaná takto

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = B.$$

Vyslovíme ji opět pomocí metrik.

4.4.6 Definice limity zobrazení (funkce) Mějme $(P_1, d_1), (P_2, d_2)$ dva metrické prostory, $M_1 \subset P_1$, zobrazení $\Phi : M_1 \rightarrow P_2$ (tj. $D_\Phi = M_1$), množinu $M \subset M_1$, a necht' bod $A \in P_1$ je hromadný bod množiny M , tj. $A \in M'$, kde M' je derivace množiny M . Řekneme, že **zobrazení (funkce) Φ má v bodě A limitu vzhledem k množině M** rovnu $B \in P_2$, a píšeme

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = B,$$

když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$X \in M, 0 < d_1(X, A) < \delta \Rightarrow d_2(\Phi(X), B) < \varepsilon.$$

V případě, že $M = M_1 = D_\Phi$, tj. uvažujeme limitu vzhledem k definičnímu oboru D_Φ zobrazení Φ neboli bod A je hromadným bodem D_Φ , mluvíme stručně o **limitě zobrazení Φ v bodě A** a píšeme

$$\lim_{X \rightarrow A} \Phi(X) = B.$$

4.4.7 Poznámka Pomocí pojmu *okolí bodu* připomenutém v části 3) poznámky 4.4.5 zapíšeme abstraktně předešlou definici následovně.

Necht' M_1, M, Φ, A mají též význam jako v předešlé definici. Potom

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = B,$$

právě když

$$\forall \mathcal{O}(B) \exists \mathcal{O}^*(A) : \Phi(M \cap \mathcal{O}^*(A)) \subset \mathcal{O}(B). \quad (4.22)$$

Speciálně, necht' $f(X)$ je reálná funkce n reálných proměnných, tj. necht' $D_f \subseteq \mathbb{E}_n, M \subset D_f$, bod $A \in \mathbb{E}_n$ (popř. $A \in \mathbb{E}_n^*$)¹¹⁾ je hromadný bod množiny $M, f : D_f \rightarrow \mathbb{E}_1$. Řekneme, že **funkce f má v bodě A nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$ vzhledem k množině M** , a píšeme

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = +\infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} f(X) = -\infty,$$

¹⁰⁾ Viz 4.2.12 na str. 65

¹¹⁾ Viz rozšířený euklidovský prostor \mathbb{E}_n^* v 4.7.3, čímž zahrneme i případ $A = \infty$, tj. kdy A je nevlastní bod nekonečno z \mathbb{E}_n^*

když ke každému číslu $k \in \mathbb{R}$ existuje redukované okolí $\mathcal{O}^*(A)$ bodu A takové, že

$$X \in M \cap \mathcal{O}^*(A) \implies f(X) > k, \quad \text{resp. } f(X) < k.$$

Následuje další definice limity zobrazení v daném bodě (vzhledem k dané množině si ji čtenář zformuluje sám) opírající se o pojem *posloupnost bodů*. Tuto koncepci položil Heine¹²⁾. Heinova definice je ekvivalentní s příslušnou Cauchy-Weierstrassovou ε, δ definicí. My ji vyslovíme jako tvrzení, jehož důkaz by nebyl obtížný.

4.4.8 Věta (Heinova o limitě) Zobrazení $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ metrického prostoru (M_1, d_1) do (M_2, d_2) [analogicky funkce $f : (\mathbb{E}_n \supseteq) M_1 \rightarrow M_2 (\subseteq \mathbb{E}_1)$] má v bodě A **limitu** rovnou B , tj. $\lim_{X \rightarrow A} \Phi(X) = B$, právě když pro **každou** posloupnost $\{X_k\}_{k=1}^\infty$, $X_k \neq A$, $X_k \in M_1$, (tj. posloupnost z $M_1 \setminus \{A\}$) konvergující k bodu A , tj. pro niž je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A \quad (\text{stručně } X_k \rightarrow A), \quad (4.23)$$

konverguje příslušná posloupnost obrazů k bodu B , tj.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X_k) = B \quad (\text{stručně } \Phi(X_k) \rightarrow B). \quad \star \quad (4.24)$$

4.4.9 Poznámka Předposlední dvojice vedle sebe zapsaných identických vztahů znamená, že v příslušném metrickém prostoru platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_1(X_k, A) = 0, \quad (4.25)$$

a podobně dva další vztahy znamenají, že

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_2(\Phi(X_k), B) = 0. \quad (4.26)$$

Poznamenejme (Viz 3.2.7 na str. 43), že bod

$$X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k), \quad x_i^k \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.27)$$

kde k je jen horní index označující k -tý člen X_k posloupnosti bodů a nikoli k -tá mocnina x_i .

4.4.10 Poznámka Zobrazení má v bodě A nejvýše jednu limitu.

4.4.11 Věta (Heinova o spojitosti a limitě) Nechť bod $A \in D_\Phi$ je hromadný bod definičního oboru D_Φ zobrazení (funkce) Φ . Pak zobrazení je v bodě A spojitě, právě když

$$\lim_{X \rightarrow A} \Phi(X) = \Phi(A). \quad \star \quad (4.28)$$

Důkaz: bezprostředně plyne z definice spojitosti a limity zobrazení v bodě.

4.4.12 Upozornění V našem pojetí zobrazení Φ , které je **spojité v bodě** $A \in D_\Phi$, **nemusí být spojitě v žádném jeho okolí**, což se týká nejen **bodu vnitřního**, ale **těž hraničního** a, jak jsme dokázali, **těž izolovaného**. **Totéž samozřejmě platí i pro funkci $f(X)$** . To je důležitá změna oproti funkci $f(x)$ jednoho argumentu. Tam se často navíc požaduje, aby **funkce $f(x)$ spojitá v bodě a byla definována v nějakém okolí $\mathcal{O}(a)$ tohoto bodu**.

4.4.13 Věta (o limitě složeného zobrazení) Nechť existuje složené zobrazení $\Phi(\Psi)$, nechť platí $\lim_{X \rightarrow A} \Psi(X) = B$ a zobrazení Φ je v bodě B spojitě. Pak

$$\lim_{X \rightarrow A} \Phi(\Psi(X)) = \Phi(B). \quad (4.29)$$

Důkaz: se opírá o předešlou větu.

¹²⁾Heine, H.E. (1821-1881), německý matematik.

4.4.14 Poznámka k homeomorfnímu (topologickému) zobrazení Je-li zobrazení $\Phi : P_1 \rightarrow P_2$ bi-jekce, tj. prosté zobrazení metrického prostoru P_1 na metrický prostor P_2 , pak existuje *inverzní zobrazení* Φ^{-1} metrického prostoru P_2 na metrický prostor P_1 . Je-li navíc Φ a též Φ^{-1} *spojité zobrazení*, pak se nazývá **homeomorfní zobrazení**, též *topologické zobrazení* nebo **homeomorfismus** mezi tzv. **homeomorfními** metrickými *prostory* P_1, P_2 . Vlastnost prostoru zachovaná při homeomorfním zobrazení se nazývá **topologická vlastnost**. Ze symetrie je zřejmé, že vždy též Φ^{-1} je homeomorfní. **Každá topologická vlastnost je i vlastností metrickou, nikoli obráceně.** Lze ukázat, že **topologický pojem** v metrickém prostoru P je každý pojem, jenž lze logicky převést na pojem **uzávěr** \bar{M} množiny M , resp. na pojem **uzavřenosti** množiny ($M = \bar{M}$), resp. na pojem **otevřenosti** množiny ($P \setminus M = \overline{P \setminus M}$).¹³⁾

4.4.15 Příklad Mezi reálnou osou \mathbb{E}_1 a intervalem $(-1, 1)$ lze homeomorfismus definovat (zobrazením $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan x$) funkcí

$$y = f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x.$$

4.4.16 Příklad fyzikálního modelu homeomorfismu spočívá v již zmíněném mechanickém modelu z 4.2.5 na str. 63, kdy deformujeme výrobek M z elastického materiálu tzv. **elastickou** (též *pružnou* nebo též *spojitou*) **deformací** (stlačováním, roztahováním, ohýbáním atd.) tak, abychom jej ani nesložili nějakými částmi k sobě (Φ by tam nebylo bijekcí) a dostali tak homeomorfní obraz (tj. deformované těleso) $\Phi(M)$.

4.4.17 Příklady homeomorfních geometrických útvarů

- 1) Jednoduchou křivku v \mathbb{E}_3 (též v \mathbb{E}_n), chápanou zatím jen intuitivně (pojem křivky upřesníme později), lze definovat jako homeomorfní obraz uzavřeného intervalu.
- 2) Jednoduchou uzavřenou křivku v rovině lze definovat jako homeomorfní obraz kružnice. Např. trojúhelník, čtverec nebo elipsa jsou homeomorfní s kružnicí.
- 3) Kruh a polovina kulové plochy jsou homeomorfní útvary.

4.5 Spojitost a limita zobrazení (funkcí) v euklidovských prostorech

Úvahy o zobrazení Φ lze i v tomto článku speciálně přenést na funkci f n argumentů, jak je zřejmé z nadpisu tohoto článku. Vektorovým prostorem v tomto článku bude zaměření příslušného euklidovského prostoru.

4.5.1 Poznámka Speciálně, ze zobrazení typu (n, m) $\Phi : P_1 \rightarrow P_2$, kde zobrazovaným n -rozměrným metrickým prostorem P_1 je vektorový prostor $\mathbb{V}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ [s metrikou $\varrho^*(\vec{u}, \vec{v})$ z 2.2.4], resp. euklidovský prostor \mathbb{E}_n a P_2 je \mathbb{V}_m , dostaneme ihned v uvažovaném bodě spojitost a limitu **vektorové funkce**, resp. **vektorového pole** (jež jsme zavedli v 4.2.5 na str. 63). Jestliže $P_2 = \mathbb{E}_m$, pak pracujeme s bodovým zobrazením (bodovou funkcí), a jestliže $P_2 = \mathbb{E}_1$, pak jde o reálnou funkci $f(X)$ n reálných argumentů.

4.5.2 Věta (o spojitých souřadnicích zobrazení typu (n, m)) Zobrazení typu (n, m) je v daném bodě prostoru \mathbb{E}_n spojitě, právě když jsou v něm spojitě všechny souřadnice zobrazení. ★

Důkaz: Zobrazení $\Phi(X) = (\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_m(X))$ spojitě v bodě $A \in D_\Phi$ splňuje pro všechny posloupnosti $\{X_k\}$ z D_Φ implikaci

$$X_k \rightarrow A \Rightarrow (\phi_1(X_k), \dots, \phi_m(X_k)) \rightarrow (\phi_1(A), \dots, \phi_m(A)).$$

Podle věty 3.2.27 o limitě podle souřadnic na str. 45 tvrzení předešlé implikace platí, právě když

$$\phi_1(X_k) \rightarrow \phi_1(A) \wedge \dots \wedge \phi_m(X_k) \rightarrow \phi_m(A). \quad (4.30)$$

Avšak limity (4.30) za předpokladu $X_k \rightarrow A$ znamenají, že všechny souřadnice zobrazení typu (n, m) jsou v A spojitě. ♣

4.5.3 Příklad Zobrazení $\Phi : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ z příkladu 3.4.16 na str. 55 typu $(1, 2)$, u něhož obrazem byla elipsa, je spojitě v $D_\Phi = [0, 2\pi]$ a víme také, že spojitým obrazem souvislé množiny je opět množina souvislá.

¹³⁾Na rozdíl od *spojitosti* nejsou pojmy *stejnoměrná spojitost*, *ohraničenost* (nebo *úplnost*) topologické.

4.5.4 Poznámka Definice limity zobrazení typu (n, m) by byla analogická jako v metrických prostorech, navíc v případě, že vektory z \mathbb{V}_n i obrazy z \mathbb{V}_m jsou aritmetické vektory, platí pro vektorovou funkci $\vec{\Phi} \in \mathbb{V}_m$ a vektory $\vec{x}, \vec{a}, \vec{h}, \vec{o} \in \mathbb{V}_n$ rovnost

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{\Phi}(\vec{x}) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{o}} \vec{\Phi}(\vec{a} + \vec{h}), \quad (4.31)$$

pokud existuje alespoň jedna strana tohoto vzorce. ★

4.5.5 Věta (o limitě souřadnic zobrazení typu (n, m)) Zobrazení typu (n, m) má v daném bodě $A \in \mathbb{E}_n$ limitu, právě když v bodě A mají limitu všechny souřadnice zobrazení, a platí pak

$$\lim_{X \rightarrow A} (\phi_1(X), \dots, \phi_m(X)) = \left(\lim_{X \rightarrow A} \phi_1(X), \dots, \lim_{X \rightarrow A} \phi_m(X) \right),$$

pokud existuje alespoň jedna strana tohoto vzorce.

Důkaz: opět využívá větu 3.2.27 o limitě posloupnosti bodů v \mathbb{E}_n podle souřadnic (str. 45).

4.5.6 Věty (o spojitých zobrazeních kompaktních v \mathbb{E}_n)

Nechť zobrazení $\Phi : \mathbb{E}_n \supset \bar{M} \rightarrow \mathbb{E}_m$ typu (n, m) je *spojité* zobrazení definované na kompaktní množině \bar{M} z \mathbb{E}_n s oborem hodnot v \mathbb{E}_m . Platí následující dvě tvrzení.

- 1. Věta (o kompaktním obrazu kompaktního vzoru spojitěho zobrazení)** Pak obraz $\Phi(\bar{M})$ kompaktní množiny \bar{M} je rovněž kompaktní množina v \mathbb{E}_m ; ★
- 2. Věta (o spojitěm inverzním zobrazení na kompaktní vzor v \mathbb{E}_n)** Je-li navíc zobrazení Φ *prosté*, pak inverzní zobrazení $\Phi^{-1} : \Phi(\bar{M}) \rightarrow \bar{M}$ je *spojité*. ★

Důkaz: se provede např. sporem.

4.5.7 Fyzikální důsledek První věta říká, že obrazem po elastické deformaci Φ typu $(3, 3)$ tělesa M představujícího množinu *uzavřenou a ohraničenou*, tj. **kompaktní**, je deformované těleso $\Phi(M)$ rovněž kompaktní. Pokud by však při deformaci došlo k poškození tělesa v tom smyslu, že by se v něm objevily např. povrchové trhliny (tj. nejde už o deformaci elastickou), a připustíme-li představu, že povrchové trhliny reprezentují „ztracené“ body hranice poškozeného tělesa, pak množině obrazů takto deformovaného tělesa bude chybět část hranice, takže už nereprezentuje množinu uzavřenou, a proto ani kompaktní.

4.5.8 Poznámky k předešlým dvěma větám

- Spojitá zobrazení tedy převádí uzavřené ohraničené množiny na množiny téhož typu a jejich inverze je rovněž spojitá, pokud je definičním oborem opět kompaktní množina a zobrazení je navíc prosté.*
- Speciálně, je-li zobrazení typu (n, n) , tj. $n = m$ ($\Phi : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$) a uvažujeme situaci popisovanou ve druhé větě, pak zobrazení Φ (a též Φ^{-1}) může být **homeomorfní** (topologické) zobrazení mezi M a $\Phi(M)$. V případě lineárního zobrazení jej totiž může realizovat regulární čtvercová matice A . (Promyslete!)¹⁴

4.5.9 Poznámka Nechť Φ je zobrazení typu (n, m) (Viz 4.2.2 str. 62) z \mathbb{E}_n do \mathbb{E}_m (tj. při $m = 1$ jde o reálnou **funkci** $f(X)$ n reálných proměnných).

- Existuje-li $\lim_{X \rightarrow A} \Phi(X) = B$, tj. bod A je hromadným bodem definičního oboru D_Φ , pak pro každou podmnožinu $M \subset D_\Phi$, jejímž hromadným bodem je bod A , platí $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = B$.

¹⁴Na otázku zvědavého čtenáře, jak by bylo třeba formulovat druhou větu v metrických prostorech nekonečné dimenze (např. funkcionálních), aby zobrazení Φ^{-1} (a též Φ) bylo homeomorfní, je odpověď následující. Bylo by třeba, aby místo \mathbb{E}_n byl výchozí metrický prostor P_1 **kompaktní prostor**. To je takový metrický prostor P_1 , kdy každá posloupnost bodů $\{X_k\}$ z P_1 obsahuje vybranou posloupnost $\{X_{j_k}\}$ (Viz 3.2.11 na str. 43) konvergující (k nějakému bodu) v P_1 .

Věta Buď Φ spojitě a prostě zobrazení kompaktního metrického prostoru P_1 na metrický prostor P_2 . Potom Φ je homeomorfní. ★

Obecněji, je-li $\Phi : P_1 \rightarrow P_2$ spojitě a prostě zobrazení, přičemž P_1 je kompaktní metrický prostor, je zobrazení $P_1 \rightarrow \Phi(P_1)$ homeomorfní. ★

2. Odtud plyne následující **tvrzení**, které je využíváno v příkladech pro důkaz neexistence limity zobrazení (funkce) v daném bodě:

Nechť A je hromadný bod množin $M, N \subset D_\Phi$ (a tedy i D_Φ). Jestliže buď jedna z limit

$$\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X), \quad \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in N}} \Phi(X)$$

neexistuje nebo obě existují, ale mají různé hodnoty, pak $\lim_{X \rightarrow A} \Phi(X)$ neexistuje.¹⁵⁾

4.5.10 Dvě důležité věty o zobrazení euklidovských prostorů, jež nyní uvedeme, jsou *formulovány v záporném významu*. Jejich obsah je vcelku názorný, avšak důkazy patří k těm obtížnějším i obsáhlejším.

- Věta (o topologické různosti euklidovských prostorů různé dimenze)** Euklidovské prostory $\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_m$ různých dimenzí **nejsou homeomorfní**. ★
- Věta o neexistenci spojitého i prostého zobrazení euklidovského prostoru vyšší dimenze do nižší dimenze** Je-li zobrazení euklidovského prostoru \mathbb{E}_n vyšší dimenze do euklidovského prostoru \mathbb{E}_m nižší dimenze **spojité zobrazení**, pak **není prosté**. ★

4.6 O spojitosti funkcí v \mathbb{E}_n včetně stejnoměrné spojitosti

4.6.1 Věta (o spojitosti zúžení a rozšíření) Zúžení a rozšíření spojitě funkce je spojitá funkce. ★

Důkaz: Buď f spojitá funkce v bodě $A = (a_1, \dots, a_n) \in D_f$. Pak podle Heiny věty o spojitosti a limitě platí pro všechny posloupnosti $\{X_k\}$ obsažené v D_f

$$X_k \rightarrow A \Rightarrow f(X_k) \rightarrow f(A),$$

což podle věty o limitě podle souřadnic (str. 45) značí

$$x_1^k \rightarrow a_1, \dots, x_n^k \rightarrow a_n \Rightarrow f(X_k) \rightarrow f(A).$$

Implikace platí, ať přidáme v případě rozšíření funkce v předpokladu další limitu posloupnosti souřadnic, resp. naopak ji v případě zúžení funkce nahradíme limitou konstantní posloupnosti. Funkční předpis totiž zůstává týž, a tedy výsledek implikace rovněž. ♣

4.6.2 Věta (shrnující klasické výsledky) Absolutní hodnota, součet, rozdíl, součin, podíl (přípustný) a skládání spojitých funkcí více argumentů je opět spojitá funkce. Navíc prázdná funkce¹⁶⁾ je spojitá. ★

Důkaz: se opírá o Heiny větu o spojitosti a limitě a o známé věty o limitách posloupnosti bodů.

4.6.3 Věta (o spojitosti elementárních funkcí n argumentů) Každá elementární funkce je spojitá.¹⁷⁾ ★

Důkaz: Protože složená funkce (totéž platí pro složené zobrazení¹⁸⁾) ze spojitých funkcí je spojitá, součet, rozdíl, součin a podíl reálných spojitých funkcí na jisté množině M je též funkce spojitá a pro zúžení i rozšíření je tvrzení důsledkem předposlední věty 4.6.1. ♣

4.6.4 Příklad Funkce signum $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$, zmíněná v příkladu 4.2.19 na str. 66, není v bodě $(0, 0)$ spojitá, což si snadno zdůvodníte. Podle předešlé věty (její kontrapozicí) plyne, že tato funkce není elementární.

4.6.5 Definice Řekneme, že funkce $f(X)$ definovaná na otevřené množině M je¹⁹⁾ **funkce třídy C^0** na M , stručněji třídy C na M , je-li spojitá v každém bodě $A \in M$. Píšeme $f \in C(M)$.

¹⁵⁾Kdyby poslední limita existovala, muselo by podle předešlého tvrzení 1) být $\lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in M}} \Phi(X) = \lim_{X \rightarrow A} \Phi(X) = \lim_{\substack{X \rightarrow A \\ X \in N}} \Phi(X)$.

¹⁶⁾Viz 4.1.4 na str. 58

¹⁷⁾Rozumí se na svém definičním oboru.

¹⁸⁾Viz 4.4.13

¹⁹⁾Srovnej s 4.3.4 na str. 67.

4.6.6 Pojem jednoduché plochy Je-li funkce definovaná a spojitá na oblasti M , tj. $f(x, y) \in C(M)$, nazveme její graf \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 **jednoduchá plocha** (též *elementární plocha*). Tedy

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M, z = f(x, y), f \in C(M)\}. \quad (4.32)$$

Přítom spojitost v bodě $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{E}_2$ značí, že je rozdíl $|f(x, y) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon$, pokud vzdálenost $\varrho((x, y), (a_1, a_2)) < \delta$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Definice souhlasí s naší geometrickou intuicí zachycenou na obr. 4.11 na str. 76.

4.6.7 Definice stejnoměrné spojitosti na množině Řekneme, že **funkce $f(X)$ je stejnoměrně spojitá** na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \boxed{\forall X_1, X_2 \in M} : \varrho(X_1, X_2) < \delta \Rightarrow |f(X_2) - f(X_1)| < \varepsilon. \quad (4.33)$$

(Analogicky lze definovat **stejněměrně spojitě zobrazení** $\Phi(X)$)

4.6.8 Poznámka Se stejnoměrnou spojitostí se lze setkat již u funkce $f(x)$ jednoho argumentu např. u určitého integrálu Newtonova, Riemannova nebo při řešení náročnějších úloh z matematické analýzy, které se týkají např. tzv. funkčních řad a především u vícerozměrné integrace.

Funkce $f(X)$ je tedy **stejněměrně spojitá** na množině M , když pro danou odchylku $\varepsilon > 0$ funkčních hodnot existuje taková **mez** $\delta > 0$ závislá jen na ε , a tedy **stejná pro celou množinu** M , že rozdíl funkčních hodnot nepřekročí stanovenou odchylku, pokud vzdálenost argumentů X_1, X_2 nepřekročí uvedenou mez, a přitom **vůbec nezáleží na umístění těchto argumentů** X_1, X_2 v M , ale jen na jejich vzdálenosti $\varrho(X_1, X_2)$ v \mathbb{E}_n . Název tedy vystihuje, že jde o „náročnější, tvrdší“ požadavek na spojitost, takže platí

4.6.9 Věta Je-li funkce $f(X)$ stejnoměrně spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$, pak je na M spojitá. (Obrácené tvrzení neplatí). ★

4.6.10 Příklad Funkce $f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1) =: M$ je na M spojitá. Avšak pro zadané $\varepsilon > 0$ nelze najít $\delta > 0$ tak, aby podmínka $\varrho(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| < \delta$ zaručila, že $\left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right| < \varepsilon$ pro všechna $x_1, x_2 \in (0, 1)$. To proto, že v okolí nuly existují body x_1, x_2 s libovolně malou vzdáleností, avšak s libovolně velkou odchylkou funkčních hodnot. Skutečně, definujeme-li pro kladná celá čísla k, l dvě číselné posloupnosti $\{x_k\}, \{x_l\}$ předpisy $x_k = \frac{1}{k}, x_l = \frac{1}{l+k}$, pak obě konvergují k nule (tj. jsou to **nulové posloupnosti**). Platí však

$$\varrho(x_k, x_l) = |x_l - x_k| = \left| \frac{l}{k(l+k)} \right| < \frac{1}{k} \rightarrow 0, \text{ zatímco } |f(x_l) - f(x_k)| = l \rightarrow +\infty.$$

Zároveň však jistě potěší, že omezíme-li se na **kompaktní množiny** (Viz dále Heineovu-Cantorovu větu), je na nich **každá spojitá funkce rovněž stejnoměrně spojitá**.

Následující důležité věty uvedeme bez důkazů, přestože potřebné matematické prostředky jsme si připravili. Tyto věty jsou už známy u funkce jedné proměnné, i když v jednodušší formě.

4.6.11 Základní (zobecněné) věty o spojitých funkcích

A) Nechť $f(X)$ je **spojitá** funkce na neprázdné **oblasti** $M \subset \mathbb{E}_n$, lhostejno zda na otevřené či uzavřené a lhostejno zda na ohraničené či neohraničené. Pak platí

- **Věty Bolzanovy o mezihodnotě (mezihodnotové)**

1. Věta Bolzanova Jsou-li hodnoty funkce $f(X)$ v bodech A_1 a A_2 různé, pak ke každému číslu c , které leží mezi hodnotami $f(A_1)$ a $f(A_2)$, existuje (aspoň jeden) takový bod $A \in M$, že

$$f(A) = c.$$

Jinými slovy: $f(X)$ nabývá všech hodnot mezi $f(A_1)$ a $f(A_2)$ pro libovolné dva body A_1, A_2 této oblasti, tj. oborem hodnot $f(X)$ je **souvislá množina**. ★

2. Věta Bolzanova Speciálně, existují-li dva body $A_1, A_2 \in M$ tak, že $f(A_1) < 0, f(A_2) > 0$, nebo obráceně,²⁰⁾ pak existuje bod $A \in M$ tak, že

$$f(A) = 0. \star$$

²⁰⁾Tj. v obou případech předpokládáme, že $f(A_1) \cdot f(A_2) < 0$.

B) Nechť je nyní $f(X)$ *spojitá* funkce na neprázdném *kompaktu* $\bar{M} \subset \mathbb{E}_n$ (tj. uzavřené ohraničené množině). Pak platí následující tři věty:

- **Věta Heinoва-Cantorova o stejnoměrné spojitosti** Pak je $f(X)$ *stejněměrně spojitá* na kompaktu \bar{M} . ★
- **1. Věta Weierstrassova o ohraničenosti** Pak je $f(X)$ *ohraničená* na kompaktu \bar{M} . ★
- **2. Věta Weierstrassova o globálních (též absolutních) extrémech** Pak $f(X)$ nabývá na kompaktu \bar{M} (v aspoň jednom bodě A) své největší hodnoty (tj. $f(A) \geq f(X)$ pro všechny body $X \in \bar{M}$) a (v aspoň jednom bodě) své nejmenší hodnoty (neboli existuje $\max_{X \in \bar{M}} f(X)$ a $\min_{X \in \bar{M}} f(X)$).²¹⁾ ★

Důkazy vět: se od důkazů pro funkci jednoho argumentu výrazně neliší. Při důkazu první i druhé Bolzanovy věty je však podstatné, že M je množina *souvislá*.

4.6.12 Věta (o lokální ohraničenosti funkce spojitě v bodě) Je-li funkce v bodě spojitá, pak je v dostatečně malém okolí tohoto bodu ohraničená. ★

4.6.13 Věta (o oboru hodnot funkce spojitě na souvislé množině) Obor hodnot spojitě funkce definované na souvislé množině je jednobodová množina nebo interval. ★

Důkaz: Podle věty 3.4.15 na str. 54 je spojitým obrazem souvislé množiny opět souvislá množina. Protože v \mathbb{E}_1 jiné neprázdné souvislé množiny než intervaly a jednobodové množiny nejsou (3.4.6 na str. 53), je tím důkaz hotov. ♣

4.6.14 Poznámka (o spojitě prodloužitelnosti funkce) Často nastává situace, že funkce $f(X)$ více proměnných je definovaná a spojitá jen v oblasti²²⁾ G , a přitom je možno ji (do)definovat na hranici ∂G této oblasti tak, že takto rozšířená funkce je spojitá v uzavřené oblasti $\bar{G} = G \cup \partial G$. Pak říkáme, že $f(X)$ je *spojitě prodloužitelná funkce na hranici ∂G oblasti G* . Hranice je pak tvořena tzv. *bodý odstranitelné nespojivosti*.

4.7 O limitách funkcí v \mathbb{E}_n a \mathbb{E}_n^*

4.7.1 Úvod Nebudeme se hlouběji zabývat teorií limit funkcí v \mathbb{E}_n , neboť i zde platí analogie základních vět o limitách funkcí jedné proměnné. Potřebné pojmy jen shrneme a stručně uvedeme pojmy nové.

4.7.2 Příklad Vypočtěme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Řešení: Ať $\{(x_k, y_k)\}$ je bodová posloupnost taková, že $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$, přičemž vždy $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pak posloupnost vzdáleností $\varrho_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ těchto bodů v \mathbb{E}_2 od limitního bodu $(0, 0)$ konverguje k nule. Limitu posloupnosti příslušných funkčních hodnot $\{f(x_k, y_k)\}$ vypočteme podle Heinovy věty o limitě funkce (na str. 70) takto:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^2 + y_k^2}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + 1} - 1} = \lim_{\varrho_k \rightarrow 0} \frac{\varrho_k^2}{\sqrt{\varrho_k^2 + 1} - 1} = \lim_{\varrho_k \rightarrow 0} \frac{\varrho_k^2(\sqrt{\varrho_k^2 + 1} + 1)}{\varrho_k^2} = 2,$$

kde poslední zlomek vznikl rozšířením zlomku předešlého.

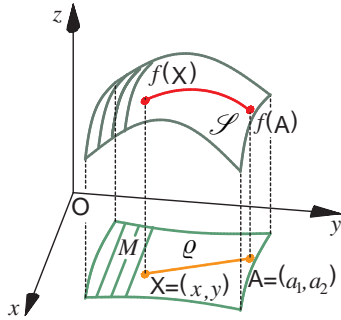
4.7.3 Poznámka o nevlastních bodech Již u funkce jedné reálné proměnné se setkáváme s nevlastními limitami a s limitami v nevlastních bodech $-\infty$ a $+\infty$. Např. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$ (nevlastní limita $+\infty$ v nevlastním bodě $-\infty$) nebo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (vlastní limita Eulerovo číslo e v nevlastním bodě $+\infty$) atd. Vzpomeňme, že pro tento účel byla reálná osa \mathbb{E}_1 rozšířena o dva nevlastní body na *rozšířenou reálnou osu* $\boxed{\mathbb{E}_1^* \equiv \mathbb{R}^* = \mathbb{E}_1 \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}}$. Doposud jsme body a vektory uvažovali jako uspořádané n -tice konečných reálných čísel. Poněkud překvapující je, že euklidovský prostor \mathbb{E}_n stačí pro podobný účel rozšířit o jediný *nevlastní bod nekonečno*, který označíme symbolem ∞ (Pozor, nezaměňovat s $+\infty$), takže pak (jednobodově) *rozšířený n -rozměrný euklidovský prostor* bude $\boxed{\mathbb{E}_n^* = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}}$, $n \geq 2$. Pak *sférické δ -okolí $\mathcal{O}_\delta(\infty)$ bodu ∞* je (bodová) množina $\mathcal{O}_\delta(\infty) = \{X \in \mathbb{E}_n^* \mid \varrho(X, \mathbf{O}) > \delta, \text{ kde } \mathbf{O} = (0, \dots, 0), \delta > 0\}$ a představuje „vnějšek“ n -rozměrné uzavřené koule (Viz 3.2.2 na str. 42) $\bar{B}_n(\mathbf{O}, \delta)$, se středem v počátku \mathbf{O}

²¹⁾ Extrémy funkcí se budeme zabývat později.

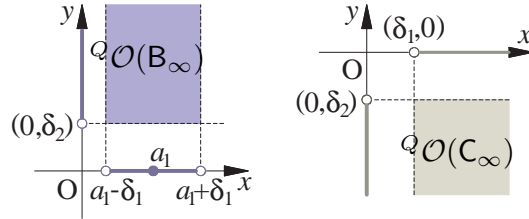
²²⁾ Připomeňme, že oblast je otevřená a souvislá množina daného prostoru.

a poloměrem δ . **Redukované sférické δ -okolí bodu ∞** je $\mathcal{O}_\delta^*(\infty) = \mathcal{O}_\delta(\infty) \setminus \{\infty\}$, takže $\mathcal{O}_\delta^*(\infty) \subset \mathbb{E}_n$, zatímco $\mathcal{O}_\delta(\infty) \subset \mathbb{E}_n^*$.

Nevlastní bod ∞ v \mathbb{E}_n^* je tedy takový bod, jehož aspoň jedna souřadnice je $-\infty$ nebo $+\infty$.



Obr. 4.11



Obr. 4.12

4.7.4 Příklad Sférické okolí je výhodné, když se např. uvažuje následující dvojná limita

$$\lim_{\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{O}) \rightarrow +\infty} f(\mathbf{X}) = \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ |y| \rightarrow +\infty}} f(x, y), \quad (4.34)$$

tj. kdy všechny souřadnice nevlastního bodu ∞ jsou $+\infty$ nebo $-\infty$, tedy nevlastní. Sférickým okolím takového bodu je vnější oblast vzhledem k uzavřenému kruhu $\bar{B}_2(\mathbf{O}, \delta)$ se středem v počátku \mathbf{O} a poloměrem δ .

4.7.5 Příklad Uvažujeme-li místo „symetrického“ sférického okolí „nesymetrického“ n -rozměrné **kvádrové okolí** určené *otevřeným n -rozměrným kvádrem (intervalem) Q_n* ze str. 47, můžeme uvažované rozšíření \mathbb{E}_n na \mathbb{E}_n^* nastínit a v \mathbb{E}_2 znázornit následovně.

• Mějme „nekonečný“ bod $\mathbf{A}_\infty = (a_1, +\infty, -\infty) \in \mathbb{E}_3^*$, kde $a_1 \in \mathbb{R}$. Pak *trojrozměrné kvádrové $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ -okolí* definujeme pomocí nerovností např. takto

$${}^{Q_3}\mathcal{O}_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\mathbf{A}_\infty) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_3^* \mid |x - a_1| < \delta_1 \wedge y > \delta_2 \wedge z < \delta_3, \delta_1 > 0, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}\}.$$

• Obr. 4.12 znázorňuje v rovině Oxy vždy jednu z variant kvádrového, vlastně *obdélníkového okolí* dalších dvou „nekonečných“ bodů $\mathbf{B}_\infty, \mathbf{C}_\infty$. Všechny takové „nekonečné“ body však chápeme jako různé varianty (interpretace) výše definovaného nevlastního bodu ∞ , jehož připojením vznikl (jednobodově) *rozšířený prostor \mathbb{E}_n^** .

$$\mathbf{B}_\infty = (a_1, +\infty) \in \mathbb{E}_2^*, \quad {}^Q\mathcal{O}_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{B}_\infty) = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2^* \mid |x - a_1| < \delta_1 \wedge y > \delta_2, \delta_1 > 0 \text{ a } \delta_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbf{C}_\infty = (+\infty, -\infty) \in \mathbb{E}_2^*, \quad {}^Q\mathcal{O}_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{C}_\infty) = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2^* \mid x > \delta_1 \wedge y < \delta_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}\}$$

• Formulace např. konečné limity b v bodě $\mathbf{B}_\infty = (a_1, +\infty)$ je tato: nerovnost $|f(x, y) - b| < \varepsilon$ platí, jestliže $|x - a_1| < \delta_1, \delta_2 < y$, přičemž čísla $\delta_1 > 0, \delta_2 \in \mathbb{R}$ jsou určena volbou $\varepsilon > 0$.

4.7.6 Věta (o aritmetických operacích s limitami funkcí) Nechť f, g jsou (reálné) funkce a existují limity $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b \in \mathbb{E}_1, \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{X}) = c \in \mathbb{E}_1$. Pak platí

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} |f(\mathbf{X})| = |b|, \quad \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} (\beta f(\mathbf{X}) + \gamma g(\mathbf{X})) = \beta b + \gamma c, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} (f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) = bc, \quad \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} = \frac{b}{c}, \text{ je-li } c \neq 0.$$

Tato tvrzení platí též pro nevlastní limity, mají-li pravé strany rovností v $\mathbb{E}_n^* = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$ smysl. ★ (Tj. pravé strany rovností nevedou k „neurčitým výrazům“ typu $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ atd.)

4.7.7 Věty o přechodu k limitám funkcí vyhovujících lokálním nerovnostem

1. Věta (o limitách dvou funkcí vyhovujících nerovnosti) Nechť existují limity $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}), \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{X})$, a nechť v jistém redukovaném okolí $\mathcal{O}^*(\mathbf{A})$ platí $f(\mathbf{X}) \leq g(\mathbf{X})$. Pak $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) \leq \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{X})$. ★

2. Věta (o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi) Jestliže pro každý bod $\mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(\mathbf{A})$ platí $f(\mathbf{X}) \leq g(\mathbf{X}) \leq h(\mathbf{X})$ a zároveň $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} h(\mathbf{X}) = b$, pak též $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{X}) = b$. **Speciálně**, když $|g(\mathbf{X})| \leq h(\mathbf{X})$ pro $\mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(\mathbf{A})$ a $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} h(\mathbf{X}) = 0$, pak $\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} g(\mathbf{X}) = 0$. ★

4.7.8 Poznámka o postupné dvojnásobné limitě funkce $f(x, y)$ Pro praktické výpočty limit funkcí více proměnných, které jsou mnohem obtížnější než u funkce jedné proměnné, je užitečné zmínit se o tzv. **postupných dvojnásobných limitách**, které důsledně odlišíme od **limity dvojně** $\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x, y) = l$, jež geometricky vzato je „limitou vzhledem k rovině“. Mají tvar

$$1) \boxed{\lim_{y \rightarrow a_2} [\lim_{x \rightarrow a_1} f(x, y)] = l_{12}}, \quad 2) \boxed{\lim_{x \rightarrow a_1} [\lim_{y \rightarrow a_2} f(x, y)] = l_{21}}.$$

Pokud tyto limity existují, určí se dvojím limitním přechodem. V případě 1) tak, že z geometrického pohledu se bod $X = (x, y)$ blíží k bodu $A = (a_1, a_2)$ nejprve po rovnoběžce s osou x až do bodu (a_1, y) , a pak po rovnoběžce s osou y až do bodu $A = (a_1, a_2)$. Podobně postupujeme u druhé dvojnásobné limity případu 2).

Lze dokázat tato **praktická tvrzení**:

1. *Existují-li obě limity l_{12} a l_{21} a platí $l_{12} = l_{21}$, neplyne z toho nic, tj. nemusí ještě existovat (dvojná) limita l dané funkce v daném bodě A .*
2. *Existuje-li limita l (i nevlastní), nemusí existovat ani limita l_{12} ani l_{21} , avšak existuje-li l a existuje-li některá z nich, např. l_{12} , pak nutně $l = l_{12}$.*
3. *Existují-li všechny tři limity, pak nutně $l = l_{12} = l_{21}$.*
4. *Pokud (dvojná) limita l (i nevlastní) nezávisí na směru přibližování k hromadnému bodu (x_0, y_0) definičního oboru funkce, tj. v polárních souřadnicích ρ, φ nezávisí na úhlu φ , pak l vypočítáme jako (jednoduchou) limitu funkce jednoho argumentu ρ přechodem $x = x_0 + \rho \cos \varphi, y = y_0 + \rho \sin \varphi$ do polárních souřadnic podle vzorce*

$$\boxed{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) = l} \quad .^{23)} \quad (4.35)$$

5. Z předešlého je zřejmé, že určit limitu l funkce v bodě dvojnásobnými limitami l_{12}, l_{21} má smysl jen tehdy, je-li předem známa existence l . To je vždy možné, je-li to funkce spojitá v okolí vyšetřovaného bodu. Existují-li l_{12}, l_{21} , avšak $l_{12} \neq l_{21}$, pak neexistuje limita l (Viz část 2. poznámky 4.5.9).

4.8 Příklady ke spojitosti a limitám funkcí

4.8.1 Příklad a) Rozhodněme, zda racionální lomená funkce $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ je na svém definičním oboru stejnoměrně spojitá a **b)** v bodech, kde není spojitá, vyšetřeme její limitu l .

Řešení: ad a) Funkce f je definovaná a spojitá na souvislé množině $M = \mathbb{E}_2 \setminus \{(0, 0)\}$, tj. $f \in C(M)$, tedy v celé rovině kromě počátku $O = (0, 0)$. Uvažujeme-li totiž libovolný bod $A = (x_0, y_0) \in M$ a libovolnou posloupnost bodů $(x_k, y_k) \in M, k = 1, 2, \dots$, konvergující k bodu A , tj. $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0, \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y_0$, pak posloupnost funkčních hodnot $f(x_k, y_k) = \frac{2x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2}$ má limitu $\frac{2x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}$. Tedy limita funkce je v každém bodě množiny M rovna funkční hodnotě v tomto bodě, a proto je f spojitá na M . Snadno ještě dokážeme její *ohraničenost*. Pro každý bod $(x, y) \neq (0, 0)$ totiž platí

$$0 \leq (x - y)^2 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1, \text{ a také}$$

$$0 \leq (x + y)^2 \Rightarrow -2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow -\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1, \text{ takže celkem}$$

$$\left| \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \Rightarrow |f| \leq \text{const.} = 1.$$

²³⁾ Tedy se dokáže, že vztah (4.35) platí „stejněměrně“ pro všechny hodnoty $\varphi \in \mathbb{E}_1$ neboli zde jde o *stejněměrnou konvergenci funkce* $f(\varphi, \rho) = f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi)$ na množině $M_\varphi = \mathbb{E}_1$ všech úhlů φ v bodě $\rho = 0$ vzhledem k argumentu ρ k limitní funkci $F(\varphi)$.

Definice Řekneme, že funkce $f(x, y)$ je *stejněměrně konvergentní na (v) množině M_x v bodě y_0 vzhledem k proměnné y k limitní funkci $F(x)$* , platí-li: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí $\mathcal{O}(y_0)$ bodu y_0 , že pro body $y \in \mathcal{O}(y_0)$ a pro každé $x \in M_x$ platí v bodech (x, y) definičního oboru D_f funkce $f(x, y)$ nerovnost

$$|f(x, y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme pak

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = F(x) \text{ stejnoměrně na } M, \text{ popř. stručně } \boxed{f(x, y) \rightrightarrows F(x)}_{y \rightarrow y_0}.$$

Jelikož f je spojitá a nekonstantní funkce, dostáváme podle věty 4.6.13 na str. 75 docela praktický výsledek, že totiž její obor hodnot je uzavřený interval $H_f = [-1, 1]$.²⁴⁾

Ukažme ještě, že f **není na M stejnoměrně spojitá**. Vezměme např. dvojici bodů $(x, 0)$, (x, x) , kde $x \neq 0$. Jejich vzdálenost je $\sqrt{(x-x)^2 + x^2} = |x|$, a tedy ji lze učinit libovolně malou. Odpovídající odchylka je však $|f(x, x) - f(x, 0)| = |1 - 0| = 1$. Když tedy zvolíme $\varepsilon < 1$, neexistuje k němu žádné $\delta > 0$, neboť není $|f(x, x) - f(x, 0)| < \varepsilon$ pro žádnou dvojici bodů $(x, 0)$, (x, x) , kde $x \neq 0$.

Zkoumejme otázku spojitosti funkce v počátku O v širších souvislostech, i když evidentně f **není v bodě O spojitá**, neboť v O není definovaná. Funkce f je totiž zajímavá tím, že v bodech osy x i osy y je $f(x, y) = \text{const.} = 0$. Dodefinujeme-li funkci f v počátku $O = (0, 0)$ tak, že $f^*(0, 0) := 0$, získáme funkci f^* spojitou zvláště vzhledem k argumentu x a zvláště vzhledem k argumentu y . Např. pro každou hodnotu x_0 je zúžení $u(y) = f^*(x_0, y) = \frac{2x_0 y}{x_0^2 + y^2}$ funkce f^* opět funkce spojitá. Proto je $f^*(x, y)$ spojitá vzhledem k argumentu y . Podobně pro x . Avšak ani takto námi vzhledem k oběma proměnným spojitě prodloužená (dodefinovaná) funkce f^* (na celý prostor \mathbb{E}_2) nemůže být v bodě O spojitá podle 4.5.9 části 2) na str. 72, protože např. na přímce $y = x$, přesněji na dvojici opačných otevřených polopřímek $p_1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = x, x \neq 0\}$, je

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in p_1}} f^*(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1 \neq 0 = f^*(0, 0)$$

a navíc ještě

ad b) dokážeme, že zadaná funkce f nemá v počátku $O(0, 0)$ limitu, takže je to **bod neodstranitelné nespojitosti**, přestože f je spojitá funkce v okolí vyšetřovaného bodu O (dokonce v každém jeho okolí z M , jak jsme v části a) ukázali). Pro $k \in (-\infty, +\infty)$ položíme

$$p_k = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = kx\} \setminus \{(0, 0)\},$$

a podívejme se, jak se chová f na svém zúžení p_k , což je vždy dvojice opačných otevřených polopřímek procházejících počátkem se směrnici k a neobsahujících svůj počátek O . Je-li $(x, y) \in p_k$, pak je $f(x, y) = f(x, kx) = \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}$. Protože je f na p_k (při daném k) konstantní, je

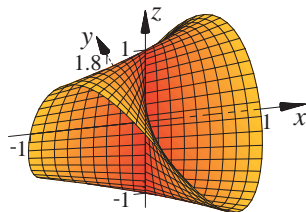
$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in p_k}} f(x, y) = \frac{2k}{1+k^2} =: l_k \neq \text{const.}$$

Jelikož pro různá k , tj. pro různé podmnožiny $p_k \subset M$, jsou tyto limity l_k od sebe různé, podle už zmíněné poznámky 4.5.9 v části 1. **nená f v $(0, 0)$ limitu l . A to i přesto, že obě dvojnásobné limity existují a obě jsou nulové, neboť**

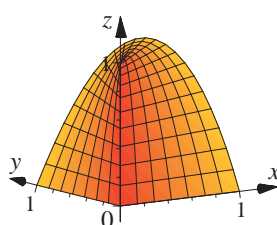
$$l_{12} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ a podobně } l_{21} = 0,$$

z čehož ve shodě s 4.7.8 opravdu neplyne existence limity.

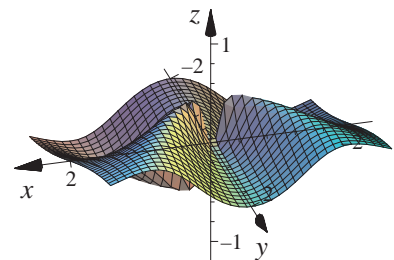
Grafem (Viz obr. 4.13, 4.14) naší funkce f je *přímková plocha* patřící²⁵⁾ mezi tzv. přímé konoidy a nazvaná **Plückerův konoid**²⁶⁾. Jeho tvořící přímky jsou rovnoběžné s (řídící) rovinou Oxy protínající osu Oz (řídící přímku) a řídící křivku $z = \frac{2y}{1+y^2}$, $x = 1$, resp. $z = \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 1$. Limity l_k jsme hledali vlastně po půdorysech $y = kx$, $z = 0$ těchto tvořících přímek. Snadno lze ověřit, že $l_k = l_{\frac{1}{k}}$ pro $k \neq 0$, $\max_{k \in \mathbb{R}} l_k = l_1 = 1$.



Obr. 4.13 Plückerův konoid



Obr. 4.14 Část Plückerova konoidu



Obr. 4.15

4.8.2 Příklad Stejnomořně spojitou funkcí na celém \mathbb{E}_2 je např. funkce $f(x, y) = \sin(x + y)$, jak lze dokázat pomocí trigonometrických nerovnic.

²⁴⁾ Teorie tedy není vždy jen „šedá“.

²⁵⁾ stejně jako hyperbolický paraboloid

²⁶⁾ čti: *plykerův*

4.8.3 Příklad Určeme v počátku $O = (0, 0)$ limitu funkce

$$z = \frac{\tan(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Řešení: Rozšířením zlomku dostáváme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\tan(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\tan(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

První limita je

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\tan(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

a druhou převedeme podle (4.35) do polárních souřadnic

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\varrho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\varrho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \varrho = 0,$$

tedy máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

4.8.4 Příklad Vyšetříme v „nekonečném“ bodě $B_\infty = (a_1, +\infty)$, $a_1 \in \mathbb{R}$ z příkladu (4.7.5) následující limitu

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a_1 \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2y}{x+y}} &= \lim_{x \rightarrow B_\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^{\frac{2y}{x+y}} = e^{2 \cdot \lim_{x \rightarrow B_\infty} \left[\frac{y}{x+y} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]} = \\ &= e^{2 \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, +\infty)} \frac{y}{x+y} \ln \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]} = e^{2 \cdot 1 \cdot \ln e} = e^2, \end{aligned}$$

kde po druhé rovnosti je využito toho, že

$$f = u^v = e^{\ln f} = e^{v \ln u}, \text{ pro } f, u > 0.$$

4.8.5 Příklad $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2} = \lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \left(\frac{\varrho^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\varrho^2}\right)^{\varrho^2 \cos^2 \varphi} = \lim_{\varrho \rightarrow +\infty} (\cos \varphi \sin \varphi)^{\varrho^2 \cos^2 \varphi} = 0,$
neboť $0 < \cos \varphi \sin \varphi < 1$ pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

4.8.6 Příklad Vypočtěme $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ y \rightarrow 2}} \frac{1}{(x+4)^3 + (y-2)^3}$.

Řešení: Položíme $x = -4 + \varrho \cos \varphi$, $y = 2 + \varrho \sin \varphi$ a chceme použít 4. část poznámky 4.7.8. Platí

$$f(x, y) = \frac{1}{(x+4)^3 + (y-2)^3} = \frac{1}{\varrho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} \quad \text{pro } (x, y) \in D_f.$$

Výraz $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi$ však mění znaménko. Protože podle vzorce $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ platí $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$, a dále je $\cos \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, můžeme pak psát $\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi = (\cos \varphi + \sin \varphi)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin \varphi\right] \left[1 - \frac{1}{2} \sin(2\varphi)\right] = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]$. Druhý činitel je vždy kladný, ale první je kladný např. pro $\varphi \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ a je záporný např. pro $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$. V definičním oboru D_f leží jednak (otevřené) polopřímky s počátečním bodem $(-4, 2)$ tvořené body, pro něž je $\varphi \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ a body, pro něž je $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$. Proto pro $\varphi \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ platí

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varrho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = +\infty,$$

a pro $\varphi \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$ platí

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varrho^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)} = -\infty.$$

Vyšetřovaná limita tedy neexistuje.

4.8.7 Příklad Vyšetřujeme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Zkoumejme limitu nejprve na zúžení (restriksi), kterou označme u , naší funkce $f(x, y)$ na množiny $p_k = \{X = (x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = kx\} \setminus \{(0, 0)\}$ neobsahující počátek O , jež jsou tvořeny svazkem přímek (přesněji polopřímek) o směrnících k se středem v počátku O . Pro $k \neq 0$ dostaneme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ X \in p_k}} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 k}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0.$$

Protože $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, tj. f je nulová na souřadnicových osách, lze shrnout, že f má nulovou limitu vzhledem ke svazku přímek p_k procházejících počátkem. Aby však zadaná „globální“ limita byla též nulová, musí (ve shodě s částí 1. v poznámce 4.5.9 na str. 72) být nulová limita nejen vzhledem k p_k , ale ke každé podmnožině definičního oboru D_f . Uvažujeme-li limity jen po přímkách, klesá k nule x i y lineárně, tedy rychlostí „stejného řádu“. Co se stane, bude-li konvergence x -ových a y -ových souřadnic rozdílná? Uvažujme proto např. množinu $q_a = \{X = (x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = ax^2, a \in \mathbb{R}, a \neq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$ tvořenou svazkem parabol s vrcholy v počátku. Pohybem po parabolách q_a klesá x s první mocninou k nule, zatímco y s druhou mocninou. Limita vzhledem ke q_a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ X \in q_a}} f(x, ax^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^4}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{a}{1 + a^2} \neq 0$$

se tedy liší od limit vzhledem k přímkám p_k , a proto f nemá v O limitu. Graf funkce f , je na obr. 4.15.

Závěr: Příklad ukazuje, že z asymptotického chování funkce z \mathbb{E}_2 vůči přímkám ještě neplyne stejné asymptotické chování funkce v \mathbb{E}_2 globálně. Tento efekt nemá analogii u funkcí jedné proměnné.

4.8.8 Příklad Vyčíslíme (trojnou) limitu

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (1 + |x| + |y| + |z|)^{\frac{5}{|x|+|y|+|z|}} = \left| \begin{array}{l} |x| + |y| + |z| = t \\ t \rightarrow 0+ \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0+} (1 + t)^{\frac{5}{t}} = e^5.$$

4.8.9 Příklad Ve shodě s prvním odstavcem poznámky 4.4.5 na str.68 a upozorněním 4.4.12 na str. 70 vyšetřeme spojitost funkce $f(x, y) = \sqrt{-(x^4 + y^4)}$.

Řešení: Definiční obor $D_f = \{(0, 0)\}$ tedy „degeneruje“ na jednobodovou, tj. uzavřenou množinu, obsahující počátek $O = (0, 0)$, který je izolovaným bodem, a proto, jak jsme ukázali v poznámce 4.4.3 na str. 68, je v něm f spojitá. Protože jinde už funkce definována není, f je spojitá funkce. Je to zároveň elementární funkce. Funkce f , pro kterou $f(O) = 0$, však v O nemá limitu, neboť O není hromadným bodem definičního oboru.

4.9 Cvičení

- 1** K zopakování si grafů funkce jedné proměnné zvolte nejprve graf nekonstantní funkce $y = f(x)$. Pro konstanty $k = \pm 1, l = \mp 1$ a $m, n \in \{\pm \frac{1}{2}, \pm 2\}$ pak nakreslete a geometricky charakterizujte grafy funkcí

a) $y = f(x) + k$, b) $y = f(x + l)$, c) $y = f(x + l) + k$, d) $y = -f(x)$,
 e) $y = m \cdot f(x)$, f) $y = f(-x)$, g) $y = f(n \cdot x)$, h) $y = m \cdot f(n \cdot x + l) + k$,
 i) $y = |f(x)|$, j) $y = f(|x|)$, k) $y = f^{-1}(x)$.²⁷⁾
- 2** Pro látkové množství n molů ideálního plynu platí stavová rovnice $pV = nRT$, kde p je tlak, V objem, T je termodynamická teplota, R konstanta. Charakterizujte izobary (kde je $p = \text{const.}$).
 {svazek přímek se středem v počátku}
- 3** Pro jeden mol reálného plynu platí Redlichova-Kwongova stavová rovnice $pV = RT + p \left(b - \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}} \right)$, kde a, b, R jsou konstanty. Vyjádřete tlak p jako funkci V, T .
 { $p = RT \left(V - b + \frac{a}{RT^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1}$ }
- 4** Odpor R krevní cévy délky l o poloměru r je z fyziologie dán Poiseuilleovou rovnicí $R = \alpha \frac{l}{r^4}$, $\alpha > 0$. Popište, kdy je odpor konstantní.
 { l a r popisuje parabola čtvrtého stupně}
- 5** Určete izoplochy neboli konstantní hladiny (vrstevnicové plochy) funkcí

²⁷⁾tam kde inverzní funkce f^{-1} existuje

- a) $u = x + y + z$ {{systém rovnoběžných rovin vytínajících na souřadnicových osách úseky se stejnou velikostí i znaménkem}}
- b) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ {{systém soustředných kulových ploch se středy v počátku}}
- c) $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ {{systém souosých *elipsoidů* v základní poloze s konstantním poměrem poloos doplněný o počátek $(0, 0, 0)$ }}
- d) $f(x, y, z) = \sqrt[5]{\frac{x^2+y^2}{z}}$. {{systém *rotačních paraboloidů* s osami v ose z , které mají vrchol v počátku, jenž je
nutno vyjmout, vzhledem k podmínce $z \neq 0$ }}

6 Určete izokřivky neboli vrstevnice funkcí a s případným využitím metody řezů si udělejte představu o jejich grafech. Poté geometrickou terminologií popište tyto grafy

- a) $z = \frac{1}{x^2+4y^2}$ {{systém elips v základní poloze, které jsou vzájemně stejnohlé se středem stejnohllosti v počátku a s vedlejšími poloosami o poloviční velikosti. Graf je podobný ploše z příkladu 4.1.9 na str. 60, je však nerotační, neboť řezy rovinami kolmými k ose z jsou zmíněné elipsy}}
- b) $z = xy$ {{systém hyperbol s kladnými, resp. zápornými kótami, jejichž vrcholy leží na přímce $y = -x$, resp. $y = x$. Grafem je *hyperbolický paraboloid* (sedlová plocha) vzniklý otočením hyperbolického paraboloidu $z = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ kolem osy z o úhel $-\frac{\pi}{4}$ (ve smyslu otáčení hodinových ručiček) a je jen „méně strmý“ oproti grafu funkce $z = y^2 - x^2$ z příkladu 4.1.8 na str. 60}}
- c) $z = e^{-(x^2+y^2)}$ {{systém soustředných kružnic se středem v počátku, jenž má jednotkovou kótu (1), která je největší ze všech možných kladných kót. $D_f = \mathbb{E}_2, H_f = (0, 1]$. Grafem je rotační plocha, která vznikne rotací křivky $z = e^{-x^2}, y = 0$ (*Gaussovy křivky* v rovině xz) kolem osy z . Plocha připomíná štíhlejší horu, která klesá do roviny xy , což vyjadřuje nulová limita v nevlastním bodě nekonečno

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ |y| \rightarrow +\infty}} e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} e^{-(x^2+y^2)} = 0.$$

Část grafu s přezdívkou „*Gaussův klobouk*“ je znázorněna na obr. 4.16. S funkcí se lze setkat v *teorii pravděpodobnosti*}}

- d) $z = -|x|$ {{systém přímek (s nekladnými kótami) rovnoběžných s osou y . Osa y je totožná s vrstevnicí o maximální kótě $c = z_{\max} = 0$. Grafem je *plocha sedlové střechy*. Osa y je tzv. *hrana maxima* známá pod názvem *hřeben sedlové střechy*}}
- e) $z = 1 - |x| - |y|$ {{systém soustředných čtverců s vrcholy na souřadnicových osách. Grafem je *plocha pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu* s hlavním vrcholem $(0, 0, 1)$ }}
- f) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ {{vrstevnice $c = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ nejsou žádné povědomé křivky. Platí však $0 \leq z = r^2 e^{-r^2}$, kde r je poloměr kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, jejíž body mají tudíž stejnou kótu. Graf dané (rotační) plochy vznikne rotací grafu (sudé) funkce $z = y^2 \cdot e^{-y^2}$ (získaného řezem nárysou $x = 0$) kolem osy z . Je to *plocha „vulkánu“*, kde dno jícnu (tzv. *ostré globální minimum funkce* je v počátku $O = (0, 0, 0)$ a okraj jícnu, tzv. *hrana maxima*, je kružnice $x^2 + y^2 = 1$ ležící v rovině $z = e^{-1}$ (jsou to tzv. *neostrá globální maxima funkce*). Situaci zachycují obr. 4.17, obr. 4.18. Stejně kótě $z = c \in (0, e^{-1})$ vždy odpovídá dvojice soustředných kružnic, a tedy i vrstevnic}}
- g) $z = k\sqrt{x^2 + y^2}, k > 0$ {{systém soustředných kružnic včetně svého středu. Grafem je část *rotační kuželové plochy* v poloprostoru $z \geq 0$ (tj. otevřené v kladném směru osy z) s vrcholem v počátku, vytvořené rotací polopřímky, která leží v rovině Oxz a má tam rovnici $z = kx, x \in [0, +\infty)$, popř. v prostoru $Oxyz$ má parametrické rovnice $x = t, y = 0, z = kt, t \in [0, \infty)$. Přitom zadanou kuželovou plochu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi s parametry u, v např. takto
 $x = u, y = v, z = k\sqrt{u^2 + v^2}, u \in (-\infty, \infty), v \in (-\infty, \infty)$ nebo
 $x = v \cos u, y = v \sin u, z = kv, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \infty)$ apod.}}
- h) $z = \text{ent} \sqrt{x^2 + y^2}$.²⁸⁾ {{graf funkce získáme rotací grafu funkce $z = \text{ent} x$ (která je rovněž příkladem *funkce po částech konstantní*, sudá a není *elementární*). Je složen pouze z vodorovných ploch „*řec-kého amfiteátru*“ o nekonečném počtu stupňů. Z obr. 4.19 je zřejmé, že *vrstevnice* $\text{ent} \sqrt{x^2 + y^2} = c$ existují jen pro kóty $c \in \mathbb{N}$, nelze je určit metodou řezů, **nejsou to totiž křivky, ale rovinné plochy**²⁹⁾}}

7 Určete a znázorněte, popř. geometrickou terminologií výstižně charakterizujte definiční obory funkcí

²⁸⁾ Funkce $x \mapsto \text{ent} x$ se nazývá *charakteristika* (starší název: funkce *celá část*), symbol $\text{ent} x$ označuje *charakteristiku* či *entier* reálného *čísla* x , tj. největší celé číslo nejvýše rovné číslu x . Platí $\text{ent} x \leq x < \text{ent} x + 1$. Např. $\text{ent} 2,9 = 2; \text{ent}(-2,1) = -3$.

²⁹⁾ Vrstevnice, zde raději říkejme *c-hladiny* nebo izoplochy, jsou výstižněji dány též nerovnicemi $c^2 \leq x^2 + y^2 < (c+1)^2$. Pro $c = 0$, resp. $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$ je *c-hladinou* otevřený kruh, resp. mezikružší (bez vnější kružnice) v rovině Oxy .

To by znamenalo, že na každé přímce $p_k \neq p_{-1}$ by byla v bodě A jiná limita; $l_{12} = \lim_{y \rightarrow 2} (\lim_{x \rightarrow 3} f(X)) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0}{y-2} = 0; l_{21} = 1$ }}

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$ {neexistuje l , neboť zúžení f na paraboly $y = ax^2, a \in \mathbb{R}$ dává různé limity ; $l_{12} = l_{21} = 0$ }}

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$ { $l = \frac{1}{2} = l_{12} = l_{21}$ }}

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}$ { $l = 0 = l_{12} = l_{21}$ }}

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ { $l = 1 = l_{12} = l_{21}$ }}

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2 y^2 (x^2+y^2)}$ { $l = +\infty = l_{12} = l_{21}$. Platí

$$l = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos \varrho^2}{\varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot \varrho^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{2\varrho \sin \varrho^2}{(\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) 6\varrho^5} = \frac{1}{3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varrho^2}{\varrho^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{2\varrho \cos \varrho^2}{4 \cdot \varrho^3} = \frac{1}{6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} (+\infty) = +\infty;$$

$$l_{12} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{y^2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x^2+y^2}{2}}{x^2(x^2+y^2)} \right) \right] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty; \text{ analogicky } l_{21}$$

g) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \left(\arcsin \frac{xz}{y} - \cos \frac{\pi}{xyz} \right)$ {funkce je spojitá v okolí bodu $(1, 1, 1)$, takže např.

$$l_{321} = \lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 1} \lim_{z \rightarrow 1} f(X) = f(1, 1, 1) = \frac{\pi}{2} + 1 = l.$$

Tutéž hodnotu má i všech 5 dalších postupných (trojnásobných) limit}}

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{y}$
 { $l = 0$, neboť $0 \leq \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{y} \right| \leq x^2 + y^2$, a pak lze použít větu o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi; analogickými nerovnostmi dokážeme $l_{12} = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(X)) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(y^2 \cdot \sin \frac{1}{y} \right) = 0$, přičemž $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$ neexistuje,³¹⁾ zatímco funkce $y^2 \cdot \sin \frac{1}{y}$ v okolí počátku „osciluje“ s narůstající „frekvencí“, ale klesající „amplitudou“; l_{21} neexistuje}}

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, kde $f(x, y) = 1$ na $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y \geq |x|\}$. Načrtněte si.
 { $l = 1 = l_{12}; l_{21}$ neexistuje (nemá smysl)}

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, kde $f(x, y) = 0$ na $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x < +\infty \wedge x \leq y \leq 2x\}$. Načrtněte si.
 {neuvádíme}}

12 Přesvědčte se, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0$.

{funkce $f(X)$ není definována v počátku O , který je hromadným bodem jejího definičního oboru $D_f = \mathbb{E}_2 \setminus \{O\}$. Pro všechny body $X = (x, y), X \neq O$ máme odhad

$$|f(X) - 0| \leq |(x^2 + y^2) \cdot 1| = x^2 + y^2 < \delta^2, \text{ kde } \delta > 0.$$

Pro takové body X , jejichž euklidovskou vzdálenost O označujeme $\varrho(X, O)$, platí implikace

$$0 < \varrho(X, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(X) - 0| < \varepsilon,$$

pro každé zvolené $\varepsilon > 0$, pokud $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Takovou implikaci se však definuje uvedená limita. Lze ji odvodit též užitím věty o limitě funkce sevřené dvěma funkcemi, protože

$$0 \leq \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2 \wedge \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$$

13 Rozhodněte, zda dané bodové či vektorové zobrazení je prosté.

a) $\Phi(x, y) = (3x + y, 1 - x + y)$ {je}}

b) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t)$ {není, ale na každém intervalu kratším než 2π je}}

c) $\vec{\Phi} = \left(\frac{x}{y}, x - y \right)$ {není, ale pro $x \neq y$ ($y \neq 0$) je}}

³¹⁾neboť lze dokázat, že v každém okolí bodu $y = 0$ nabývá tato funkce jak hodnot $+1$, tak také hodnot -1

d) $\vec{f} = (e^{x-1}, \arctan(x + 5y))$. {je}

14 Načrtněte si danou množinu $M \subseteq \mathbb{E}_2$ a bod A . Ukažte, že A je hromadným bodem M tak, že si zvolíte prostou bodovou posloupnost $\{X_k\}$ v M takovou, aby $X_k \rightarrow A$.

a) $A = (0, 0)$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x(x - y)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$, tj. $A \in M$ {např. $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\frac{4}{k}, \frac{4}{k}) = A$ }

b) $A = (3, 3)$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x - 2y + 3 > 0\}$, tj. $A \notin M$. {např. $(3, 3 - \frac{1}{k}) \rightarrow A$ }

15 Určete, zda jsou spojité funkce (tj. zda jsou spojitě prodlouženy i v bodech, kde by jinak nebyly definovány)

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(5xy)}{xy} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 5 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ {je}

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|} & \text{pro } y \neq x \\ +\infty & \text{pro } y = x. \end{cases}$ {v \mathbb{E}_2 není, neboť limita l musí být konečná. Je však spojitá na svém zúžení $f|_M$, kde $M = \mathbb{E}_2 \setminus \{(x, x) \in \mathbb{E}_2\}$ }

16 Určete body nespojitosti funkcí

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x}$ {celočíslná souřadnicová síť bodů $(m, n) \in \mathbb{E}_2, m, n \in \mathbb{Z}$ }

b) $z = \frac{1}{x^2 - y^2 - 1}$ {hyperbola}

c) $z = \text{ent} \sqrt{x^2 + y^2}$, kde $\text{ent } x$ je funkce *charakteristika*.³²⁾ {kružnice $x^2 + y^2 = n^2, n \in \mathbb{N}^*$ }

17 Vyšetřete limity L následujících zobrazení v bodech nespojitosti. Uvažte, že je můžete počítat po souřadnicích, podle věty 4.5.5 na str. 72

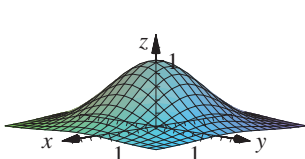
a) Nechť $L = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t)$, a nechť (bodové) zobrazení, tzv. *parametrizace* $\Phi : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_3$ popisující v \mathbb{E}_3 jistou křivku, je dáno souřadnicovými funkcemi $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$ předpisem $\Phi(t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \left(\frac{e^t \sin t}{t}, \frac{e^t - \cos t}{t}, \frac{e^t - 1}{t}\right)$, kde parametr t je bodem podmnožiny číselné osy parametrizace, tj. $t \in D_\Phi = \mathbb{E}_1 \setminus \{0\}$. Pro bod $X = (x, y, z)$ křivky máme $X = \Phi(t)$ neboli pomocí parametrických rovnic $x = \phi_1(t), y = \phi_2(t), z = \phi_3(t)$.

{ $L = (1, 1, 1)$ je bod z \mathbb{E}_3 . Pak prodloužením (dodefinováním) parametrizace Φ na Φ^* její vlastní limitou máme v \mathbb{E}_1 již spojitě zobrazení $\Phi^*(t) = \begin{cases} \Phi(t) & \text{pro } t \neq 0 \\ (1, 1, 1) & \text{pro } t = 0 \end{cases}$ }

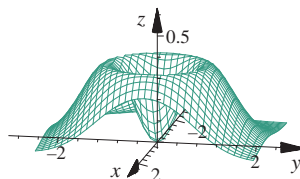
b) Nechť $L = \lim_{u \rightarrow \pi^-} \Phi(u, v)$, a nechť parametrizace $\Phi : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_3$ popisující v \mathbb{E}_3 plochu – *pseudosféru* je v \mathbb{E}_3 dána souřadnicovými funkcemi $\phi_1(u, v), \phi_2(u, v), \phi_3(u, v)$ předpisem $\Phi(u, v) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a(\cos u + \ln \tan \frac{u}{2}))$, $a > 0$.

Pro bod $X = (x, y, z)$ plochy máme $X = \Phi(U)$, kde bod $U = (u, v) \in D_\Phi$ neboli po souřadnicích máme $x = \phi_1(u, v), y = \phi_2(u, v), z = \phi_3(u, v)$. Definičním oborem parametrizace je obdélník $D_\Phi = (0, \pi) \times [0, 2\pi]$, $u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi]$. Přestože body [úseček] $(0, v) \notin D_\Phi, (\pi, v) \notin D_\Phi$, jsou to hromadné (a zároveň hraniční) body D_Φ , takže v nich můžete limitu zjišťovat.

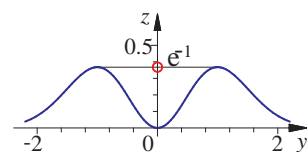
{ $L = (0, 0, +\infty) = \infty$, kde ∞ je *nevlastní bod nekonečno* v \mathbb{E}_3^* z 4.7.3. Situaci vystihuje obr. 4.20. Všimněte si, že bod $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto (0, a, 0)$, body [úsečky] $(\frac{\pi}{2}, v)$ se zobrazí na kružnici $z = 0 \wedge x^2 + y^2 = a^2$ atd.}



Obr. 4.16 Gaussův klobouk

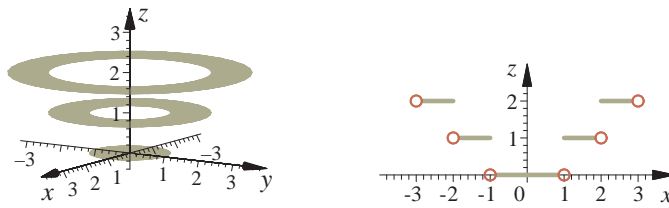


Obr. 4.17

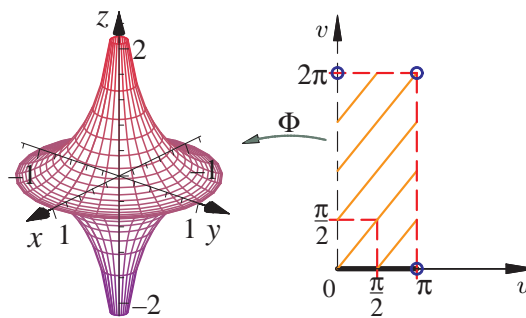


Obr. 4.18

³²⁾ Viz str. 81



Obr. 4.19 Graf funkce $z = \text{ent} \sqrt{x^2 + y^2}$, resp. charakteristiky (celé části) $z = \text{ent} x$.



Obr. 4.20 Pseudosféra

5 Diferenciální počet funkcí více proměnných

5.1 Parciální derivace

5.1.1 Definice Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována na oblasti G obsahující bod $A = (x_0, y_0)$.

1. Má-li funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$ jedné proměnné x , tj. *zúžení funkce f na proměnnou x* , v bodě x_0 (vlastní) derivaci $\varphi'(x_0)$, nazývá se **parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x v bodě A** , značí se např.

$$f'_x(x_0, y_0), f'_x(A), f'_x|_A, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial x}, z'_x|_A, \partial_1 f(X)|_{X=A}, \partial_x f(x_0, y_0),$$

apod. (čteme: df parciálně podle dx).¹⁾ Je dána limitou

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

2. Má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ jedné proměnné y , tj. *zúžení funkce f na proměnnou y* , v bodě y_0 derivaci $\psi'(y_0)$, nazývá se **parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y v bodě A** a značí se např.

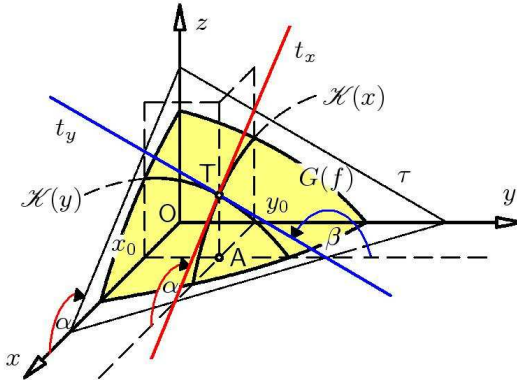
$$f'_y(x_0, y_0), f'_y(A), f'_y|_A, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}, z'_y|_A, \partial_2 f(X)|_{X=A}, \partial_y f(x_0, y_0),$$

apod. Přitom je

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

kde místo reálných čísel h, k píšeme někdy přírůstky (diference) $\Delta x, \Delta y$ nezávislé proměnných x, y .

5.1.2 Geometrický význam parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ ukazuje obr. 5.1.



Obr. 5.1 Parciální derivace

Parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ představuje **směrnici**²⁾ $\tan \alpha$ **tečny** t_x sestavené v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce $\mathcal{K}(x)$, která je řezem plochy určené grafem $G(f)$ funkce $z = f(x, y)$ rovinou $y = y_0$ (rovnoběžnou s bokorysnou xz), takže $\mathcal{K}(x)$ je definována dvěma rovnicemi, např. takto $z = f(x, y_0), y = y_0$. Je tedy

$$\tan \alpha = f'_x(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x_0},$$

kde α označuje velikost *směrového úhlu* tečny t_x , jehož určení je zřejmé ze zmíněného obrázku.

Podobně pro $f'_y(x_0, y_0)$ a $\tan \beta$ tečny t_y v bodě T ke křivce $\mathcal{K}(y)$ dané rovnicemi $z = f(x_0, y), x = x_0$ platí

$$\tan \beta = f'_y(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x_0, y)}{dy} \right|_{y_0}.$$

Oběma tečnami t_x, t_y je určena (pro tzv. diferencovatelnou funkci f v bodě (x_0, y_0)) tečná rovina $\tau \ni T$.

5.1.3 Pojem a geometrický význam parciální derivace funkce n proměnných, tj. parciální derivace funkce $u = f(X)$ n reálných argumentů x_1, x_2, \dots, x_n se definuje analogicky. Nechť f je definována na oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_n$ a bod $A = (a_1, \dots, a_n) \in G$. Nechť \vec{e}_k je k -tý jednotkový *souřadnicový vektor* (standardní báze $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ vektorového zaměření \mathbb{V}_n euklidovského prostoru \mathbb{E}_n) určující směr osy x_k . Volme pro přírůstek $h \neq 0$ *přírůstkový bod* $X = (x_1, \dots, x_n)$ z redukovaného okolí $\mathcal{O}^*(A)$ bodu A speciálně na ose x_k , tj. $X = A + h\vec{e}_k \in G$. Existuje-li vlastní (tj. konečná) limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{h} =: f'_{x_k}(A), \quad (5.1)$$

¹⁾Název: *parciální derivace = částečná derivace* je odvozen z latinského *pars = část*. Symbol ∂ vznikl nedbalým přepisem řeckého malého delta δ .

²⁾*Směrnice k přímce $z = kx$ v souřadnicové rovině Oxz značí tangens úhlu velikosti α , tj. $k = \tan \alpha$, který se nazývá *směrový úhel přímky*, o nějž se musí otočit v **kladném smyslu** kladná část osy Ox , aby poprvé splýnula s uvažovanou přímkou. **Kladný smysl otáčení** je na obrázku naznačen šipkou.*

kde k je jedno z čísel $1, \dots, n$, nebo stručněji zapsáno, limita

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{A} + h\vec{e}_k) - f(\mathbf{A})}{h} =: f'_{x_k}(\mathbf{A})}, \quad (5.2)$$

pak její hodnota se nazývá **parciální derivace**, přesněji **parciální derivace 1. řádu funkce f podle proměnné x_k v bodě \mathbf{A}** . Označuje se např.

$$f'_{x_k}(\mathbf{A}), f'_{x_k}|_{\mathbf{A}}, \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_k}, u'_{x_k}|_{\mathbf{A}}, \frac{\partial u(\mathbf{A})}{\partial x_k}, \partial_k f(\mathbf{A}), D_k f(\mathbf{A}), \partial_{x_k} f(\mathbf{A}),$$

a je to opět hodnota derivace $\varphi'_k(x_k)$ funkce $\varphi_k(x_k)$ jedné proměnné x_k , která je **zúžením funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na proměnnou x_k** , tj. u tohoto zúžení φ_k funkce f všechny argumenty kromě x_k považujeme za konstanty. Funkce $X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(X)$ definovaná na množině $M_k \subseteq \mathbb{E}_n$ všech takových bodů X , v nichž existuje $\frac{\partial f}{\partial x_k}(X)$, se nazývá **parciální derivace funkce f podle x_k** a označuje se stručně

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, f'_{x_k}, \text{ popř. jen } f_{x_k} \text{ atd.}$$

Z její definice vyplývá, že $D_{f'_{x_k}} \subseteq D_f$. Lze říci, že

Parciální derivace $f'_{x_k}(\mathbf{A})$ funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle x_k v bodě $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$ vyjadřuje rychlost růstu (resp. klesání při jejím záporném znaménku) funkce f , posunuje-li se přírůstkový bod X přes bod \mathbf{A} ve směru souřadnicové osy x_k (určeném směrem k -tého jednotkového souřadnicového vektoru \vec{e}_k).

5.1.4 Poznámka Z definice parciální derivace funkce $f(X)$ vyplývá, že ji počítáme stejným způsobem jako derivaci funkce jednoho argumentu, neboť zúžení φ_k funkce f na k -tý argument je reálná funkce jednoho argumentu x_k . Platí pro ni všechna pravidla jako pro derivaci funkce jedné proměnné (derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu atd.), protože při derivování podle x_k chápeme ostatní proměnné jako konstanty. Zdůrazněme, že zatímco u funkcí jednoho argumentu x představovala derivace $dy/dx = y'$ podíl dvou diferenciálů, u funkce dvou a více argumentů **symbol $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ je nerozdělitelný**, neboť symboly $\partial u, \partial x_k$ při tomto označení samy o sobě nemají žádný matematický význam.

5.1.5 Příklad Pro funkci $z = y^2 \ln x$ určíme pomocí limity parciální derivace

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1^2 \ln(1 + \Delta x) - 1^2 \ln 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln e = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(y + \Delta y)^2 \ln x - y^2 \ln x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (2y \ln x + \Delta y \ln x) = 2y \ln x.$$

5.1.6 Příklad Určíme parciální derivace funkce

a) $u = f(x, y, z) = x^2 y^3 + 2xy\sqrt{z}$ v bodě $\mathbf{A} = (3, 2, 1)$.

Řešení: $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) = (2xy^3 + 2y\sqrt{z})_{\mathbf{A}} = 52$. Je možné zvolit **zúžení $\varphi(x)$ funkce f na proměnnou x** , což **derivování velmi usnadní**

$$\varphi(x) = x^2 2^3 + 2x \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \varphi'(x) = 16x + 4 \Rightarrow \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x} = \varphi'(3) = 16 \cdot 3 + 4 = 52.$$

Podobně³⁾

$$f'_y|_{\mathbf{A}} = 3x^2 y^2 + 2x\sqrt{z}|_{(3,2,1)} = 114,$$

$$\partial_z u(\mathbf{A}) \equiv \partial_3 u(\mathbf{A}) = 0 + 2xy \frac{1}{2\sqrt{z}}|_{\mathbf{A}} = 6.$$

Pro příslušné definiční obory parciálních derivací platí inkluze $D_{f'_z} \subset D_{f'_x} = D_{f'_y} = D_f$.

b) $f(s, t) = \ln \ln \sin(st)$.

Řešení: Musí být $\ln \sin(st) > 0 \Rightarrow \sin(st) > 1 \Rightarrow D_f = \emptyset$, takže **neexistují parciální derivace**, i když formálně je „lze počítat“ a tak dospět k „rutiněství“.

5.1.7 Poznámka Je známo, že má-li funkce jedné proměnné v daném bodě (vlastní) derivaci, pak je v tomto bodě spojitá (obrácená věta neplatí, jak je vidět z funkce $y = |x|$). Protože však parciální derivace popisují chování dané funkce pouze ve směrech souřadnicových os, zatímco spojitost funkce se týká celého okolí (náležícího definičnímu oboru funkce) daného bodu, **z existence (vlastních, tj. konečných) všech parciálních derivací nemůže vyplývat spojitost funkce v daném bodě**, což potvrdí i následující

³⁾Zápis pomocí svislice, stejně jako předchozí zápis pomocí závorek, znamená, že **nejprve se provede daná operace před vsílcí, zde derivace, a pak se dosazuje do výrazu**.

5.1.8 Příklad Uvažujme funkci $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ z příkladu 4.8.1, jejímž grafem je Plückerův konoid a dodefinujeme ji na funkci $f^*(x, y) = f(x, y)$ takto: $f^*(0, 0) = 0$. Víme, že v počátku $O = (0, 0)$ není f spojitá (též dle 4.4.11, neboť f nemá limitu v O , ačkoli O je hromadný bod z D_f). Víme však, že f je spojitá v každém jeho okolí. Námi už v onom příkladě dodefinovaná a stejně označená funkce f^* je, jak víme, spojitá pouze zvlášť vzhledem k x a zvlášť vzhledem k y , a má tam obě parciální derivace, neboť platí

$$f^*(x, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f^*(0, 0)}{\partial x} = 0; \quad f^*(0, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f^*(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Lze ukázat, že tyto parciální derivace nejsou v počátku O spojitě.

Platí však následující věta, která je důsledkem **Lagrangeovy věty** o přírůstku funkce n proměnných.

5.1.9 Věta Má-li funkce n proměnných v okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A parciální derivace podle všech proměnných, které jsou v tomto okolí ohraničené, pak je funkce f v bodě A spojitá. ★

5.2 Diferencovatelné funkce. Diferenciál. Tečná rovina grafu funkce

5.2.1 Význam totálního diferenciálu V závěru předchozího článku jsme poznali, že na rozdíl od funkcí jedné proměnné, kde z existence (vlastní) derivace funkce f v daném bodě a vyplývá také její spojitost v onom bodě, a navíc, jak známo, je v bodě $(a, f(a))$ zaručena existence tečny grafu $G(f)$, u funkcí více proměnných tomu tak není. Tedy **pouhá existence všech parciálních derivací funkce f v bodě A nezaručí ani spojitost f v A ani existenci tečné roviny v bodě dotyku $T = (A, f(A))$** . Ukazuje se, že teprve **totální diferenciál garantuje jak spojitost f , tak tečnou rovinu** v uvažovaném bodě, a proto má **první základní význam v tom, že pro funkce více proměnných je analogicky důležitý jako existence derivace pro funkce jedné proměnné, neboť závisí na chování funkce n proměnných v celém okolí bodu**. Pomocí něj lze přehledně objasnit mj. vztah mezi spojitostí a mezi parciálními derivacemi funkce. Jeho **druhý základní význam** spočívá v tom, že v daném bodě **je lineární funkcí** nezávisle proměnných, která v jistém smyslu **nejlepším způsobem linearizuje přírůstek funkce** v bodě. To má mimořádný význam v přibližných metodách i v inženýrských aplikacích, např. ve vyrovnávacím počtu. Linearizací komplikovaných funkčních vztahů se v inženýrské praxi rozumí jejich převedení na jednodušší variantu, popsanou obecně soustavou lineárních rovnic. Pomocí totálního diferenciálu se dokáže mnoho vět, např. věta o **derivaci složené funkce**. Má také klíčový význam v **teorii pole**.

5.2.2 Definice Nechtě $z = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce definovaná v okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$. Řekneme, že je **diferencovatelná v bodě A** nebo že **má v bodě A diferenciál**, též **totální diferenciál 1. řádu**, existují-li taková čísla $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}$, že funkce ε (*chyba aproximace funkce f*) určená pomocí **přírůstku** (též *diference*) **funkce v bodě A** označovaném $\Delta z(A), \Delta z_A$, popř. $\Delta f(A)$ a definovaná rovností

$$\Delta z(A) := f(A + \vec{h}) - f(A) = D_1 h_1 + \dots + D_n h_n + \varepsilon(\vec{h}), \quad (5.3)$$

v níž **přírůstkový vektor** je $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ a **přírůstkový bod** je $A + \vec{h} =: X = (x_1, \dots, x_n) \in D_f$, má vlastnost

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\varepsilon(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0. \quad (5.4)$$

(Říkáme, že funkce ε je pro $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ **nekonečně malá** řádu vyššího než prvního. Zhruba to znamená, že číselník $\varepsilon(\vec{h})$ konverguje k nule rychleji než jmenovatel $\|\vec{h}\|^1$)

Vzhledem k přírůstkům h_1, \dots, h_n nezávisle proměnných x_1, \dots, x_n **lineární část přírůstku funkce v bodě A** se nazývá **totální diferenciál (1. řádu nebo 1. diferenciál) funkce f v bodě A** , označuje se $df(A, \vec{h})$ nebo jen $df(A)$, popř. $df_A(X)$, a definuje se takto

$$\boxed{df(A) = D_1 h_1 + \dots + D_n h_n = D_1(x_1 - a_1) + \dots + D_n(x_n - a_n)}. \quad (5.5)$$

Říkáme, že funkce f je **diferencovatelná na (v) množině $M \subset \mathbb{E}_n$** , když je diferencovatelná v každém jejím bodě.

⁴⁾ Přitom nejčastěji uvažujeme euklidovskou normu $\|\vec{h}\| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Může ale jít o kteroukoli z norem v \mathbb{R}^n určenou některou z (ekvivalentních) metrik na str. 32.

5.2.3 Poznámka

a) Obě definiční podmínky (5.3),(5.4) pro diferenciál lze zahrnout do jediné podmínky

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{o}} \frac{f(\mathbf{A} + \vec{h}) - f(\mathbf{A}) - D_1 h_1 - \dots - D_n h_n}{\|\vec{h}\|} = 0. \quad (5.6)$$

b) Funkce $\varepsilon(\vec{h})$ se nazývá **zbytek** nebo **chyba aproximace** při nahrazení funkce $f(\mathbf{X})$ funkcí lineární, tj. diferenciálem, v okolí uvažovaného bodu. Je zřejmé, že $\varepsilon(\vec{o}) = 0$ a $\varepsilon(\vec{h})$ je funkce spojitá pro $\vec{h} = \vec{o}$, tj.

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{o}} \varepsilon(\vec{h}) = \varepsilon(\vec{o}) = 0.$$

Funkce $\varepsilon(\vec{h})$ je někdy označována jako $\varepsilon(\mathbf{X})$, kde $\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n$. Pak platí

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} \frac{\varepsilon(\mathbf{X})}{\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A})} = 0, \quad (5.7)$$

odtud

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} \varepsilon(\mathbf{X}) = \varepsilon(\mathbf{A}) = 0,$$

kde ϱ je (např.) euklidovská metrika v \mathbb{E}_n .

c) Limitní podmínka (5.4) je ekvivalentní s tím, že

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{o}} \frac{\Delta f(\mathbf{A}) - df(\mathbf{A})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

To znamená, volně řečeno, že zbytek ε neboli rozdíl mezi přírůstkem funkce a jejím diferenciálem v bodě \mathbf{A} je ve srovnání s přírůstkovým vektorem \vec{h} nezávisle proměnných libovolně malý, pokud norma $\|\vec{h}\|$ je dostatečně malá, tj. pokud vzdálenost $\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \|\vec{h}\|$ mezi body \mathbf{X}, \mathbf{A} úsečky $\mathbf{A}\mathbf{X}$ je dostatečně malá. Odpověď na otázku, jak velký je zbytek ε , nám dá až Taylorův vzorec. Proto se v teorii i aplikacích využívají přibližné rovnosti

$$\Delta f(\mathbf{A}) \approx df_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \Rightarrow f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{A}) + df_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}). \quad (5.8)$$

5.2.4 Věta (Nutná podmínka diferencovatelnosti v bodě) Je-li funkce $f(\mathbf{X})$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$, pak

- 1) f je v \mathbf{A} spojitá a
- 2) f má v \mathbf{A} (vlastní) první parciální derivace podle všech proměnných a diferenciál $df(\mathbf{A})$ funkce f v \mathbf{A} je určen *jednoznačně*, přičemž pro čísla D_1, \dots, D_n z (5.5) platí rovnosti

$$D_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.9)$$

a platí vzorec

$$df(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{A})(x_n - a_n). \quad \star \quad (5.10)$$

Důkaz ad 1) Je-li f diferencovatelná v \mathbf{A} , platí (5.3). Avšak limita pravé strany této rovnosti je s přihlédnutím k (5.4) pro $\vec{h} \rightarrow \vec{o}$ rovna nule. Odtud ihned dostáváme potřebný vztah

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{o}} f(\mathbf{A} + \vec{h}) = f(\mathbf{A}) \text{ neboli } \lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}) \quad (5.11)$$

dokazující podle věty 4.4.11 spojitost f v \mathbf{A} .

ad 2) Definujme nejprve *lineární funkci* $l(\mathbf{X})$ n proměnných příslušnou diferencovatelné funkci $f(\mathbf{X})$ v bodě \mathbf{A} při použití symboliky z 5.2.2 takto

$$l(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}) + D_1(x_1 - a_1) + \dots + D_n(x_n - a_n). \quad (5.12)$$

Určeme např. parciální derivaci podle x_1 v bodě \mathbf{A} . Zvolme proto přírůstkový bod speciálně $\mathbf{X} = \mathbf{A} + h_1 \vec{e}_1 = (a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n)$ neboli přírůstkový vektor je speciálně $\vec{h} = (h_1, 0, \dots, 0)$, kde $h_1 \neq 0$ a $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ je první *souřadnicový vektor* ve \mathbb{V}_n . Předpokládejme nejprve, že $h_1 > 0$ (tím se dále vyhneme nutnosti použít

absolutní hodnoty). Pak vzdálenost bodů X, A na úsečce AX v \mathbb{E}_n je $\varrho(X, A) = \|\vec{h}\| = h_1$ a $l(X) = f(A) + D_1 h_1$. Podmínka (5.4), resp. (5.7) dává

$$0 = \lim_{X \rightarrow A} \frac{\varepsilon(X)}{\varrho(X, A)} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - l(X)}{\varrho(X, A)} = \lim_{h_1 \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(A + h_1 \vec{e}_1) - f(A)}{h_1} - D_1 \right),$$

neboť jde speciálně o limitu funkce $\frac{\varepsilon(X)}{\varrho(X, A)}$ neboli funkce $\frac{\varepsilon(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}$ vzhledem k podmnožině všech $\vec{h} \in \mathbb{V}_n$ z jejího definičního oboru, pro něž je $h_2 = \dots = h_n = 0$, a ta musí být podle tvrzení 1) v 4.5.9 táž, tj. nulová. Pro $h_1 < 0$ a $h_1 \rightarrow 0^-$ získáme stejnou rovnost. Tak je dokázáno, že

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(A + h_1 \vec{e}_1) - f(A)}{h_1} = D_1. \quad (5.13)$$

Podobně existují jednoznačně parciální derivace f podle proměnných x_2, \dots, x_n v bodě A a jsou postupně rovny koeficientům D_2, \dots, D_n . ♣

5.2.5 Příklad Funkce $f^*(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$, $f^*(0, 0) = 0$ z příkladu 5.1.8 není v počátku $O = (0, 0)$ diferencovatelná, neboť podle předešlé věty k tomu nespĺňuje jednu z nutných podmínek, zde část 1), tj. spojitost v bodě O , ačkoli v O má obě parciální derivace (rovny nule).

5.2.6 Příklad Určeme chybu aproximace $\varepsilon = \Delta z - dz$ (z 5.2.3) difference Δz funkce $z = f(x, y)$ jejím diferenciálem dz a porovnejme ji s chybami $\Delta x, \Delta y$ argumentů x, y , je-li $z = x^2 + 3y^2 - 4xy + 5x$.

Přírůstkový vektor bude $\vec{h} = (\Delta x, \Delta y)$.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = (2x - 4y + 5)\Delta x + (6y - 4x)\Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y)^2 - 4(x + \Delta x)(y + \Delta y) + 5(x + \Delta x) - x^2 - 3y^2 + 4xy - 5x$$

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \Delta z - dz = (\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2 - 4\Delta x \Delta y.$$

Vidíme, že aproximace ε je řádově menší, konkrétně o jeden řád, vzhledem k malým chybám $\Delta x, \Delta y$.

5.2.7 Věta (Kritérium diferencovatelnosti v bodě) Má-li funkce $f(X)$ první parciální derivace podle všech proměnných spojitě v bodě A , pak f je diferencovatelná v bodě A (neboli v A existuje totální diferenciál $df(A)$ funkce f). ★

5.2.8 Schéma k zapamatování si tří předchozích vět⁵⁾ Platí implikace

$$\text{spojitost } \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \forall k = 1, \dots, n \Rightarrow \exists df(A) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \forall k = 1, \dots, n \text{ a spojitost } f(X) \text{ v } A.$$

Schéma 5.1: Důsledky spojitě diferencovatelnosti $f(X)$ v bodě $A \in \mathbb{E}_n$

5.2.9 Poznámka k dalšímu zápisu diferenciálu Uvažujme funkci $z = f(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Pak pro její totální diferenciál platí

$$dx_1 = 1 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \dots + 0 \cdot h_n = h_1 = (x_1 - a_1) = \Delta x_1. \quad (5.14)$$

Podobně pro dx_2, \dots, dx_n . Pak přírůstky h_1, \dots, h_n lze považovat za **diferenciály nezávisle proměnných** x_1, \dots, x_n , takže vzorec (5.10) dává pro **totální diferenciál** funkce $z = f(X)$, resp. závisle proměnné z , **užívaný v inženýrské praxi**

$$dz = \underbrace{f'_{x_1}(X) dx_1}_{d_{x_1} z} + \dots + \underbrace{f'_{x_n}(X) dx_n}_{d_{x_n} z} = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) dx_k, \quad (5.15)$$

kde $d_{x_1} z, \dots, d_{x_n} z$ jsou tzv. **parciální diferenciály** příslušného argumentu. Následující tvrzení je bezprostředním důsledkem předešlé věty.

5.2.10 Věta (Kritérium diferencovatelnosti na otevřené množině) Má-li funkce f všechny své parciální derivace 1. řádu spojitě na otevřené množině M , pak f je diferencovatelná v každém bodě z M ; říkáme, že je **diferencovatelná na (v) M** .⁶⁾ ★

⁵⁾ které ještě rozšíříme na schéma v 5.4.11 na str. 101

⁶⁾ Často je uvažovanou otevřenou množinou okolí bodu.

5.2.11 Definice Funkce $f(X)$ mající spojité všechny parciální derivace 1. řádu na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$ (a podle schématu v 5.2.8 tedy spojitá na M) se nazývá **funkce třídy C^1 na M** (někdy se píše $C^{(1)}$, popř. C_1) nebo **funkce spojitě diferencovatelná na M nebo funkce hladká (1. řádu) na otevřené množině M** . Píšeme $f \in C^1(M)$ a místo $C^0(M)$ často jen $C(M)$.⁷⁾⁸⁾

5.2.12 Poznámka Je zřejmé, že diferencovatelnost u funkcí více proměnných (tj. existence totálního diferenciálu) je silnější předpoklad než existence všech prvních parciálních derivací. Diferencovatelnost u funkcí více proměnných hraje přibližně stejnou roli jako existence vlastní derivace zaručující diferencovatelnost u funkce jedné proměnné.

5.2.13 Poznámky ke schématu v 5.2.8 Ke schématu v 5.2.8 poznamenejme

- Jsou funkce dokládající, že pouhá existence parciálních derivací funkce f v okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A není nutnou podmínkou pro její diferencovatelnost v bodě A .
- Existují funkce, které sice nejsou třídy C^1 , a přesto jsou diferencovatelné, tj. příslušnost do třídy C^1 není nutnou podmínkou diferencovatelnosti funkce.

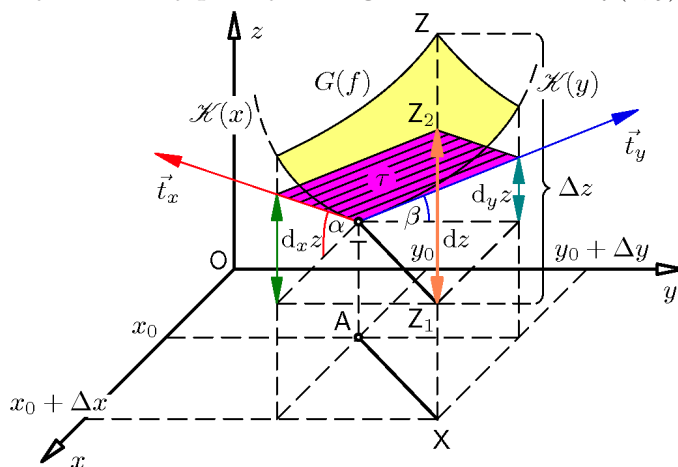
5.2.14 Věta (o invariantnosti⁹⁾ 1. totálního diferenciálu) Tvar (5.15) totálního diferenciálu 1. řádu funkce $f(X)$ je invariantní, tj. nemění se, když její argumenty x_1, \dots, x_n jsou rovněž diferencovatelnými funkcemi $x_1 = g_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n = g_n(t_1, \dots, t_k)$ dalších argumentů t_1, \dots, t_k . Pro vyšší diferenciály invariantnost nenastává.¹⁰⁾ ★

Důkaz: je založen na větě o parciálních derivacích složené funkce z následujícího článku.

5.2.15 Příklad k zavedení rovnice tečné roviny a normály plochy dané grafem funkce $z = f(x, y)$

Tyto rovnice lze odvodit za předpokladu, že funkce $f(x, y)$ je v uvažovaném bodě $(x_0, y_0) = A$ (Viz obr. 5.2) diferencovatelná.

Pak v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = T$ grafu $G(f)$ funkce f existuje **tečná rovina τ** i normála n oné plochy dané grafem funkce. Tečná rovina τ grafu je určena dvěma různými tečnami t_x, t_y majícími příslušné **směrové vektory tečen \vec{t}_x, \vec{t}_y** lineárně nezávislé, a protože τ jde bodem $T = (x_0, y_0, z_0)$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$, má její rovnice tvar



Obr. 5.2 Tečná rovina, normála, diferenciál

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0), \text{ resp. } a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad (5.16)$$

kde je třeba určit a, b . Protože **normálový vektor $\vec{n} = (-a, -b, 1)$** tečné roviny τ je kolmý k \vec{t}_x, \vec{t}_y , přičemž tyto vektory lze volit takto

$$\vec{t}_x = (1, 0, f'_x(A)), \quad \vec{t}_y = (0, 1, f'_y(A)), \quad (5.17)$$

musí být příslušné skalární součiny vektorů nulové, tj.

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{t}_x &= -a + f'_x(A) = 0 \Rightarrow a = f'_x(A) \\ \vec{n} \cdot \vec{t}_y &= -b + f'_y(A) = 0 \Rightarrow b = f'_y(A), \end{aligned}$$

⁷⁾ $C^1(M)$ je lineární prostor funkcí. Často je onou otevřenou množinou M okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu $A \in \mathbb{E}_n$.

⁸⁾ Spojitá diferencovatelnost je samozřejmě silnější požadavek na funkci než její diferencovatelnost.

⁹⁾ též o superpozici 1. diferenciálů

¹⁰⁾ Pokud g_i nejsou speciálně např. lineárními funkcemi.

a tedy **normálový vektor \vec{n} grafu funkce** (stejný výsledek pro \vec{n} čtenář získá rovněž vektorovým součinem $\vec{n} = \vec{t}_x \times \vec{t}_y$) už máme určen

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right). \quad (5.18)$$

Tečná rovina grafu funkce $z = f(x, y)$ v jeho bodě dotyku $T = (x_0, y_0, z_0)$ má rovnici

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (5.19)$$

Normála grafu v bodě T je přímka n kolmá k tečné rovině grafu v jeho dotykovém bodě $T = (x_0, y_0, z_0)$ a tato **normála** $n^{11)}$ má právě odvozený (směrový) vektor \vec{n} , takže její parametrické rovnice s parametrem $t \in (-\infty, +\infty)$ a pro $z_0 = f(x_0, y_0)$ mají tvar

$$x = x_0 - f'_x(x_0, y_0) \cdot t, \quad y = y_0 - f'_y(x_0, y_0) \cdot t, \quad z = z_0 + t. \quad (5.20)$$

Načrtněte si \vec{n} .¹²⁾

5.2.16 Existence tečné roviny motivací pro diferencovatelnost Rovnice tečné roviny τ plochy \mathcal{S} představované grafem $G(f)$ funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku $T = (A, f(A))$, $A = (x_0, y_0)$ jsme prostředky analytické geometrie zavedli za předpokladu, že f byla v A diferencovatelná. To podle věty 5.2.4 zajistilo spojitost f , a tedy 1) **souvislost grafu $G(f)$ funkce** (podle věty 3.4.15) i 2) **existenci** všech (konečných) parciálních **derivací** $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$. Souvislost grafu umožňuje provádět na něm limitní proces **přibližování bodů**, jenž je nezbytný (Viz obr. 5.2) v následující definici.

Definice (geometrická) tečné roviny plochy Rovina τ se nazývá **tečná rovina plochy \mathcal{S} v bodě dotyku T** , je-li limita poměru vzdálenosti $\text{dist}(Z, \tau)$ bodu Z plochy od roviny τ a vzdálenosti $\varrho(Z, T)$ bodu Z od bodu T rovna v bodě T nule, tj.

$$\lim_{Z \rightarrow T} \frac{\text{dist}(Z, \tau)}{\varrho(Z, T)} = \lim_{Z \rightarrow T} \varepsilon^*(Z) = 0. \quad (5.21)$$

Přímka n kolmá k rovině τ se nazývá **normála plochy** v bodě T .

Tato definice vhodná pro libovolný (konečněrozměrný) euklidovský prostor v sobě zahrnuje všechny

Požadavky na tečnou rovinu τ k ploše \mathcal{S} v bodě T , a to

- Existuje nejvýše jedna tečná rovina procházející bodem T (Lze ověřit sporem).
- Tečná rovina prochází dotykovým bodem T (Je zřejmé z její rovnice).
- Tečná rovina není rovnoběžná se souřadnicovou osou Oz (Derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ jsou konečné).
- Plocha se k tečné rovině v bodě T „přimyká“ (Objasníme).

Poslední požadavek d) je **geometricky** vyjádřen limitní rovností (5.21), což **matematická analýza** ekvivalentně vyjádří v definici diferencovatelnosti 5.2.2 limitní rovností s **chybou zbytku** (5.7) nebo ve tvaru (použitým už při důkazu věty 5.2.4)

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - l(X)}{\varrho(X, A)} = 0. \quad (5.22)$$

Ze všech nekonečně mnoha lineárních funkcí $l(X)$ tvaru

$$z = l(X) = f(A) + D_1 \cdot (x_1 - a_1) + \dots + D_n \cdot (x_n - a_n), \quad (5.23)$$

jejichž grafem je rovina (nadrovina, to při $n \geq 3$) procházející bodem $(A, f(A))$ z \mathbb{E}_{n+1} , vyhovuje limitní podmínce (5.22) zaručené diferencovatelností $f(X)$ v bodě A pouze taková lineární funkce $l(X)$, jejímž grafem je tečná rovina. Věta 5.2.4 za podmínky diferencovatelnosti f v A rovněž zaručila, že pro koeficienty platí $D_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$, $k = 1, \dots, n$, takže jsou jednoznačně určeny, a tím rovněž tečná rovina. Můžeme tedy shrnout

Definice tečné roviny grafu (její rovnici) Nechť funkce n argumentů $z = f(X)$ je v bodě

$A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{E}_n$ diferencovatelná. Položme $z_0 = f(A)$. Množina bodů euklidovského prostoru \mathbb{E}_{n+1} , jehož souřadnice označíme x_1, \dots, x_n, z , která vyhovuje rovnici

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n), \quad (5.24)$$

¹¹⁾ **Směrový vektor přímky** je vektor s ní kolineární.

¹²⁾ Vektory $\{\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{n}\}$ tvoří kladně (tj. pravotočivě) orientovanou bázi zaměření \mathbb{V}_3 euklidovského prostoru \mathbb{E}_3 (Proč?).

¹³⁾ jenž znamená, jak jsme v oné definici zmínili, že v čitateli $f(X) \rightarrow l(X)$, a toto přibližování znamenající přibližování bodů (z obrázku) $Z = (X, f(X))$ grafu $G(f)$ k bodům $Z_2 = (X, l(X))$ tečné roviny τ je dokonce „rychlejší“ než přibližování ve jmenovateli, kde konvergence vzdáleností $\varrho(X, A) \rightarrow 0$ vyjadřuje, že $X \rightarrow A$.

se nazývá **tečná rovina**, resp. **tečná nadrovina** (když $n \geq 3$) **grafu** $G(f)$ z \mathbb{E}_{n+1} funkce f v bodě dotyku $T = (A, f(A))$.

Věta o nutné i postačující podmínce existence tečné (nad)roviny K existenci tečné nadroviny v \mathbb{E}_{n+1} grafu funkce $z = f(X)$ n proměnných v bodě dotyku $T = (A, f(A))$, která není rovnoběžná s osou Oz , je nutné a stačí, aby funkce $f(X)$ byla diferencovatelná v bodě $A \in \mathbb{E}_n$. ★

5.2.17 Geometrický význam totálního diferenciálu funkce dvou proměnných

Totální diferenciál $dz(A)$ funkce $z = f(x, y)$ v bodě A , na rozdíl od skutečného přírůstku Δz závisle proměnné z na grafu $G(f)$ funkce f , **představuje přibližnou, a to lineární část přírůstku** (v případě, že je tato část záporná pak úbytku) **závisle proměnné z měřenou na tečné rovině**.

Na obr. 5.2 je to kladná hodnota (funkce roste) délky svislé úsečky označené tam dz s koncovými body $Z_1 = (X, f(A))$, $Z_2 = (X, l(X))$ a zvýrazněné šipkami.

Totální diferenciál dz v bodě A určíme tak, že na tečné rovině (existuje-li) změříme třetí souřadnici takového bodu (na obrázku je to bod Z_2), jehož kolmým průmětem do roviny Oxy je **přírůstkový bod** X , a odečteme od ní souřadnici $f(A)$.¹⁴⁾

Totální diferenciál funkce v daném bodě **reprezentuje absolutní a přibližnou změnu** závisle proměnné vzhledem ke změně všech nezávisle proměnných, na rozdíl od parciální derivace funkce v daném bodě, která reprezentuje **relativní změnu** závisle proměnné vzhledem k jedné nezávisle proměnné.

5.2.18 Příklad aplikace diferenciálu v teorii chyb měření S jakou absolutní chybou ΔV a relativní chybou můžeme vypočítat objem V rotačního kužele, jestliže při měření poloměru r jeho základny a výšky v bylo naměřeno $r = (2,5 \pm 0,1)\text{m}$, $v = (3,0 \pm 0,2)\text{m}$?

Řešení:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi 2,5^2 \cdot 3 = 6,25\pi, & V &= 6,25\pi \text{ m}^3, \\ \Delta V \approx dV &= \frac{1}{3}\pi(2rvdr + r^2dv) = \frac{1}{3}\pi(1,5 + 1,25) = 0,92\pi, & dV &= 0,92\pi \text{ m}^3, \\ \frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} &= \frac{0,92}{6,25} \doteq 0,15 \text{ neboli } 15\%. \end{aligned}$$

5.2.19 Příklad Vypočítejme přibližně $z = \cot 43^\circ \sin 151^\circ$ pomocí aproximace diferenciálem, tj. vzorcem (5.8). Použijeme vztahy

$$\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha),$$

a protože pracujeme s funkcemi reálných argumentů, užijeme převedení stupňové míry velikosti úhlů na obloukovou míru v radiánech (ty se většinou nevyepisují), tj. 1° odpovídá $\frac{\pi}{180}$ (rad). Proto $z = \cot \frac{43}{180}\pi \sin \frac{151}{180}\pi = \tan \frac{47}{180}\pi \sin \frac{29}{180}\pi$. Zvolíme funkci $f(X) = \tan x \sin y$ a bod $A = (\frac{47}{180}\pi, \frac{29}{180}\pi) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$. Hodnoty $f(A)$ jsou tabulkové, přírůstkový bod je $X = (\frac{47}{180}\pi, \frac{29}{180}\pi)$, přírůstkový vektor je $\vec{h} = (dx, dy) = (\frac{2\pi}{180}, -\frac{\pi}{180})$. Proto

$$\begin{aligned} df &= \frac{\sin y}{\cos^2 x} dx + \tan x \cos y dy \\ df(A, \vec{h}) &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \frac{2\pi}{180} + \tan \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{180} - 1 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{180} = \frac{4-\sqrt{3}}{360}\pi \doteq 0,0197916. \\ z &= f(X) = f(A) + \Delta f(A) \approx f(A) + df(A) = \tan \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{4-\sqrt{3}}{360}\pi \doteq 0,519791, \end{aligned}$$

přičemž hodnota přímo (a přesně) vyčíslená je $z = 0,519846 \dots$

5.2.20 Příklad Odvoďme horní odhad velikosti absolutní chyby $|\Delta z|$, resp. relativní chyby (procentuální) $|\Delta z/z|$ funkce $z = f(x, y)$, jsou-li argumenty x, y určeny s chybami $\pm \Delta x, \pm \Delta y$. Pak provedme odhady pro závislost $z = \frac{x}{y}$.

Řešení: Platí

$$|\Delta z| \approx |dz| = |z'_x \Delta x + z'_y \Delta y| \leq |z'_x| \cdot |\Delta x| + |z'_y| \cdot |\Delta y|$$

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| 100 \leq 100(|\frac{z'_x}{z}| \cdot |\Delta x| + |\frac{z'_y}{z}| \cdot |\Delta y|).$$

Pak pro podíl nezávislých veličin x, y dostáváme odhady maximálních chyb

¹⁴⁾Na obrázku jsou také znázorněny parciální diferenciály dxz, dyz .

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta x| + \left| \frac{-x}{y^2} \right| |\Delta y| = \left| \frac{\Delta x}{y} \right| + \left| \frac{x}{y} \right| \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| 100 \leq 100 \left(\left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \right).$$

Formulujte poslední nerovnost slovně.

5.2.21 Příklad Část rotační kuželové plochy v poloprostoru $z \geq 0$ s osou v ose z o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nemá ve svém vrcholu $O = (0, 0)$ tečnou rovinu, neboť uvedená funkce není v O diferencovatelná (Proč?).

5.3 Derivace složené funkce. Derivace vyšších řádů. Záměnnost derivací

5.3.1 Věta (o parciálních derivacích složené funkce – řetězové pravidlo) Nechť je dána funkce $y = f(\mathbf{U})$ m proměnných, tj.

$$y = f(u_1, \dots, u_m) \quad (5.25)$$

a dále zobrazení $g: \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$ dané m funkcemi $g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})$ n proměnných pomocí rovnic

$$g: u_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = g_m(x_1, \dots, x_n). \quad (5.26)$$

Označme $h = f(g(\mathbf{X}))$ složenou funkci $f(g)$ neboli $f \circ g$ (n proměnných) danou předpisem

$$y = h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)), \quad (5.27)$$

kde vnitřní funkce g_1, \dots, g_m jsou diferencovatelné v bodě¹⁵⁾ $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$ a vnější funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{B} = (g_1(\mathbf{A}), \dots, g_m(\mathbf{A})) \in \mathbb{E}_m$. Pak složená funkce h je diferencovatelná v bodě \mathbf{A} a pro každé $k = 1, \dots, n$ splňují její parciální derivace vzorce – **řetězové pravidlo**

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (5.28)$$

nebo s poněkud přesnějším označením

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{B}) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\mathbf{A}). \star \quad (5.29)$$

Důkaz: se opírá o existenci diferenciálů příslušných funkcí a je složitý.

5.3.2 Důsledek 1 Speciálně, máme-li složenou funkci

$$z = h(x) = f(g_1(x), g_2(x)),$$

tj. funkce $u = g_1(x), v = g_2(x)$ jsou závislé na jednom argumentu x , pak odpovídající parciální derivace přejdou v obyčejné a řetězové pravidlo (5.28) dává

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}. \quad (5.30)$$

5.3.3 Důsledek 2 Často je složená funkce dána takto

$$z = h(x, y) = f(x, y, g_3(x, y)), \quad (5.31)$$

tj. vnější funkce f obsahuje x a y jednak přímo (neboli jako složky $u = g_1(x) = x, v = g_2(y) = y$), jednak prostřednictvím složky $w = g_3(x, y)$ (popř. ještě dalších složek), takže

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.32)$$

[Zde nelze použít označení (5.28) a vpravo psát např. $\frac{\partial z}{\partial x}$ místo $\frac{\partial f}{\partial x}$!]

5.3.4 Příklad Tlak plynu je dán předpisem $p = p(V, T)$, kde V je objem plynu a T je termodynamická teplota, přičemž zároveň je $V = V(T, S)$, kde S je entropie. Respektujme označení z fyzikálních a chemických aplikací, kdy indexy u parciálních derivací představují proměnné považované při derivování za konstantní, a určíme $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S, \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T$.

Řešení: Tlak p je složenou funkcí $p = p(V(T, S), T)$ argumentů T, S . Řetězové pravidlo dává¹⁶⁾

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T.$$

¹⁵⁾k tomu podle věty 5.2.7 a definice 5.2.11 stačí, jsou-li v okolí uvažovaného bodu třídy C^1 , tj. mají-li zde spojitě parciální derivace

¹⁶⁾s přihlédnutím k 5.3.3

5.3.5 Příklad Určeme $\frac{\partial z}{\partial x}$ pro $z = (x \cos y)e^{\frac{x}{y}}$ ($x \cos y > 0 \wedge y \neq 0$). Položíme $z = u^v$, $u = x \cos y$, $v = e^{\frac{x}{y}}$. Podle (5.28) je

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = v u^{v-1} \cdot \cos y + u^v \ln u \cdot e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} = u^v \left[\frac{e^{\frac{x}{y}} \cos y}{x \cos y} + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} \ln(x \cos y) \right] = (x \cos y)^{e^{\frac{x}{y}}} e^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln(x \cos y)}{y} \right].$$

Po úpravě často derivujeme, s přihlédnutím k řetězovému pravidlu, podle příslušné proměnné přímo a na ostatní proměnné se díváme jako na konstanty.

5.3.6 Logaritmická derivace – Příklad Stejně jako u funkce jedné proměnné je někdy výhodné před derivováním funkci zjednodušit při respektování podmínek pro její definiční obor, a pak ji teprve derivovat. Např. logaritmování převede mocniny funkcí na jejich součiny, resp. součiny (podíly) funkcí na jejich součty (rozdíly).

$$\begin{aligned} z &= (x \cos y)^{e^{\frac{x}{y}}} && | \ln && \text{[tj. logaritmujeme obě strany]} \\ \ln z &= e^{\frac{x}{y}} \ln(x \cos y) && | \frac{\partial}{\partial x} && \text{[derivujeme obě strany]} \\ \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left[e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} \ln(x \cos y) + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{x \cos y} \cos y \right] \\ z'_x &= (x \cos y)^{e^{\frac{x}{y}}} e^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln(x \cos y)}{y} \right]. \end{aligned}$$

5.3.7 Parciální derivace vyšších řádů Má-li funkce $z = f(x, y)$ na množině M_1 parciální derivace, je každá z nich na M_1 opět funkcí dvou argumentů x, y , a pokud má na neprázdné množině $M_2 \subseteq M_1$ opět parciální derivace podle x , popř. podle y , jsou celkem čtyři a nazývají se **parciální derivace 2. řádu** nebo **druhé parciální derivace**. Značí se obvykle

$$\begin{aligned} \text{a) } & f''_{xx}(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{x^2}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} z, z''_{xx}, z_{xx}; \\ \text{b) } & f''_{xy}(x, y), \boxed{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} z, z''_{xy}, z_{xy}; \\ \text{c) } & f''_{yx}(x, y), \boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} z, z''_{yx}, z_{yx}; \\ \text{d) } & f''_{yy}(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, f''_{y^2}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, z''_{yy}, z_{yy}; \end{aligned}$$

(např. $\partial^2 f / \partial x^2$ čteme: d druhá f podle dx na druhou, $\partial^2 f / \partial x \partial y$ čteme: d druhá f podle dx dy). V případech b), c) jde o **smíšené parciální derivace** (řádu 2).¹⁷⁾ Derivace 2. řádu pro funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ definujeme takto

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(A) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)(A)}, \quad k = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, n \quad (5.33)$$

a může jich být celkem n^2 . Obecně se **parciální derivace m -tého řádu** ($m \geq 2$) $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_2} \partial x_{k_1}}$ funkce $f(X)$ získá z parciálních derivací řádu $m-1$ opětovným derivováním podle příslušných proměnných. Derivací celkem může být n^m (pokud existují). Je-li $x_{k_i} \neq x_{l_j}$ pro některé indexy $i, j \in \{1, \dots, m\}$, jde o **smíšené derivace**. Např. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}$ znamená, že jsme funkci derivovali nejprve podle x_2 , pak podle x_1 , a pak opět podle x_1 .

5.3.8 Příklad – otázka záměnnosti smíšených derivací Určeme následující smíšené derivace 3. řádu pro funkci $z = x^3 \cos y$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cos y &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = -6x \sin y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x^3 \sin y &\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3x^2 \sin y \Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -6x \sin y, \end{aligned}$$

což jsou shodné výsledky a ptáme se, kdy se sobě rovnají derivace, které se liší jen pořadím derivování. Odpověď získáme z dále uvedené Schwarzovy věty.

¹⁷⁾Oproti námí použité Legendreovy (čti: *ležádrovy*) symboliky se ještě setkáváme s obrácenou symbolikou $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

5.3.9 Definice Přihlédneme-li ke speciálním případům v příkladu 4.3.4 na str. 67 a v definici 5.2.11 na str. 91, funkce $f(X)$ mající spojité všechny parciální derivace do řádu k včetně, $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$ se nazývá **funkce třídy C^k na M** nebo **funkce k -krát spojitě diferencovatelná na M** nebo **funkce hladká k -tého řádu na M** . Píšeme $f \in C^k(M)$ (Množina $C^k(M)$ je **lineární prostor funkcí**).

Symbolem $C^k(\bar{M})$, kde $\bar{M} = M \cup \partial M$, označujeme množinu všech funkcí z $C^k(M)$, jejichž parciální derivace do řádu k včetně lze **spojitě prodloužit** na hranici ∂M množiny M (Viz 4.6.14 na str. 75). Říkáme pak, že funkce má spojité parciální derivace do řádu k včetně na \bar{M} . Přitom hodnotou **parciální derivace** daného řádu **v bodě B hranice ∂M** rozumíme limitu posloupnosti hodnot příslušné parciální derivace daného řádu v takových bodech $X_k \in M$, jejichž posloupnost $\{X_k\}$ konverguje k bodu B , tj. $X_k \rightarrow B$. (Analogicky definujeme množiny $C^k(\bar{M})$, kde $M \subset \bar{M} \subset \bar{\bar{M}}$) Pro $k = 0$ příslušné množiny značíme jednoduše jako $C(M), C(\bar{M})$. Symbolem $C^\infty(M)$ označujeme množinu všech funkcí majících spojité derivace všech řádů na M (tj. jsou to funkce třídy C^k na M pro každé přirozené k).

5.3.10 Poznámka K tomu, aby existovaly parciální derivace jistého řádu, je nutná existence parciálních derivací všech nižších řádů. Ze spojitosti derivací jistého řádu plyne spojitost parciálních derivací všech nižších řádů, tj.

$$\boxed{C^\infty(M) \subseteq C^k(M) \subseteq C^{k-1}(M) \subseteq C(M)}. \quad (5.34)$$

5.3.11 Věta Schwarzova¹⁸⁾ (o záměnnosti smíšených parciálních derivací) Jestliže smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} funkce $f(x, y)$ existují na okolí $\mathcal{O}(A)$ a jsou spojité v bodě $A = (x, y)$, pak jsou si rovny, tj.

$$\boxed{f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)}. \quad \star$$

5.3.12 Zobecněná Schwarzova věta (o záměnnosti smíšených parciálních derivací) Jestliže funkce $f(X)$ je třídy C^k na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{E}_n$, pak její parciální derivace do k -tého řádu včetně, které se liší jen pořadím derivování, se sobě rovnají.¹⁹⁾ \star

5.3.13 Důsledek Je-li $f(x, y) \in C^3(M)$, pak na M platí $f''_{xy} = f''_{yx}, f'''_{xyx} = f'''_{xxy}$ apod., avšak o záměnnosti 4. a vyšších derivací nelze tvrdit nic.

Předešlé dvě věty mají klíčový význam v mnoha následujících částech diferenciálního počtu.

5.3.14 Věta o vyšších derivacích složené funkce Je-li funkce $z = f(u, v)$ na oblasti M_{uv} aspoň třídy C^k , a jsou-li také funkce

$$u = g_1(x, y), \quad v = g_2(x, y)$$

na oblasti N_{xy} aspoň třídy C^k , pak i složená funkce

$$z = h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$$

je na svém definičním oboru $D_{xy}(h)$ aspoň třídy C^k . \star

Důkaz: se provede matematickou indukcí vzhledem k číslu k .

5.3.15 Příklad na transformaci diferenciálního výrazu Nechť $z(x, y)$ je třídy C^2 na oblasti G . Do Laplaceovy²⁰⁾ parciální diferenciální rovnice

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0 \quad (5.35)$$

zavedme polární souřadnice ϱ, φ transformačními rovnicemi $x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi$, kde $\varrho \in (0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi]$.

Řešení: Zde bude $z = z(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))$.

$$\begin{aligned} z'_\varrho &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho} = z'_x \cos \varphi + z'_y \sin \varphi \\ z'_\varphi &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = z'_x (-\varrho \sin \varphi) + z'_y \varrho \cos \varphi. \end{aligned}$$

¹⁸⁾ Objevil i dokázal ji Francouz Clairaut, Alexis, Claude (1713-1765), Němec Schwarz, Karl Hermann Amandus (1843-1921).

¹⁹⁾ O dalším zobecnění věty viz poznámku pod čarou k 5.6.4 na str. 117.

²⁰⁾ čti: *laplasovy*

Z této soustavy dvou rovnic o neznámých z'_x, z'_y můžeme neznámé jednoznačně určit, neboť determinant nehomogenního systému je roven $\varrho > 0$, tj. je nenulový. Pak máme

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_\varrho \cos \varphi - z'_\varphi \frac{\sin \varphi}{\varrho} \stackrel{\text{(formálně)}}{=} \left[\cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] z \\ z'_y &= z'_\varrho \sin \varphi + z'_\varphi \frac{\cos \varphi}{\varrho} \stackrel{\text{(formálně)}}{=} \left[\sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] z \end{aligned}$$

a použitím těchto derivací dostaneme

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = \left[\cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] z'_x = \\ &= \cos \varphi \left(\cos \varphi \cdot z''_{\varrho\varrho} + \frac{\sin \varphi}{\varrho^2} z'_\varphi - \frac{\sin \varphi}{\varrho} z''_{\varphi\varrho} \right) - \frac{\sin \varphi}{\varrho} \left(-\sin \varphi \cdot z'_\varrho + \cos \varphi \cdot z''_{\varrho\varphi} - \frac{\cos \varphi}{\varrho} z'_\varphi - \frac{\sin \varphi}{\varrho} z''_{\varphi\varphi} \right) = \\ &= z''_{\varrho\varrho} \cos^2 \varphi - z''_{\varrho\varphi} \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho} + z''_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho^2} + z'_\varrho \frac{\sin^2 \varphi}{\varrho} + z'_\varphi \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2}. \end{aligned}$$

Podobně se odvodí

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = \left[\sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\cos \varphi}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] z'_y = z''_{\varrho\varrho} \sin^2 \varphi + z''_{\varrho\varphi} \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho} + z''_{\varphi\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho^2} + z'_\varrho \frac{\cos^2 \varphi}{\varrho} - z'_\varphi \frac{\sin(2\varphi)}{\varrho^2}.$$

Sečtením z''_{xx} a z''_{yy} získáme transformovanou Laplaceovu rovnici

$$z''_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} z''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho} z'_\varrho = 0$$

v polárních souřadnicích, kterou lze též přepsat na tvar

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial z}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.36)$$

5.4 Derivace ve směru. Gradient. Výpočet operátorů teorie pole

5.4.1 Motivace Nyní navážeme na úvahy v článkách 4.2.5 až 4.2.10, kde jsme pomocí zobrazení euklidovského prostoru v \mathbb{E}_n zavedli pojmy *vektorová funkce* $\vec{y} = \vec{F}(\mathbf{X})$ n reálných proměnných (o m souřadnicích, tj. $\vec{y} \in \mathbb{V}_m$), *vektorové pole* $(M, \vec{f}(\mathbf{X}))$ definované na $M \subseteq \mathbb{E}_n$ předpisem $\vec{f}: \mathbb{E}_n \ni \mathbf{X} \mapsto \vec{y} \in \mathbb{V}_n$, kde $\mathbb{V}_n = \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ je zaměření \mathbb{E}_n .

V přírodních vědách, zvláště ve fyzice, se setkáváme s pojmy jako je *pole teplot*, např. vzduchu, *tlakové pole* atmosféry. Také černobílý text na listě papíru můžeme chápat jako rovinné pole. V těchto případech jde o skalární pole prostorové v \mathbb{E}_3 nebo rovinné v \mathbb{E}_2 .

U skalárních polí vyřešíme otázku, jak rychle se mění hodnota sledované fyzikální veličiny v daném směru, v jakém směru roste nejrychleji apod.

Úmluva Uvedeme-li v tomto článku, ale i dále v textu stručně: *směr* \vec{s} , míníme tím všude *jednotkový vektor směru* \vec{s} . V platné normě²¹⁾ je pro něj označení \vec{e}_s , které by však vzorce komplikovalo.

- Při geometrických úvahách vyžadujících popis v souřadnicích budeme vždy předpokládat, že je dána libovolná, avšak pevně zvolená *kladná* neboli *pravotočivá kartézská soustava souřadnic*.

5.4.2 Definice skalárního i vektorového pole a pojmů z aplikací Je-li v každém bodě \mathbf{X} oblasti G z \mathbb{E}_n (nejčastěji $n = 3, 2$) definována (konečná) reálná funkce $u = f(\mathbf{X})$, říkáme, že *na oblasti G je definováno skalární pole* $f(\mathbf{X})$, podrobněji (G, f) . Je-li bodu $\mathbf{X} \in G \subseteq \mathbb{E}_n$ přiřazen místo čísla jediný vektor \vec{v} (tj. je dána vektorová funkce $\vec{v} = \vec{f}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \mapsto \vec{v}$), říkáme, že *na oblasti G je definováno vektorové pole* $\vec{f}(\mathbf{X})$, podrobněji (G, \vec{f}) . Pole, u něhož příslušná funkce nezávisí na čase t , se nazývá *stacionární* (tj. *ustálené*) *pole* (a na taková se omezíme). Nezávisí-li ani na souřadnicích bodu \mathbf{X} , jde o *homogenní pole*. Představují-li rovnice $u(x, y, z) = c_i$, $c_i \in \mathbb{R}$ plochy, nazývají se *hladiny* nebo *izoplochy* příslušného *skalárního pole* $u(x, y, z)$.

5.4.3 Poznámka k označování vektorů a jejich derivování či integrování

Vektorovým polem je např. gravitační pole Země, kdy gravitační síla \vec{F} mění směr i velikost v závislosti na tom, kde se bod \mathbf{X} nachází. Místo bodu \mathbf{X} však k jeho popisu někdy užíváme jeho radiusvektor (průvodič) \vec{r} . Víme, že ve fyzice jsou síla \vec{F} i \vec{r} tzv. vázané vektory. Pak se ve shodě s 4.2.6 můžeme místo s funkcí $f(\mathbf{X})$, resp. $\vec{f}(\mathbf{X})$ setkat se zápisy $f(\vec{r})$, resp. $\vec{f}(\vec{r})$ apod.

²¹⁾ ČSN ISO 31-11, podrobněji viz [5]

• Vektorová pole znázorňujeme množinou šipek. Jsou-li $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ souřadnicové vektory ortonormální báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ v zaměření $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ prostoru \mathbb{E}_3 , lze vektorové pole $\vec{F}(x, y, z)$ zapsat v **polokartézském označení** jako $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, a rozložit je tím ve tři skalární pole P, Q, R . Je-li definiční obor vektorového pole částí roviny xy a souřadnice (složka) $R = 0$, jde o **rovinné pole**.

• Poznamenejme ve shodě s větou 4.5.5, že tak jak **limitu**, tak také **parciální derivaci vektorové funkce** nebo **vektorového pole**, stručně **vektoru** (resp. její neurčitý nebo určitý **integrál**), určíme jako vektor, jehož souřadnice **vypočítáme derivováním** (resp. integrováním) **po souřadnicích**, tj. uvedené operace aplikujeme postupně na všechny souřadnicové funkce tam, kde jsou tyto operace definovány.²²⁾

5.4.4 Definice směrové derivace Mějme reálnou funkci $f(X)$ definovanou na neprázdné oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_n$, bod $A \in G$ a nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbb{V}_n$, kde $\mathbb{V}_n = \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ je zaměření euklidovského prostoru \mathbb{E}_n . Nechť $p: X = A + h\vec{v}$, $h \geq 0$, je **polopřímka** v G s počátkem A , přičemž vzdálenost bodů $X, A \in p$ je $h\|\vec{v}\|$. Existuje-li limita²³⁾

$$f'_{\vec{v}}(A) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(A + h\vec{v}) - f(A)}{h\|\vec{v}\|}, \quad (5.37)$$

nazývá se **derivace funkce f podle vektoru \vec{v}** (obecně ne **jednotkového**) v bodě A . Je-li $\vec{v} = \vec{s}$, kde \vec{s} je navíc **jednotkový vektor**, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(A + h\vec{s}) - f(A)}{h} \quad (5.38)$$

nazývá (**směrová**) **derivace funkce f ve směru \vec{s}** (jednotkového vektoru) **v bodě A** , a označuje se $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ (nebo $\frac{df}{d\vec{s}}(A)$, popř. $f'_{\vec{s}}(A)$).

5.4.5 Důsledek Je-li ještě navíc $\vec{s} = \vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde $\vec{e}_k \in \mathbb{V}_n$ je k -tý **souřadnicový vektor**²⁴⁾ **standardní báze** zaměření \mathbb{V}_n , pak příslušná **směrová derivace** $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(A)$ v (5.38), **směrová derivace v opačném směru** $-\vec{e}_k$ označená jako $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{e}_k)}(A)$ a **parciální derivace** $\frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$ **funkce f** podle k -té proměnné v bodě A , **vyhovují rovnosti** v následujícím

Tvrzení: *Nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(X)$ měla v bodě A parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$, je, aby měla v tomto bodě derivaci $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(A)$ ve směru \vec{e}_k i derivaci $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{e}_k)}(A)$ v opačném směru $-\vec{e}_k$ a aby*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(A) = -\frac{\partial f}{\partial(-\vec{e}_k)}(A) \quad \left[= \frac{\partial f}{\partial x_k}(A) \right]. \quad (5.39)$$

5.4.6 Další důsledky definice derivace funkce v daném směru Mějme funkci $z = f(x, y)$ spojitou na oblasti G obsahující bod $A = (x_0, y_0)$ a dále jednotkový vektor směru $\vec{s} \in \mathbb{V}_2$ určený nenulovým vektorem $\vec{v} \in \mathbb{V}_2$. Pak $\vec{s} \uparrow \vec{v}$ jsou **souhlasně rovnoběžné vektory**, a lze psát $\vec{v} = (v_1, v_2)$ nebo $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$

$$\vec{s} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta) = (s_1, s_2), \quad (5.40)$$

kde souřadnice s_1, s_2 směru \vec{s} jsou jeho **směrové kosiny**.²⁵⁾ Přitom

$$\|\vec{s}\|^2 = s_1^2 + s_2^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1. \quad (5.41)$$

a) Využijeme-li předešlé geometrické symboliky, můžeme definiční vzorec (5.37) rozepsat v bodě $A = (x_0, y_0)$ následovně

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h \cos \alpha, y_0 + h \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad (5.42)$$

a takto se pro $n = 2$ často derivace ve směru \vec{s} jednotkového vektoru $\vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ definuje.

b) Platí-li $\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}(x_0, y_0)$, kde

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(A + h\vec{i}) - f(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f([x_0, y_0] + h \cdot (1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad (5.43)$$

²²⁾tj. na průniku definičních oborů souřadnicových funkcí

²³⁾Jde o limitu **zúžení** $f|_p$ funkce f na polopřímku p , takže na p je f funkcí pouze proměnné h .

²⁴⁾tj. má k -tou souřadnici rovnou 1 a ostatní jsou nulové

²⁵⁾tj. kosiny **směrových úhlů**, což jsou úhly α, β , které svírá daný vektor se souřadnicovými vektory $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, a tedy i se směry kartézských souřadnicových os x, y

a podobně $-\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}(x_0, y_0) = -\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0-h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0-h, y_0) - f(x_0, y_0)}{-h}$,
 pak existuje $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a platí $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial i}(x_0, y_0) \left[= -\frac{\partial f}{\partial(-i)}(x_0, y_0) \right]$.

c) Z části a) je vidět, že při definici směrové derivace vlastně používáme definici obyčejné derivace následující funkce jedné proměnné h v bodě 0

$$f(x_0 + hs_1, y_0 + hs_2) = f(x_0 + h \cos \alpha, y_0 + h \cos \beta).$$

Je to složená funkce $\varphi(h) = f(g)(h)$ s vnější funkcí f a vnitřní (bodovou) funkcí g o dvou souřadnicích g_1, g_2 danou předpisem

$$g(h) = (g_1, g_2) = (x_0 + hs_1, y_0 + hs_2).$$

Za předpokladu diferencovatelnosti funkce f a užitím důsledku 5.3.2 řetězového pravidla dostaneme vzorec pro praktický výpočet v aplikacích, který je založen na pojmu „gradient funkce f v bodě A “

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) &= \frac{d}{dh} g(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \frac{d(x_0 + hs_1)}{dh}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \frac{d(y_0 + hs_2)}{dh}(0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(A) s_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(A) s_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) \cdot (s_1, s_2) = (\text{grad } f|_A) \cdot \vec{s}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Pomocí skalárního součinu jsme po poslední rovnosti dospěli k jisté vektorové funkci $\text{grad } f(x, y)$ nazývané *gradient funkce* s hodnotou v bodě A , kterou lze definovat pro $n = 3$, tj. pro funkce tří proměnných x, y, z , přičemž pak bude

$$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (5.45)$$

Pro $n \geq 4$ se gradient definuje podobně, jen se oproti případu $n = 2, 3$ už nepracuje se směrovými kosiny, ale se souřadnicemi $(s_1, \dots, s_n) =: \vec{s}$ jednotkového vektoru směru \vec{s} .

5.4.7 Definice gradientu skalárního pole Buď $u = f(x, y, z)$, popř. $u = f(X)$ skalární pole (G, f) . Má-li funkce²⁶⁾ f všechny parciální derivace (vlastní) v bodě $A \in G$, pak vektor

$$(f'_x(A), f'_y(A), f'_z(A)) \in \mathbb{V}_3, \text{ popř. } \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right) \in \mathbb{V}_n$$

se nazývá *gradient skalárního pole f* nebo *gradient funkce f v bodě A* , a označuje se

$$\text{grad } f(A), \text{ grad } f|_A, \text{ grad } u(A), \nabla f(A), \nabla f|_A, \nabla u(A).^{27)}$$

Existuje-li gradient funkce $u = f(X)$ v bodech X oblasti G , pak se vektorová funkce $\vec{\varphi}(X) = \text{grad } f(X)$ nazývá *gradient pole f* , a označuje se

$$\text{grad } f, \nabla f, \text{ grad } u, \nabla u.$$

Symbol ∇ je *Hamiltonův*²⁸⁾ *operátor*, též *hamiltonián*²⁹⁾ nebo *operátor gradient*, který je definován jako symbolický vektor se „souřadnicemi“ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ v *ortonormální* bázi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\nabla := \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (5.46)$$

kde první tvar je *polokartézské označení*, a obecně je

$$\text{grad} \equiv \nabla := \sum_{k=1}^n \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (5.47)$$

pro funkci $f(X)$ n argumentů, kde $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ jsou *souřadnicové vektory standardní báze* z vektorového zaměření $\mathbb{V}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ euklidovského prostoru \mathbb{E}_n .

²⁶⁾ Často se požaduje diferencovatelnost f , zaručující platnost některých vzorců, viz závěr příkladu 5.4.18, popř. aby byla dokonce spojitě diferencovatelná, tj. $f \in C^1(G)$, takže souřadnice gradientu f jsou pak spojitě funkce.

²⁷⁾ Používá se i označení $f'(A), Df(A)$, píše se tučně **grad**, popř. $\vec{\nabla}$.

²⁸⁾ Hamilton, William Rowan (1805–1865), skotský matematik a astronom. Zakladatel vektorového a kvaternionového počtu.

²⁹⁾ Slovo nabla v jazyce Fénicičanů znamenalo hudební nástroj podobný harfě, kterou také symbol ∇ připomíná.

5.4.8 Důsledek definice gradientu Často zápis ∇f čteme „gradient f “ místo „nabla f “. Formálně můžeme pro $u = f(x, y, z)$ psát vektorové rovnosti, kdy vektor ∇ ZPRAVA formálně „násobíme“ skalárem f , tj. každou jeho souřadnici, takže **touto operací se skalární pole f převede na gradientní pole ∇f vektorové, indukované polem f takto**

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (5.48)$$

Operátory (ať už diferenciální či integrální) jsou zobrazení, která jistým funkcím (skalárním či vektorovým) přiřazují pomocí určitých operací (derivování, integrování apod.) jisté funkce (skalární či vektorové).

Operátor, např. ∇ , je tedy stejně jako např. $\sqrt{\quad}$ symbol, který pouze naznačuje, které operace je nutné provést. Není to tedy matematický objekt.

Norma neboli velikost gradientu je

$$\|\text{grad } f\| \equiv \|\nabla f\| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2}. \quad (5.49)$$

Následují dva pro aplikace velmi praktické vzorce pro výpočet směrové derivace pomocí gradientu.

5.4.9 Věta (o derivaci diferencovatelné funkce v libovolném směru) Je-li funkce $f(x, y, z)$ diferencovatelná v bodě A , pak v bodě A má derivaci v libovolném směru $\vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}|_A = \vec{s} \cdot \nabla f|_A = \vec{s} \cdot \text{grad } f(A) = f_x'(A) \cos \alpha + f_y'(A) \cos \beta + f_z'(A) \cos \gamma. \quad \star \quad (5.50)$$

Důkaz: pro $n = 2$, tj. pro $f(x, y)$ jsme podali v 5.4.6 části c). ♣

5.4.10 Geometrický význam derivace funkce $f(x, y)$ ve směru ukážeme pomocí obr. 5.3,

kdy bodem $A = (x_0, y_0)$ vedeme přímku p určenou jednotkovým směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2) = (\cos \alpha, \cos \beta)$ a zvolíme na ní (přirůstkový) bod $X = (x, y) \in D_f$, $X \neq A$. Označme ρ vzdálenost bodů A, X . Protože $\rho = \rho(A, X) > 0$, lze bez újmy na obecnosti místo parametru h z definice 5.4.4 uvažovat též vzdálenost ρ . Platí

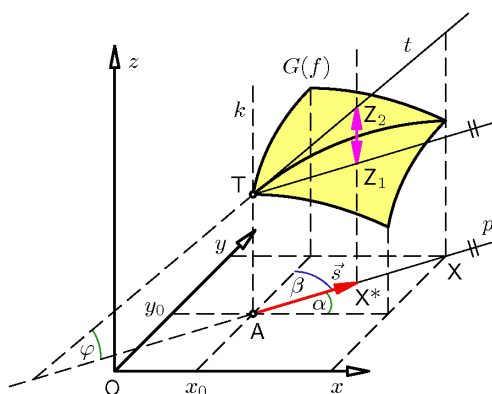
$$x - x_0 = \rho \cos \alpha, \quad y - y_0 = \rho \sin \alpha = \rho \cos \beta,$$

takže příslušný přírůstek funkce f ve směru \vec{s} je

$$\Delta f(A) = f(X) - f(A) = f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) - f(x_0, y_0).$$

Pak se lze v literatuře setkat s limitou (existuje-li)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(A)}{\rho},$$



Obr. 5.3

pomocí níž je směrová derivace funkce f ve směru \vec{s} v bodě A definována, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\rho}. \quad (5.51)$$

Rovnost $|\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0)| = \tan \varphi$ vyjadřuje to, že **geometricky je absolutní hodnota směrové derivace funkce f ve směru \vec{s} jednotkového vektoru v bodě $A(x_0, y_0)$ dána hodnotou funkce tangens $\tan \varphi$, kde φ je velikost ostrého včetně nulového úhlu ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$), přesněji, kde φ je odchylka polotečny t grafu $G(f)$ zúžení funkce f (na polopřímce p)³⁰⁾ v bodě dotyku $T = (A, f(A))$ od roviny Oxy .³¹⁾ (Viz ještě poznámku pod čarou³²⁾). Včetně znaménka směrové derivace a v analogii připomínající význam totálního diferenciálu (Viz 5.2.17) funkce $f(x, y)$ (Viz též vztah (5.55) v 5.4.17) lze $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ charakterizovat takto:**

³⁰⁾ přesněji, graf zúžení funkce na funkci jedné proměnné $\varphi(\rho) = f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \sin \alpha)$, $\rho > 0$

³¹⁾ Neboli φ je odchylka polotečny t od svého pravouhého průmětu do roviny Oxy , jímž je polopřímka p . Zmíněná polotečna t je v bodě T polotečnou ke křivce, která je definována řezem grafu $G(f)$ polorovinou kX , jež je rovnoběžná s osou z , její hraniční přímka k kolmá k rovině Oxy je určena body A, T , přičemž vnitřním bodem této poloroviny je libovolný bod X polopřímky p : $X = A + \rho \vec{s}$, $\rho > 0$. Hodnota $\tan \varphi$ tak představuje velikost rychlosti růstu (resp. klesání) funkce f , pohybuje-li se přírůstkový bod X z bodu A ve směru \vec{s} , tedy velikost rychlosti změny hodnot $f(X)$.

³²⁾ Naše (obecnější) definice derivace funkce f podle vektoru \vec{v} , $\|\vec{v}\| \neq 0$, resp. speciálně, definice směrové derivace funkce f ve směru \vec{s} , $\|\vec{s}\| = 1$, je ve shodě s pojmem směr (Viz 1.2.2) (je to množina všech souhlasně orientovaných

Derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\mathbf{A})$ funkce f v daném bodě $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ ve směru jednotkového vektoru \vec{s} představuje lineární část skutečného přírůstku $\Delta f(\mathbf{A})$ (resp. úbytku, je-li záporný) funkce f v bodě \mathbf{A} měřenou na polotečně t s dotykovým bodem $\mathbf{T} = (\mathbf{A}, f(\mathbf{A}))$ [popř. měřenou na tečné rovině s bodem dotyku \mathbf{T} (to v případě, že f je diferencovatelná v bodě \mathbf{A})] při posunutí přírůstkového bodu \mathbf{X} z bodu \mathbf{A} o jednotkovou délku ve směru \vec{s} , tj. speciálně do přírůstkového bodu $\mathbf{X}^* = \mathbf{A} + \vec{s}$.

Na obr. 5.3 je to kladná hodnota (funkce roste) délky vislé úsečky zvýrazněné šipkami s koncovými body $Z_1 = (\mathbf{X}^*, f(\mathbf{A}))$, Z_2 , kde Z_2 leží na polotečně t a jeho průmětem do roviny Oxy je bod \mathbf{X}^* .

5.4.11 Příklad a schéma se směrovou derivací Je-li funkce f třídy C^1 v nějakém bodě \mathbf{A} , pak zde má i diferenciál (Viz schéma v 5.2.8 na str. 90), a lze tvrdit, že v \mathbf{A} má derivaci v libovolném směru \vec{s} . Avšak obrácené tvrzení neplatí, protože např. funkce³³⁾ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ má v bodě $\mathbf{O} = (0, 0)$ derivaci v každém směru, neboť

$$\frac{\partial z(0, 0)}{\partial \vec{s}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\varrho^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\varrho}{\varrho} = 1 > 0,$$

tj. je v každém směru rostoucí funkcí, ale nemá v \mathbf{O} diferenciál, jelikož obě parciální derivace

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

v \mathbf{O} nejsou definovány (Ověřte si). Graf funkce f proto v \mathbf{O} nemá tečnou rovinu. Zmíněné schéma tedy můžeme rozšířit takto

$$\left(\begin{array}{l} \text{spojitost } \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \quad \forall k = 1, \dots, n \\ \text{spojitá diferencovatelnost} \\ \text{funkce } f(\mathbf{X}) \text{ v okolí bodu } \mathbf{A} \in \mathbb{E}_n \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} \exists df(\mathbf{A}) \\ \text{diferencovatelnost} \\ \text{funkce } f(\mathbf{X}) \text{ v } \mathbf{A} \in \mathbb{E}_n \end{array} \right) \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{spojitost } f(\mathbf{X}) \text{ v } \mathbf{A} \in \mathbb{E}_n \\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \quad \forall k = 1, \dots, n \\ \exists \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\mathbf{A}) \quad \forall \vec{s} \in \mathbb{V}_n \quad (\|\vec{s}\| = 1) \\ \text{existuje tečná (nad)rovinu v } \mathbf{A} \in \mathbb{E}_n \end{array} \right.$$

Schéma 5.2: Další důsledky spojitě diferencovatelnosti $f(\mathbf{X})$ v bodě $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$

a je z něj zřejmé i to, že existence derivací ve všech směrech v bodě \mathbf{A} neimplikuje v \mathbf{A} spojitost funkce ani existenci parciálních derivací funkce.

5.4.12 Příklad Určeme derivaci funkce $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $abc \neq 0$, která je v \mathbb{E}_3 třídy C^∞ (tj. nekonečněkrát spojitě diferencovatelná), v bodě $(a, b, c) = \mathbf{A}$ ve směru rádiusvektoru $\vec{r}_\mathbf{A}$ bodu \mathbf{A} .

Řešení: Rádiusvektor $\vec{r}_\mathbf{A} = \vec{\mathbf{OA}} = \mathbf{A} - \mathbf{O} = (a, b, c)$ obecně není jednotkovým vektorem \vec{s} . Platí $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \vec{s} \cdot \nabla u$, $\vec{s} = \frac{\vec{r}_\mathbf{A}}{\|\vec{r}_\mathbf{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$; $\text{grad } u(\mathbf{A}) = \nabla u|_\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)u|_\mathbf{A} = (u'_x, u'_y, u'_z)|_\mathbf{A} = 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)|_\mathbf{A} = 2\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(\mathbf{A}) = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c) \cdot \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = \frac{6}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{6}{\|\vec{r}_\mathbf{A}\|} > 0$, takže funkce je rostoucí ve směru $\vec{r}_\mathbf{A}$; v opačném směru je pak klesající v bodě \mathbf{A} . (Přitom např. směrový kosinus: $\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$)

5.4.13 Poznámka Z věty 5.4.9 také vyplývá, že když f je diferencovatelná funkce, pak

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial(-\vec{s})} = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} \right] \quad (5.52)$$

(obecně rovnost platit nemusí), tedy rovnost vyjadřuje „antisymetrii“ opačných směrových derivací diferencovatelné funkce, přičemž dále její derivaci $f'_\vec{v}$ podle vektoru \vec{v} , jenž není nutně jednotkový, nemusíme počítat limitou z (5.37), ale pomocí gradientu (jak jsme už provedli v předešlém příkladu), tj. postupem použitým v 5.4.6 část c) a založeným na derivování složené funkce lze odvodit, že

$$\left[f'_\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} \right],$$

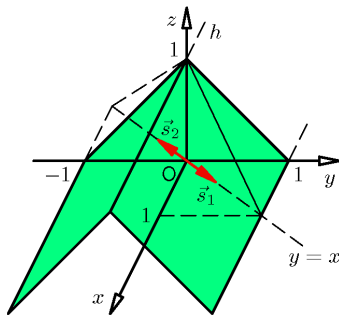
kde \vec{s} je jednotkový vektor souhlasně rovnoběžný s \vec{v} , tj. $\vec{s} \uparrow \vec{v}$.

Následující příklad názorně přiblíží geometrickou představu o směrové derivaci funkce, která je všude spojitá, avšak v uvažovaném bodě není diferencovatelná.

polopřímek), takže **důsledně uvažujeme** jednostrannou limitu, kdy $h \rightarrow 0^+$ nebo $\varrho \rightarrow 0^+$, a tedy k uvažovanému bodu \mathbf{A} (na obr. 5.3) se přibližujeme jednostranně po polopřímce p určené tímto bodem a daným vektorem \vec{v} , resp. \vec{s} , zatímco ve starším pojetí směru (lépe řečeno *neorientovaného* směru) se uvažovala oboustranná limita, kdy $h \rightarrow 0$, a k bodu \mathbf{A} se přibližovalo oboustranně po opačných polopřímkách, jako u parciálních derivací. U diferencovatelných funkcí jsou však obě pojetí shodná.

³³⁾jejímž grafem je „horní polovina“ rotační kuželové plochy

5.4.14 Příklad na sedlovou střechu z technické praxe Načrtnutá část válcové plochy kolmé k souřadnicové rovině Oyz , která je grafem funkce $f(x, y) = 1 - |y|$, se v technické praxi nazývá **sedlová střecha** (Viz obr. 5.4).



Obr. 5.4 Sedlová střecha

V počátku $O = (0, 0)$ určete směrovou derivaci $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}$ ve směru \vec{s}_1 osy 1. kvadrantu a ve směru \vec{s}_2 osy 3. kvadrantu (osa obou kvadrantů má rovnici $y = x$), a také $\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}$, $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Řešení:

$$f(x, y) = \begin{cases} a) & 1 - y, \text{ pro } y \geq 0, \text{ tj. pro } 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \\ b) & 1 + y, \text{ pro } y < 0, \text{ tj. pro } 0 < \alpha < \pi, \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi. \end{cases}$$

Pak

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} \Big|_O \stackrel{a)}{=} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1 - (0 + \varrho \cos \beta) - 1 + 0}{\varrho} = -\cos \beta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} \Big|_O \stackrel{b)}{=} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1 + (0 + \varrho \cos \beta) - 1 - 0}{\varrho} = \cos \beta,$$

$$\vec{s}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1), \quad \vec{s}_2 = \left(\cos \frac{3}{4}\pi, \cos \frac{3}{4}\pi \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1) = -\vec{s}_1,$$

souřadnicové vektory jsou $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_1} \Big|_O = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0, \text{ tj. } f \text{ klesá ve směru } \vec{s}_1 \text{ (v dostatečně malém okolí } \mathcal{O}(O)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}_2} \Big|_O = \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} \Big|_O = -\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f = 1 \text{ je konstantní v kladném směru osy } x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{i})} \Big|_O = -\cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_O = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}} \Big|_O = 0, \text{ lze ukázat, že } f \text{ je konstantní na } \mathbf{hřebenu } h \text{ střechy,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} \Big|_O = -\cos 0 = -1, \quad f \text{ klesá v kladném směru osy } y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})} \Big|_O = \cos \pi = -1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_O \text{ neexistuje (Proč?), a tedy } f \text{ není v } O \text{ diferencovatelná. Všimněte si, že např. v } A = (0, 1) \text{ je}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} \Big|_A \stackrel{a)}{=} -\cos 0 = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})} \Big|_A \stackrel{b)}{=} -\cos \pi = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{j}} \Big|_A = -\frac{\partial f}{\partial(-\vec{j})} \Big|_A = -1 = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A,$$

ve shodě s (5.39). **Gradient $\nabla f(O)$ ani diferenciál $df(O)$ této všude spojitě funkce v počátku neexistuje** (Proč?), takže jsme nemohli použít vzorec $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \vec{s} \cdot \nabla f$, ale museli vyjít z (5.51).

5.4.15 Věta o gradientu a směrové derivaci diferencovatelné funkce Necht $f(x, y, z)$ je funkce diferencovatelná v bodě A . Označuje-li ω úhel³⁴⁾ vektorů gradientu $\nabla f(A)$ a daného jednotkového vektoru $\vec{s} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ [neboli $\omega = (\vec{s}, \widehat{\nabla f(A)})$], pak **směrová derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ funkce je rovna pravouhlému průmětu gradientu $\nabla f(A)$ funkce v uvažovaném bodě A do směru \vec{s} ³⁵⁾**, tj. platí vztah

$$\boxed{\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}} = \|\nabla f(A)\| \cos \omega, \quad (0 \leq \omega \leq \pi)}, \quad (5.53)$$

kde $\|\nabla f(A)\|$ značí normu (velikost) vektoru $\nabla f(A)$. ★

Důkaz: je důsledkem předešlé věty o derivaci diferencovatelné funkce v libovolném směru \vec{s} , podle které je

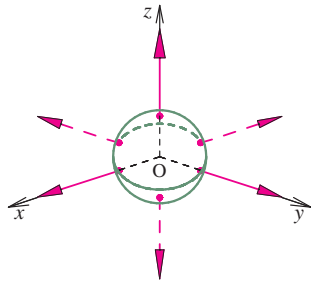
$$\frac{\partial f(A)}{\partial \vec{s}} = \vec{s} \cdot \nabla f(A) = \|\vec{s}\| \cdot \|(f'_x(A), f'_y(A), f'_z(A))\| \cos \omega,$$

neboť $\|\vec{s}\| = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. ♣

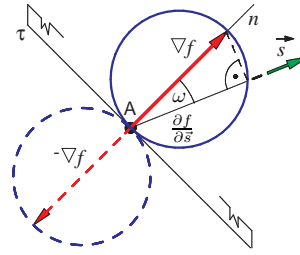
5.4.16 Příklad Mějme skalární pole $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Gradient funkce f je tzv. **gradientní (vektorové) pole** $\vec{v}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}$ (kde \vec{r} je rádiusvektor) a je znázorněno na obr. 5.5. Počátku O je přiřazen nulový vektor \vec{o} , ostatní vektory gradientního vektorového pole $\vec{v}(X)$ leží

³⁴⁾i jeho velikost, zde jí rozumíme velikost konvexního úhlu $0 \leq \omega \leq \pi$

³⁵⁾Viz 1.5.1 na str. 22



Obr. 5.5 Směr gradientu



Obr. 5.6 Gradient a směrová derivace

na polopřímkách vycházejících z O , takže jsou *kolmé* na kulové plochy (sféry) se středem v O . Na dané sféře o poloměru r mají všechny vektory stejnou délku, která je $2r$. Sféra \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid f(X) = x^2 + y^2 + z^2 = c, c \in \mathbb{R}^+\}, \quad (5.54)$$

kde $c = r^2 > 0$, je **konstantní hladina** nebo **izoplocha funkce** f (též *c-hladina funkce* f nebo *ekviskalární plocha*) definovaná v 4.1.6 na str. 59.

5.4.17 Věta o diferenciálu funkce a směrových derivacích Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A euklidovského prostoru \mathbb{E}_n , pak má v tomto bodě všechny směrové derivace a platí rovnost diferenciálu a směrové derivace

$$df(A, \vec{s}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) \quad \text{pro každý vektor } \vec{s} \in \mathbb{V}_n, \quad (5.55)$$

kde \vec{s} je jednotkový vektor ze zaměření \mathbb{V}_n prostoru \mathbb{E}_n a $df(A, \vec{s})$ jsou hodnoty diferenciálu v bodě A pro přírůstkový vektor \vec{s} . ★

5.4.18 Příklad ke zjištění diferencovatelnosti funkce Pomocí směrových derivací rozhodněme, zda funkce $f(X) = \sqrt[4]{x^4 + y^4 + z^4}$ je diferencovatelná v počátku $O = (0, 0, 0)$.

Řešení: Pro směr určený vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) = (dx, dy, dz)$, kde $\|\vec{s}\| = 1$, platí podle definice 5.4.4

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} \Big|_O := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(O + h\vec{s}) - f(O)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{(hs_1)^4 + (hs_2)^4 + (hs_3)^4}}{h} = \sqrt[4]{(dx)^4 + (dy)^4 + (dz)^4}.$$

V tomto příkladě směrové derivace v bodě O existují v libovolném směru \vec{s} , avšak **nezávisí lineárně³⁶⁾ na souřadnicích s_1, s_2, s_3 vektoru \vec{s} neboli na diferenciálech dx, dy, dz nezávisle proměnných, tedy neexistuje diferenciál $df(O)$** [pokud totiž existuje, tak jeho definice říká, že diferenciál závisí lineárně na souřadnicích vektoru \vec{s} nebo (rovněž prostřednictvím oněch diferenciálů) na argumentech x, y, z], takže **f není v O podle předešlé věty diferencovatelná.³⁷⁾**

Z příkladu též plyne, že k tomu, aby platily některé vzorce, např. z předešlých dvou vět, je třeba uvažovat pojem gradient funkce (skalárního pole) f až u funkcí, jež jsou aspoň diferencovatelné.

5.4.19 Geometrický a fyzikální význam gradientu Podle schématu z 5.4.11 **postačující podmínkou existence gradientu ∇f funkce f je její diferencovatelnost**. Pokud f je dokonce **funkce třídy C^1** (a to podle věty 4.5.2 o spojitých souřadnicích na str. 71 nastane právě tehdy, jsou-li souřadnice gradientu spojitě), což v tomto odstavci **budeme předpokládat**, lze rozvíjet četné geometrické i fyzikální úvahy:

- a) Podobně jako v příkladu 5.4.16 o sféře, představuje-li \mathcal{S} obecně nějakou konstantní *c*-hladinu funkce f , tj. ekviskalární plochu³⁸⁾ o rovnici $f(x, y, z) = c$, přičemž v každém jejím bodě A existuje nenulový gradient, tj. $\nabla f|_A \neq \vec{0}$, lze ukázat, že **tečná rovina τ ekviskalární plochy³⁹⁾ \mathcal{S} je v bodě A kolmá ke gradientu $\nabla f|_A$ neboli gradient je normálovým vektorem \vec{n} plochy \mathcal{S} , jak naznačuje obr. 5.6, tj. je to vektor kolmý k *c*-hladině procházející tímto bodem.**

³⁶⁾ Podrobněji, nejsou *lineárními formami* souřadnic přírůstkového vektoru (obecně ne jednotkového), který jsme označovali \vec{h} . Totální diferenciál lze přímo definovat jako *lineární formu* na vektorovém prostoru \mathbb{V}_n . Z algebry je známo, že jde o zobrazení $\Phi: \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, tj. \mathbb{V}_n do tělesa reálných čísel \mathbb{R} , (které je *aditivní* a *homogenní*). V našem příkladu je **směrová derivace** zobrazením $\vec{s} \mapsto \sqrt[4]{s_1^4 + s_2^4 + s_3^4}$ homogenním (a lze také ukázat, že v případě derivace ve směru \vec{s} je tomu tak vždy), ale **není zobrazením aditivním, takže není ani lineární formou na \mathbb{V}_3 .**

³⁷⁾ Že f není diferencovatelná plyne v tomto příkladu též z toho, že v O neexistuje žádná z parciálních derivací, takže v O nemá funkce f ani gradient.

³⁸⁾ Pojem plocha bude definován později, zatím ji chápeme intuitivně, popř. ve smyslu 4.6.6.

³⁹⁾ v případě tzv. potenciálního pole, viz část j), se \mathcal{S} nazývá *ekvipotenciální plocha*

- b) **Podrobněji**, buď $G \subseteq \mathbb{E}_n$ oblast, bod $\mathbf{T} = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$, $U(\mathbf{X})$ k -krát spojitě diferencovatelná funkce na G , tj. $U \in C^k(G)$, s nenulovým gradientem v \mathbf{T} , tj. $\nabla U(\mathbf{T}) \neq \vec{0}$. Pak v okolí takových bodů \mathbf{T} určuje množina

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{X} \in G \mid U(\mathbf{X}) = c \equiv U(\mathbf{T}), c \in \mathbb{R}\}, \quad (5.56)$$

těž předepsaná rovnicí (v anulovaném tvaru)

$$\underbrace{U(x_1, \dots, x_n) - c}_{F(x_1, \dots, x_n)} = 0, \quad (5.57)$$

(*regulární*) *plochu třídy* C^k v \mathbb{E}_n (přesněji *nadplochu*, když $n \geq 4$), resp. speciálně (*regulární*) *křivku* nebo (*rovinnou*) *izokřivku* \mathcal{K} *třídy* C^k funkce $U(x, y)$ (když $n = 2$). *Tečná (nad)rovina plochy* \mathcal{S} (\mathcal{S} se nazývá též *c-hladina* nebo *izoplocha funkce* $U(\mathbf{X})$ nebo *ekviskalární plocha* nebo *úrovňová plocha funkce* $U(\mathbf{X})$)⁴⁰⁾ je v bodě \mathbf{T} dána (nulovým skalárním součinem kolmých vektorů) rovnicí

$$\boxed{\nabla U(\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{T}) = 0}. \quad (5.58)$$

• Uvažujeme-li případ kdy $c = 0$, píšeme místo U obvykle F , tj. uvažujeme rovnici $F(\mathbf{X}) = 0$ a \mathcal{S} se pak nazývá *regulární plocha* či *nadplocha třídy* C^k v \mathbb{E}_n *definovaná implicitně* (*implicitní rovnicí* $F(\mathbf{X}) = 0$).

Tedy **gradient** $\nabla U(\mathbf{T})$ **spojitě diferencovatelného pole** $U(\mathbf{X})$ **je normálový vektor** \vec{n} tečné roviny **hladiny pole** $U(\mathbf{X})$ **v bodě** \mathbf{T} , jinými slovy, **je** (směrovým) **vektorem** \vec{n} **normály** n **pole** $U(\mathbf{X})$ **procházejícího bodem** \mathbf{T} , takže s příslušným **jednotkovým normálovým vektorem** \vec{n}^0 (kde pro zjednodušení místo $\vec{n}(\mathbf{T})$, popř. $\vec{n}_{\mathbf{T}}$ píšeme jen \vec{n}) jsou dány vztahy

$$\boxed{\vec{n} = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)}, \quad \boxed{\vec{n}^0 = \frac{\nabla U}{\|\nabla U\|}}. \quad (5.59)$$

Pokud je aspoň $U \in C^1(G)$, má gradient, a tedy také \vec{n} spojitě souřadnice, říkáme pak, že \mathcal{S} je **hladká plocha** nebo **plocha** (zde hladina) **se spojitě se měnícím normálovým vektorem** \vec{n} či **normálovou**.

- c) Je-li výchozí oblast rovinná, tj. $G \subseteq \mathbb{E}_2$, je $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ a místo plochy, jak jsme předeslali, jde o geometrický objekt, rovinnou (*regulární*) *křivku* $\mathcal{K} = \{\mathbf{X} \in G \subseteq \mathbb{E}_2 \mid U(\mathbf{X}) = c \equiv U(\mathbf{T})\}$ *třídy* C^k a místo tečné roviny jde o tečnu ke \mathcal{K} . Tedy v případě funkce $U(x, y)$ je \mathcal{K} vlastně *vrstevnice*, též *izokřivka funkce* $z = U(x, y)$ *o kótě* c , též *vrstevnice pole* $U(x, y)$ v bodě \mathbf{T} , gradient $\nabla U(\mathbf{T})$ určuje směr dvojsložkového normálového vektoru $\vec{n}(\mathbf{T})$ křivky \mathcal{K} v každém jejím bodě \mathbf{T} a \mathcal{K} má rovnici

$$\underbrace{U(x, y) - c}_{F(x, y)} = 0. \quad (5.60)$$

Příklad 1 Najdeme jednotkový normálový vektor křivky $3x^2 + 4y^2 = 7$ (elipsy) v bodě $\mathbf{T} = (1, 1)$.

Řešení: Křivka \mathcal{K} je vrstevnice pole $U(x, y) = 3x^2 + 4y^2$ o kótě $c = 7$ (Mimořadně, má rovnici $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y) \equiv 3x^2 + 4y^2 - 7 = 0$). Gradient pole U v \mathbf{T} je

$$\nabla U|_{\mathbf{T}} = 6x\vec{i} + 8y\vec{j}|_{(1,1)} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow \vec{n}_{\mathbf{T}} = (3, 4) \Rightarrow \vec{n}_{\mathbf{T}}^0 = \frac{1}{5}(3, 4).$$

Příklad 2 Najdeme normálový vektor plochy $z = y^2 - x^2$ (hyperbolický paraboloid – obr. 4.3, str. 60) v bodě $\mathbf{T} = (2, 4, 12)$.

Řešení: Plocha \mathcal{S} je c -hladinou skalárního pole $U(\mathbf{X}) = x^2 - y^2 + z$, kde $c = 0$ (tj. *nulovou* nebo *základní* hladinou pole) neboli (regulární) plochou o rovnici $\underbrace{x^2 - y^2 + z}_{U(x, y, z)} = 0$.

$$\nabla U(\mathbf{T}) = (2x, -2y, 1)_{\mathbf{T}} = (4, -8, 1) \Rightarrow \vec{n}(\mathbf{T}) = (4, -8, 1).$$

- d) **V případech, kdy naše geometrická představa selhává, pomohou nám často situace z fyziky.** Těžko si představit graf prostorového skalárního pole $u = f(x, y, z)$, jímž je „trojrozměrná (nad)plocha ve čtyřrozměrném prostoru“. Představme si však teplotní pole $u = f(x, y, z)$. U něj např. **směrová derivace** $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ **je změnou teploty** u **na jednotku délky ve směru** \vec{s} .

- e) Podle věty 5.4.15 o gradientu je derivace $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \vec{s}}$ funkce f ve směru \vec{s} maximální, resp. minimální a toto číslo je rovno číslu $\|\nabla f(\mathbf{A})\|$, resp. $-\|\nabla f(\mathbf{A})\|$ právě tehdy, když $\cos \omega = 1$, resp. $\cos \omega = -1$, tj. právě když úhel směru \vec{s} a gradientu $\nabla f(\mathbf{A})$ má velikost $\omega = 0$, resp. $\omega = \pi$, tj. právě když jednotkový vektor \vec{s} je souhlasně, resp. nesouhlasně rovnoběžný s $\nabla f(\mathbf{A})$, jak znázorňuje obr. 5.6.

⁴⁰⁾ Anglicky: *level surface*.

Gradient funkce $f(X)$, tj. vektor $\nabla f(A)$ (resp. vektor $-\nabla f(A)$), určuje směr nejrychlejšího růstu (resp. klesání) funkce $f(X)$ v daném bodě A a jeho dostatečně malém okolí $\mathcal{O}(A)$ a pomocí jeho normy $\pm\|\nabla f(A)\|$ číselně vyjadřujeme rychlost tohoto růstu (resp. klesání).⁴¹⁾

- f) Speciálně, pro $n = 2$ a funkci $z = z(x, y)$, jejíž graf $G(z)$ modeluje terén, pak gradient⁴²⁾ ∇z se nazývá **spád funkce** $z(x, y)$ a představuje na mapě terénu (obecně ne jednotkový) vektor, jehož směr určuje maximální **spád plochy** v uvažovaném bodě. Pohybujeme-li se ve směru gradientu (tj. spádu), budeme maximálně stoupat. Vydáme-li se ve směru opačném, budeme maximálně klesat a velikost vertikální rychlosti bude záporná. Půjdeme-li ve směru kolmém na gradient (tj. po křivce o rovnicích $z = z(x, y)$, $z = c$, jejímž průmětem do roviny xy je *vrstevnice* $z(x, y) = c$ o kótě c , bude naše vertikální rychlost nulová, neboť máme konstantní nadmořskou výšku c . **Norma (délka) gradientu diferencovatelné funkce** $z(x, y)$, tedy $\|\nabla z\|$, v daném bodě udává **strmost (příkrost, velikost spádu) svahu**, neboť tuto **strmost lze též** (podle obr. 5.6) **vyjádřit v příslušném směru \vec{s}_{\max} jako tangens jistého úhlu (odchylky) φ_{\max}** . Platí totiž

$$\tan \varphi_{\max} = \frac{\partial z}{\partial \vec{s}_{\max}} = \|\nabla z\| \cdot \|\vec{s}_{\max}\| \cos \omega = \|\nabla z\| \cdot \left\| \frac{\nabla z}{\|\nabla z\|} \right\| \cos 0 = \|\nabla z\|.$$

- g) Z definice gradientu by se mohlo zdát, že závisí na zvoleném systému souřadnic. Směr maximální změny skalárního pole samozřejmě z geometrického hlediska nemůže záviset na tom, jaký souřadnicový systém jej popisuje.

Gradient pole je invariant vzhledem ke změně systému souřadnic a je to lokální pojem vztahující se k bodu a jeho dostatečně malému okolí.

- h) Bod $A \in \mathbb{E}_n$, v němž je gradient (diferencovatelné) funkce $f(X)$ nulový, tj.

$$\nabla f(A) = \vec{0},$$

se nazývá **stacionární bod funkce** f .⁴³⁾

- i) Je-li \vec{h} nenulový **přírůstkový vektor** z vektorového prostoru \mathbb{V}_n , $\vec{s} \in \mathbb{V}_n$ jednotkový vektor definující též směr $\vec{s} = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$, platí pro totální diferenciál, resp. směrovou derivaci v bodě A vztahy⁴⁴⁾

$$\boxed{df(A, \vec{h}) = \nabla f(A) \cdot \vec{h}}, \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = df(A, \vec{s})}. \quad (5.61)$$

- j) **Dva příklady fyzikálních polí** **Skalárním polem** je potenciální **elektrostatické pole** $U(X)$, resp. potenciální **pole** $\varphi(X)$ **rychlostí** \vec{v} či **rychlostního pole** \vec{v} (prostorově) proudící tekutiny (tj. kapaliny, např. taveniny polymeru, popř. plynu). Potenciál $U(X)$, resp. $\varphi(X)$ se nazývá **elektrostatický**, resp. **rychlostní potenciál**. Přitom \vec{v} je vektor rychlosti částice tekutiny protékající bodem X . **Hladiny** obou **polí** $U(x, y, z) = c$, $\varphi(x, y, z) = c$, $c \in \mathbb{R}$, se nazývají **ekvipotenciální plochy**. Gradientem pole je v každém bodě definována vektorová funkce (vektorové pole) představující intenzitu (tj. sílu) \vec{E} , resp. zmíněnou rychlost \vec{v}

$$\vec{E} = \pm \nabla U(X), \quad \text{resp.} \quad \vec{v} = \pm \nabla \varphi(X), \quad (5.62)$$

kde volba kladného gradientu [podle části f) tohoto odstavce] značí **spád** skalárního **pole** $U(X)$, resp. $\varphi(X)$, tj. směr maximálně rostoucího potenciálu. Všechny vektory obou **gradientních polí** ∇U , $\nabla \varphi$ **indukovaných** příslušným skalárním polem tvoří **vektorové pole**. Křivky, které se v každém svém bodě dotýkají tohoto pole, tj. v každém bodě takové křivky je gradient jejím tečným vektorem, se nazývají **silokřivky**, resp. **proudnice**.⁴⁵⁾ Může nastat obrácená situace:

Definice Je-li v oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_3$ dán vektor (vektorové pole)

$$\vec{F}(X) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \quad (5.63)$$

a můžeme najít takovou skalární funkci $U(x, y, z)$, že v každém uvažovaném bodě lze \vec{F} vyjádřit pomocí gradientu funkce U , tj.

$$\boxed{\vec{F}(x, y, z) = \pm \nabla U(x, y, z)}, \quad (5.64)$$

⁴¹⁾Obráceně, chceme-li dostat lineární část rychlosti přírůstku funkce $f(X)$ v libovolném směru \vec{s} neboli $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}$ v daném bodě A , stačí určit pravouhlý (kolmý) průmět [Viz definici 1.5.1 na str. 22] vektoru $\nabla f(A)$ do tohoto směru.

⁴²⁾Upozorníme, že řada autorů **spád** pole (funkce) **definuje opačným (záporným) gradientem**.

⁴³⁾setkáme se s ním při vyšetřování extrémů funkcí

⁴⁴⁾Vztah pro směrovou derivaci už známe z věty 5.4.17.

⁴⁵⁾Připomeňme, že v kinematice zaváděné proudnice jsou vektorové křivky vektorů rychlosti \vec{v} **rychlostního pole** a při **nestacionárním poli** (proudění) $\vec{v}(X, t)$, kde t je čas, jsou obecně proudnice různé od trajektorií částic.

pak se toto vektorové pole nazývá **potenciální pole** nebo **konzervativní pole**. Skalární funkce $U(\mathbf{X})$ se nazývá **potenciál** vektorového pole $\vec{F}(\mathbf{X})$ v G .

Ne každé pole síly (jeho intenzity) \vec{E} a ne každé pole rychlosti \vec{v} je indukováno potenciálem. Platí o tom věta, kterou uvedeme za příkladem 5.4.21, v němž je hlavní myšlenka části jejího důkazu. S větou se setkáme při určování nezávislosti křivkového integrálu ve vektorovém poli na integrační křivce.

5.4.20 Příklad k jednoznačnosti určení potenciálu vektorového pole Určeme, kolik potenciálů $U(\mathbf{X})$ má konzervativní vektorové pole $(\vec{F}(\mathbf{X}), G)$.

Řešení: Podle (5.62) volme např. $\vec{F} = +\nabla U$. Je-li V jiný potenciál pole \vec{F} , pak platí

$$0 = \nabla U - \nabla V = \left(\frac{\partial(U - V)}{\partial x}, \frac{\partial(U - V)}{\partial y}, \frac{\partial(U - V)}{\partial z} \right)$$

(pro každý bod $\mathbf{X} \in G$, $U, V \in C^1(G)$), odkud plyne, že $U - V = \text{const.}$ (Proč?), což znamená, že existuje-li **potenciál** U vektorového pole, je **určen jednoznačně až na aditivní konstantu**.

5.4.21 Příklad k nutné podmínce konzervativnosti vektorového pole Vyšetřeme nutnou podmínku k tomu, aby vektorové pole bylo na oblasti konzervativní.

Řešení: Je-li na oblasti G vektorové pole $\vec{f}(\mathbf{X}) = (P(\mathbf{X}), Q(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}))$ z (5.63) konzervativní neboli je gradientním polem indukovaným skalární funkcí $U(\mathbf{X})$, pak

$$\vec{f} = \nabla U \iff P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{pro každý bod } \mathbf{X} \in G.$$

Je-li na oblasti G funkce U dokonce třídy C^2 (tj. je tam spojitá se všemi parciálními derivacemi do 2. řádu včetně), lze využít zobecněnou *Schwarzovu větu* o záměnnosti smíšených parciálních derivací (str. 96), podle níž

$$U''_{xy} = U''_{yx}, \quad U''_{yz} = U''_{zy}, \quad U''_{zx} = U''_{xz},$$

což dává hledanou **nutnou** (ne však postačující) **podmínku konzervativnosti spojitě diferencovatelného pole**

$$\boxed{P'_y = Q'_x, \quad Q'_z = R'_y, \quad R'_x = P'_z, \quad \forall \mathbf{X} \in G}. \quad (5.65)$$

Pro rovinné pole $\vec{f}(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})\vec{i} + Q(\mathbf{X})\vec{j}$ je nutnou podmínkou konzervativnosti spojitě diferencovatelného pole jen

$$\boxed{P'_y = Q'_x, \quad \forall \mathbf{X} \in G}. \quad (5.66)$$

Dokázali jsme tedy implikaci:

Vektorové pole třídy C^1 je na oblasti G konzervativní \Rightarrow na G platí nutná podmínka konzervativnosti pole (5.65).

K tomu, abychom získali i podmínku postačující, musí navíc být oblast G tzv. „jednoduše souvislá oblast.“ Přesněji:

5.4.22 Věta o existenci potenciálu vektorového pole Nechť vektorové pole $\vec{f}: G \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\vec{f}(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})\vec{i} + Q(\mathbf{X})\vec{j} + R(\mathbf{X})\vec{k}$ je třídy C^1 na **jednoduše souvislé oblasti** $G \subseteq \mathbb{E}_3$, tj. $\vec{f} \in C^1(G)$. Potom toto vektorové pole je **konzervativní** neboli **potenciální**, právě když pro každý bod $\mathbf{X} = (x, y, z) \in G$ platí **nutná podmínka konzervativnosti pole** daná třemi (skalárními) vztahy (5.65)

$$P'_y = Q'_x, \quad Q'_z = R'_y, \quad R'_x = P'_z, \quad (5.67)$$

nebo když platí s ní ekvivalentní **nutná podmínka konzervativnosti pole** daná jediným vektorovým vztahem

$$\boxed{\text{rot } \vec{f}(\mathbf{X}) = \vec{0}}, \quad \forall \mathbf{X} \in G, \quad (5.68)$$

kde $\text{rot } \vec{f}$ je **operátor rotace pole** \vec{f} .⁴⁶⁾ ★

⁴⁶⁾ přičemž $\text{rot } \vec{f} = (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k}$, (viz definici 5.4.38), odkud nulovost rotace ihned získáme

5.4.23 Poznámka Z věty a příkladu 5.4.21 je zřejmé, že chceme-li získat *postačující podmínku*⁴⁷⁾ ke konzervativnosti neboli **KRITÉRIUM konzervativnosti** rovinného či prostorového spojitě diferencovatelného pole (G, \vec{f}) , musíme k nutné podmínce ve skalárním tvaru (5.65) nebo ve vektorovém tvaru (5.68) přidat požadavek, aby oblast G byla také jednoduše souvislá. Tento pojem názorně zavádí (nikoli definuje) následující odstavec. Postačující podmínka se dokazuje až v integrálním počtu.

5.4.24 Pojem jednoduše souvislé oblasti Řekneme: oblast⁴⁸⁾ G má *topologickou vlastnost*, že je to v \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 *jednoduše souvislá oblast*,⁴⁹⁾ právě když v oblasti G z \mathbb{E}_2 , resp. z \mathbb{E}_3 lze každou *jednoduchou* (neboli neprotínající se) a *uzavřenou křivku* \mathcal{K} (neboli její počáteční bod je totožný s koncovým bodem) ležící v G „spojitě stáhnout“ (tj. fyzikální terminologií řečeno: „elasticky deformovat“) do bodu v G , a přitom s ní pohybovat, aniž by se dostala mimo G (Bez újmy na obecnosti lze všude jako křivku \mathcal{K} uvažovat uzavřený polygon, viz 3.4.13 na str. 54). Pojem jednoduše souvislé oblasti v \mathbb{E}_2 a v \mathbb{E}_3 později zavedeme s využitím Jordanovy věty v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3 .

5.4.25 Příklady oblastí, které jednoduše souvislé jsou nebo nejsou

- V \mathbb{E}_2 může být *jednoduše souvislá oblast* G definována též jako ta, u níž „*vnitřek*“⁵⁰⁾ každé jednoduché (tj. neprotínající se) *uzavřené křivky* \mathcal{K} v G , označovaný jako $\text{int } \mathcal{K}$, je ohraničená podoblast v G . Tedy jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_2 nemůže mít „díry“ jako ementálský sýr. Nebo lze využít, ale speciálně jen pro \mathbb{E}_2 , další koncepci, kdy se *oblast* $G \subset \mathbb{E}_2$ definuje jako *jednoduše souvislá* v \mathbb{E}_2 , je-li její *doplňek* v \mathbb{E}_2 (tj. množina $\mathbb{E}_2 \setminus G$) množina *souvislá* (Viz 3.4.1). Tato koncepce založená na množinovém doplňku a v \mathbb{E}_2 velmi praktická by však zcela selhala v \mathbb{E}_3 (např. vnitřek anuloidu by podle ní „byl“ množinou jednoduše souvislou).

- Jednoduše souvislými oblastmi v \mathbb{E}_2 **jsou**: celá rovina \mathbb{E}_2 ; polorovina bez polopřímky; vnitřek, tj. G° množiny G , kterou může být obdélník; dále to může být geometrický vnitřek elipsy a obecně vnitřek $\text{int } \mathcal{K}$ každé uzavřené rovinné křivky \mathcal{K} (chápané zatím intuitivně); ale **nejsou** jimi: (otevřené) mezikruží (jeho *doplňkem* v \mathbb{E}_2 je nesouvislá množina skládající se z disjunktních částí, kterými je uzavřený menší kruh a uzavřený vnější většího kruhu); kruh s vyjmutým bodem, např. středem, nebo rovina \mathbb{E}_2 s vyjmutým bodem nebo obecněji \mathbb{E}_2 bez ohraničené a uzavřené (tj. kompaktní) množiny [v obou příkladech existuje uzavřená křivka – např. kružnice nebo uzavřená lomená čára (uzavřený polygon) – např. obdélník, které, obsahují-li ve svém vnitřku onen vyjmutý bod či onu kompaktní množinu, nelze stáhnout (kontrahovat) do bodu ležícího v zadané oblasti].

- Naproti tomu v \mathbb{E}_3 jednoduše souvislými oblastmi **jsou**: celý prostor \mathbb{E}_3 nebo \mathbb{E}_3 s vyjmutým bodem (protože pokud by při smršťování zavazela díra po vyjmutém bodu, lze uzavřenou křivku posunout stranou a zase pokračovat ve smršťování až do bodu); dále vnitřek, tj. G° množiny G , kterou může být kvádr či koule, a obecně vnitřek libovolné uzavřené plochy (chápané zatím intuitivně); dále jí je *dutá koule*, tj. prostor mezi dvěma soustřednými sférami. **Nejsou** jí však prostor \mathbb{E}_3 s vyjmutou přímkou nebo vyjmutou válcovou plochou či *vnitřek anuloidu* (jeho modelem je nafukovací kolo) nebo i *vnějšík anuloidu*; **není** jí také oblast tvořená dvěma do sebe zaklesnutými nedotýkajícími se anuloidy (otevřenými, tj. bez svých povrchů). Není to totiž ani množina souvislá.

5.4.26 Poznámka V postačující podmínce ke konzervativnosti vektorového pole lze ještě oslabit požadavek na jednoduše souvislost oblasti. Jinými slovy, **existují konzervativní (potenciální) pole i v oblastech, které nejsou jednoduše souvislé**. Tím se však nebudeme zabývat.

5.4.27 Příklad Kterým směrem při bezvětří odletí za nejvýraznější vůni květů z bodu $O = (0, 0, 0)$ včela, jestliže v každém bodě $X = (x, y, z)$ jejího letu je koncentrace $u(X)$ aromatických látek květů dána vztahem⁵¹⁾

$$u(X) = \lambda_1(x^2 + y^2)e^{-\lambda_2(x^2 + y^2)} + \lambda_3e^{\lambda_4 2z}. \quad (5.69)$$

⁴⁷⁾ *podmínka postačující* = **KRITÉRIUM**

⁴⁸⁾ tj. otevřená a souvislá množina

⁴⁹⁾ Přesná formulace, vyžadující nemálo matematických prostředků z *topologie*, je: *Oblast* G v \mathbb{E}_3 je *jednoduše souvislá*, je-li *homeomorfním obrazem (jednotkové) koule*. Tj. zhruba řečeno: je-li jí možno získat z koule „elastickou deformací“. Pojmy homeomorfní zobrazení i topologická vlastnost jsme sice definovali v 4.4.14 na str. 71, nyní se však pro stručnost při objasnění pojmu *jednoduchá souvislost* opřeme o geometrickou intuici. Použité termíny křivka a plocha zavedeme až v integrálním počtu, kde se s jednoduše souvislými oblastmi pracuje.

⁵⁰⁾ Pojmy „*vnitřek*“ $\text{int } \mathcal{K}$, popř. „*vnějšík*“ $\text{ext } \mathcal{K}$ uzavřené křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 , resp. „*vnitřek*“ $\text{int } \mathcal{S}$, popř. „*vnějšík*“ $\text{ext } \mathcal{S}$ uzavřené plochy \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 jsou geometricky názorné pojmy, avšak upřesní je až Jordanova (čti: *žordanova*) věta v \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 .

⁵¹⁾ Obecně by šlo o *nestacionární skalární pole* $u(X, t)$, tedy závislé rovněž na čase t .

Přitom měřicí jednotka veličiny u je $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a λ_i jsou kladné konstanty, kde pro přehlednost výsledku, necht' je jejich velikost rovna jedné.

Řešení: Včela odletí ve směru gradientu ∇u koncentrace u . Platí

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 = \lambda_1 [2x + (x^2 + y^2)(-\lambda_2)2x] e^{-\lambda_2(x^2+y^2)} \Big|_0 = 0, \text{ Podobně } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = 0.$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_0 = \lambda_3 2\lambda_4 e^{2\lambda_4 z} \Big|_0 = 2\lambda_3 \lambda_4 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2. \text{ Tedy } \nabla u(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = 2\vec{k}.$$

Včela odletí přímo vzhůru.⁵²⁾ V tomto směru koncentrace vůně roste 2 jednotky (koncentrace) na metr.⁵³⁾

5.4.28 Definice divergence vektorového pole Buď $\vec{f}(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})\vec{i} + Q(\mathbf{X})\vec{j} + R(\mathbf{X})\vec{k}$ vektorové pole, které je třídy C^1 na oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_3$ (tj. jeho složky jsou třídy C^1 na G). Skalární pole definované pomocí skalárního součinu vzorcem

$$\text{div } \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (5.70)$$

se nazývá **divergence pole** (\vec{f}, G) či **divergence vektorové funkce** \vec{f} . Stručně mluvíme o **operátoru divergence**.

5.4.29 Upozornění na skalární diferenciální operátor Neplatí komutativní zákon v předchozím vzorci, tj.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{f} \neq \vec{f} \cdot \nabla}. \quad (5.71)$$

Výraz napravo $\vec{f} \cdot \nabla$ se nazývá **skalární diferenciální operátor** a pro $\vec{f}(\mathbf{X}) = (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), f_3(\mathbf{X}))$ má tvar

$$\vec{f} \cdot \nabla = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + f_3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.72)$$

kdy „souřadnice“ vektoru ∇ ZLEVA formálně „násobíme“ skalárními funkcemi, což zde **neznamená** parciální derivování, jak je tomu u divergence.

5.4.30 Fyzikální interpretace operátoru divergence Uvažujme stacionární proudění tekutiny popsané vektorem rychlosti $\vec{v}(x, y, z)$. *Následující bilanční vztahy se odvozují užitím integrálního počtu v hydrodynamice, v níž byl pojem divergence pomocí plošného integrálu zaveden.* Kladná (resp. záporná) divergence pole \vec{v} v určitém bodě A znamená (objemové) množství tekutiny, které vyteče (resp. vteče, při záporné divergenci) z jednotkového objemu (obklopujícího bod A) za jednotku času a takový bod A, kde $\text{div } \vec{v}(A) > 0$ (resp. $\text{div } \vec{v}(A) < 0$), se nazývá **zřídlo** nebo **zdroj** (resp. **propad** nebo **záporný zdroj**) a představuje bod, odkud tekutina vytéká (resp. kde se pohlcuje). Jinými slovy, ve zřídlech vektorové křivky (Viz 5.4.19 j)) začínají a v propadech končí (tj. mají tam svůj koncový bod označovaný šipkou).

Kladná divergence vektoru \vec{v} v bodě A představuje vydatnost zřídla A vzhledem k jednotkovému objemu.

Vektorové pole, jehož $\text{div } \vec{v} = 0$, se nazývá **nezřídlové** (může např. jít o nestlačitelnou kapalinu bez zřídla), nemá ani zdroje ani propady, a tedy ani body, kde vektorové křivky začínají či končí. Vektorové křivky jsou buď uzavřené nebo začínají, popř. končí na hranici definičního oboru takového pole. Každou plochou vtéká stejné množství kapaliny jako z ní vytéká, takže se kapalina nikde nehromadí, a tedy ani nestlačuje. Proto se pole s nulovou divergencí rovněž nazývá **nestlačitelné pole**.

Z rovnice kontinuity dokonalé tekutiny

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0}, \quad \text{kde } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho, \quad (5.73)$$

„lokálně“ vyjadřující **zákon zachování hmotnosti** v kontinuu reprezentovaném dokonalou tekutinou o hustotě ρ a rychlosti \vec{v} jejího proudění v daném místě získáme pro nestlačitelnou kapalinu, kdy $\rho = \text{const.}$, **rovnici nestlačitelnosti**, též **rovnici kontinuity nestlačitelné kapaliny**

$$\boxed{\text{div } \vec{v} = 0}. \quad (5.74)$$

⁵²⁾Dále se však její směr obecně může měnit.

⁵³⁾tj. v měřicí jednotce $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4}$.

5.4.31 Příklad Najdeme divergenci vektorového pole

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = k \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5.75)$$

reprezentovaného intenzitou \vec{E} elektrostatického pole bodového náboje Q , $\vec{r} = \overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ je rádiusvektor bodu $X = (x, y, z)$, k je konstanta.

Řešení: $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = k \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^3} \vec{r} \right) = k \operatorname{div} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z)$.

Protože $\frac{\partial E_1}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = k \frac{r^3 - 3x^2r}{r^6} = \frac{k}{r^5} (r^2 - 3x^2)$, a podobně $\frac{\partial E_2}{\partial y}$, $\frac{\partial E_3}{\partial z}$, je $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0$.

Tedy v elektrostatickém poli bodového náboje umístěného v počátku O soustavy souřadnic nejsou v bodech $r \neq 0$ zřídla ani propady. V bodě $\|\vec{r}\| = r = 0$, tj. v O , kde je umístěn náboj, není pole \vec{E} určeno. Jde o nezářidlové pole. Má tam *singularitu*. **Vektorové křivky** tohoto pole se nazývají *sílokřivky*.⁵⁴⁾

5.4.32 Poznámka Speciálně pro rovinné pole \vec{f} je $R = 0$, takže $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Je-li $\vec{f}(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$, kde $f_k \in C^1(G)$, $G \subseteq \mathbb{E}_n$, pak

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}.$$

5.4.33 Definice laplaciánu pole (čti: *laplasiánu*) Buď $f(X) \in C^2(G)$ skalární pole. Skalární pole definované divergencí gradientu pole f , tj. vzorcem

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \quad (5.76)$$

se nazývá **Laplaceův**⁵⁵⁾ **operátor pole** f nebo **laplacián pole** f (popř. **delta operátor pole** f).

5.4.34 Poznámka k laplaciánu Přímou z definice laplaciánu pole f plyne, že formálně lze „násobit“

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f = \\ &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f, \end{aligned}$$

takže obecně pro pole $f(X)$ v \mathbb{E}_n lze definovat samotný **laplacián v** \mathbb{E}_n

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad (5.77)$$

a je to už **operátor 2. řádu** oproti operátorům 1. řádu, jakými jsou gradient (tj. hamiltonián), divergence a rotace.

- Funkce $f(X)$, resp. pole f třídy C^2 vyhovující **Laplaceově rovnici** zapisované ve tvaru $\Delta f = 0$, popř. $-\Delta f = 0$ na oblasti⁵⁶⁾ G se nazývá **harmonická funkce**, resp. **harmonické pole na** G .⁵⁷⁾
- Poznamenejme, že (např. u elektromagnetického pole) **Laplaceův operátor můžeme** na oblasti G v \mathbb{E}_3 (obecně i v \mathbb{E}_n) **aplikovat též na vektorové pole** $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ třídy $C^2(G)$, a čtenář si snadno odvodí, že **výsledkem bude vektorové pole**, přičemž platí

$$\Delta \vec{f} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5.78)$$

- **Laplaceovo pole** (též **harmonické pole**) se nazývá **vektorové pole** \vec{f} třídy C^2 na oblasti G , když

$$\Delta \vec{f} = \vec{0}.$$

(tj. když jeho souřadnice P, Q, R jsou **harmonická pole** na G)

⁵⁴⁾Tento termín, který je zde analogií termínu proudnice, zavedl Michael Faraday (1791-1896).

⁵⁵⁾Laplace, Pierre Simon (1749-1827), francouzský matematik, fyzik a astronom.

⁵⁶⁾Někteří autoři požadují ještě *ohraničenost* oblasti G a při neohraničenosti G pak to, aby funkce f „byla rovna nule v nevlastním bodě (v nekonečnu)“.

⁵⁷⁾Při neohraničenosti G se požaduje ohraničenost pole f .

5.4.35 Příklad Určeme, zda je harmonické skalární prostorové pole $f(r)$, kde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je délka rádiusvektoru bodu $\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{E}_3$, a $f(r) = \frac{1}{r}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x}{r^3}. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3}{2}x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}2x = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.\end{aligned}$$

Zbývající derivace nemusíme díky symetrii pole f vzhledem k argumentům x, y, z ani počítat, takže

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3} = \frac{3r^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0.$$

Pole $f(r)$ je harmonické, neboť je řešením Laplaceovy rovnice $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$, $r > 0$, v celém prostoru s výjimkou počátku, avšak tam není ani definováno, říkáme, že tam pole má *singularitu*.

5.4.36 Stacionární teplotní pole v \mathbb{E}_2 i \mathbb{E}_3 jsou harmonická, ne však analogická

- a) Výsledek trojrozměrného případu řešení rovnic $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$ se shoduje s teorií parciálních diferenciálních rovnic, v níž se odvozuje, že *elementární řešení Laplaceovy rovnice*⁵⁸⁾ $\Delta u(r) = 0$ v \mathbb{E}_n , kde $r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ se *singularitou* v bodě $r = 0$ (při vhodné volbě konstant), je

$$\boxed{u(r) = \ln \frac{1}{r} \quad \text{pro } n = 2}, \quad \boxed{u(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \quad \text{pro } n \geq 3}.$$

Naprostá odlišnost průběhu rovinného (harmonického) pole oproti (harmonickým) polím dimenze $n \geq 3$ dokládá, že

Z tvarů řešení parciální diferenciální rovnice v rovinném případě obecně nelze usuzovat na analogický průběh i ve vyšších dimenzích.

- b) Příkladem harmonického pole je **stacionární teplotní pole** vzniklé vedením (tj. kondukcí) tepla v tělese, které je v určitém místě stejně intenzivně ohříváno nebo ochlazováno, takže ve vzdálenějších místech je teplota jiná, ale nemění se s časem. Také **elektrostatické pole v \mathbb{E}_3 bez nábojů je harmonické**.
- c) Připomeňme, že v příkladu 5.3.15 jsme vlastně **odvodili transformaci Laplaceova operátoru do polárních souřadnic** (přičemž je $r \equiv \varrho$), takže platí

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}.$$

To je užitečné při řešení úloh o kruhové membráně o poloměru r , kruhových deskách, při studiu proudění tavenin polymerů kruhovými profily apod.

5.4.37 Poznámka Laplacián má významné použití v rovnicích matematické fyziky, pro jejichž studium je **Laplaceova rovnice** vhodným východiskem. Patří mezi ně rovnice vedení tepla v tělese, rovnice kmitání bubliny, membrány, desek, vlnové rovnice, ale také různé reakčně difuzní rovnice zásadního významu v chemických oborech i jiné rovnice.

5.4.38 Definice rotace vektorového pole Buď $\vec{f}(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})\vec{i} + Q(\mathbf{X})\vec{j} + R(\mathbf{X})\vec{k}$ vektorové pole, které je třídy C^1 na oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_3$. **Vektorové pole** definované pomocí vektorového součinu vztahem

$$\text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad (5.79)$$

se nazývá **rotace pole** (\vec{f}, G) či **rotace vektorové funkce** \vec{f} . Místo $\text{rot } \vec{f}$ se používá⁵⁹⁾ také $\text{curl } \vec{f}$.

⁵⁸⁾Laplaceova rovnice je nejjednodušším typem tzv. *eliptických rovnic*. Ty popisují ustálené neboli stacionární stavy fyzikálních procesů nestacionárních neboli *evolučních* (tj. jejichž průběh se mění též s časem), které jsou často modelovány rovnicemi *parabolického* nebo *hyperbolického* typu.

⁵⁹⁾z anglického *curl = vír*

5.4.39 Fyzikální interpretace operátoru rotace Je-li \vec{v} obvodová rychlost kapaliny rotující jako celek, tj. jako miniaturní disk kolem svého středu A ve smyslu ohnutých prstů pravé ruky, pak podle pravidla pravé ruky 1.10.4 určuje vztyčený palec (kolmý) směr vektoru $\text{rot } \vec{v}(A)$ i směr osy rotace procházející středem A rotace, kolem které kapalina vytváří vír. Jinými slovy, pohled proti směru vektoru rotace $\text{rot } \vec{v}(A)$ znamená vidět vír otáčející se proti smyslu otáčení hodinových ručiček. Délka (norma) vektoru $\|\text{rot } \vec{v}(A)\|$ je dvojnásobkem velikosti úhlové rychlosti ω ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) této rotace, takže je mírou rychlosti rotace víru (Viz příklad 5.4.41).

5.4.40 Poznámky k rotaci

a) Je-li $\vec{f}(X) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ rovinné pole, pak P a Q nezávisí na z , $R = 0$ a

$$\text{rot } \vec{f} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Rovinné pole má tedy rotaci, která je všude kolmá k rovině xy .

b) Vidíme, že k výpočtu rotace prostorového pole si stačí zapamatovat tuto poslední souřadnici (už proto, že se bude vyskytovat i v důležité *Greenově větě*, ale též v podmínce konzervativnosti pole – viz následující část) a ostatní prostorové souřadnice snadno dopíšeme po cyklické záměně písmen uspořádaných lexikograficky (tj. abecedně) nebo použijeme symbolický determinant.

c) Z definice rotace pole je vidět, proč podmínka $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$ v (5.68) ve větě o existenci potenciálu vektorového pole na str. 106 je ekvivalentním vektorovým vyjádřením nutné podmínky **konzervativnosti** (**neboli potenciálnosti**) **pole** oproti třem skalárním podmínkám $Q'_x = P'_y$, $R'_y = Q'_z$, $P'_z = R'_x$. Zároveň se ale takové pole, které má nulovou rotaci, nazývá **nerotační** nebo **nevírové pole**, přičemž souhrnně každé nekonzervativní pole nazveme **disipativní pole**.⁶⁰⁾ Zmíněnou větu tedy zformulujeme ještě takto:

Věta V **jednoduše souvislé oblasti** G (Viz 5.4.24) je vektorové pole \vec{f} třídy C^1 **konzervativní** (**potenciální**), právě když je **nevírové** neboli platí-li $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$ všude v G . ★

Důkaz: nutnosti podmínky konzervativnosti pole lze mimo způsobu, který jsme uvedli výše, vést následovně. Předpokládáme, že φ je potenciál pole \vec{f} v $G \subseteq \mathbb{E}_3$. Tedy $\vec{f} = \nabla\varphi$ v G . Čtenář si snadno dokáže, že pak $\text{rot } \nabla\varphi = \vec{0}$, tj.

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{0}.$$

Příklady nevírových polí jsou všechna konzervativní pole, např. gravitační síla \vec{F} nebo intenzita elektrostatického pole \vec{E} .

K určování konzervativnosti (potenciálnosti) vektorového pole \vec{f} třídy C^1 na oblasti G lze⁶¹⁾ ve shodě s dosavadními poznatky použít **tři testovací schémata konzervativnosti pole**

- T1)** $\text{rot } \vec{f} \neq \vec{0} \quad \forall X \in G \Rightarrow \vec{f}$ **není** konzervativní pole, je to **disipativní pole**
T2) $\text{rot } \vec{f} = \vec{0} \quad \forall X \in G$ a G je jednoduše souvislá oblast $\Rightarrow \vec{f}$ **je** konzervativní pole
T3) $\text{rot } \vec{f} = \vec{0} \quad \forall X \in G$ a G není jednoduše souvislá oblast \Rightarrow **nelze rozhodnout**.⁶²⁾

d) Pro divergenci gradientu (skalárního) pole f byl zaveden Laplaceův operátor onoho pole. Pro rotaci gradientu pole f toho není zapotřebí, neboť se snadno odvodí vektorový vztah

$$\text{rot grad } f \equiv \boxed{\text{rot } \nabla f = \vec{0}} = (0, 0, 0).$$

Rovněž pro vektorové pole \vec{f} se snadno odvodí, že

$$\boxed{\text{div rot } \vec{f} = 0} \quad .^{63)}$$

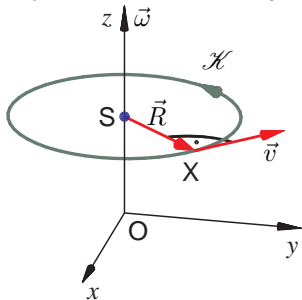
⁶⁰⁾ Používaly nebo se používají četné další výstižné názvy jako pole *potenciální*, *Newtonovo*, *laminární*. V opačném případě, pole s víry se nazývá *rotační* nebo *vírové*, *nekonzervativní* (či které *není* potenciální), *newtonské*, *turbulentní* apod.

⁶¹⁾ v důsledku věty 5.4.22

⁶²⁾ na základě věty 5.4.22, přičemž existují ještě podrobnější výsledky, ale nebudeme se jimi nyní zabývat

⁶³⁾ Vzhledem ke skládání dvou zobrazení bychom měli přesněji psát $\text{div} \circ \text{rot}$, ale je to spíše méně obvyklé.

5.4.41 Příklad Těleso rotuje kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ proti směru otáčení hodinových ručiček při pohledu pozorovatele proti směru osy z . Určeme rotaci vektorového pole \vec{v} obvodových rychlostí hmotných bodů X tělesa opisujících kružnice se středy S na ose z a poloměry R v rovinách kruhových drah kolmých k ose z . Situace je na obr. 5.7.



Řešení: Je-li $X = (x, y, z)$ bod tělesa, pak $S = (0, 0, z)$, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, kde průvodič $\vec{R} = \vec{SX} = (x, y, 0)$ a $\|\vec{R}\| = R$ je poloměr uvažované kružnice \mathcal{K} , jejíž vektorová rovnice je $\vec{OX} \equiv \vec{r} = (R \cos t, R \sin t, z)$. Pole \vec{v} určíme z toho, že jeho norma je evidentně $\|\vec{v}\| = \|\vec{\omega} \times \vec{R}\| = \omega R = \omega \sqrt{x^2 + y^2}$, kde označujeme $\omega = \|\vec{\omega}\|$ a \vec{v} je kolmý na vektor \vec{R} . Jejich skalární součin $\vec{v} \cdot \vec{R} = 0$, tudíž

$$\vec{v} = \omega (-y, x, 0).$$

Potom, např. Laplaceovým rozvojem podle prvků 1. řádku, vypočítáme rotaci pole \vec{v} v bodech S

Obr. 5.7

$$\text{rot } \vec{v}(S) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \omega \left[\vec{i} \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) \right] = 2\omega \vec{k} = (0, 0, 2\omega) = 2\omega(0, 0, 1).$$

Délka $\text{rot } \vec{v}$ je 2ω v obloukové míře a $\text{rot } \vec{v}$ má směr $\vec{k} = (0, 0, 1)$, což je směr osy z , který je směrem vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Tento výsledek je zároveň i odvozením fyzikální interpretace rotace pole rotující kapaliny z odstavce 5.4.39.

5.4.42 Společné vlastnosti operátorů gradientu, divergence a rotace

- Stejně jako gradient skalárního pole (Viz 5.4.19 g)) také divergence i rotace vektorového pole jsou *invarianty* vzhledem ke změně systému souřadnic. Jsou to také *lokální pojmy* vztahující se k bodu a jeho dostatečně malému okolí.⁶⁴⁾
- Jde o operátory **1. řádu**, které jsou *lineární* (Viz 4.3.4 str. 67).

Přehled probraných základních operací z teorie pole, v níž je pro lepší zapamatování využíván tzv. tečka-křížkový formalismus, shrnuje tabulka 5.1.

Typ pole	Operace	Označení	Formalismus tečka – křížek	Výsledné pole
skalární	gradient	∇f	∇f	vektorové
vektorové	divergence	$\text{div } \vec{f}$	$\nabla \cdot \vec{f}$	skalární
skalární	laplacián	Δf	$\nabla^2 f$	skalární
vektorové	rotace	$\text{rot } \vec{f}$	$\nabla \times \vec{f}$	vektorové

Tabulka 5.1: Základní operace teorie pole

5.5 Implicitní funkce

5.5.1 Definice Uvažujme anulovanou rovnici $F(x, y) = 0$ a množinu všech jejích kořenů označme M , tj. bodově: $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid F(x, y) = 0\}$.⁶⁵⁾ Řekneme, že *rovnice* $F(x, y) = 0$ *definuje implicitně funkci*

⁶⁴⁾ Invariantnost, zde nezávislost těchto operátorů na souřadnicích, není vůbec zřejmá. Je to dáno tím, že jsme uvedené operátory definovali „souřadnicově“ a diferenciálními operacemi pomocí Hamiltonova operátoru ∇ . Ve skutečnosti však byly v teorii pole všechny tři operátory zavedeny jako jisté limity vyjádřené pomocí integrálů. Avšak **limita je pojem lokální a je určena (pokud existuje) jednoznačně.**

⁶⁵⁾ M je binární relace v \mathbb{E}_2 a místo o grafu této binární relace se někdy nepřesně mluví o „grafu rovnice“ $F(x, y) = 0$. **Geometricky** je M množina bodů určená průnikem prostorového grafu funkce $z = F(x, y)$ s rovinou $z = 0$, tj. M je **nulová vrstevnice** ($c = 0$), též **izokřivka** (existuje-li) **této funkce**. Připomeňme, že geometrie takové množiny M může být dost odlišná od intuitivní představy o křivkách (Viz 4.9 [6h]).

jedné proměnné $y = f(x)$, resp. $x = \varphi(y)$ na okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{E}_2$ nebo obráceně, že na onom okolí je **funkce** $y = f(x)$, resp. $x = \varphi(y)$ **daná implicitně**, či stručně, že je to **implicitní funkce** určená rovnicí $F(x, y) = 0$ na okolí bodu X_0 , jestliže $F(X_0) = 0$ (tj. $X_0 \in M$) a platí

$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}(X_0) : F(x, y) = 0 \iff y = f(x), \text{ resp. } x = \varphi(y).$$

Stručně shrnuto: Funkce definovaná anulovanou rovnicí (v okolí jistého bodu, který této rovnici vyhovuje) se nazývá **funkce daná implicitně** nebo stručně **implicitní funkce**.

[*Implicitně* znamená nepřímo vyjádřeně, skrytě; *explicitně* znamená přímo vyjádřeně, zřetelně]

5.5.2 Příklady s poznámkami Následující příklady dokumentují, že rovnicí $F(x, y) = 0$ nemusí být vždy definován graf **explicitní funkce** $y = f(x)$, resp. $x = \varphi(y)$ a situace je velmi rozmanitá. Vidíme též, že v rovnici $F(x, y) = 0$ je postavení proměnných x, y naprosto **rovnocenné**⁶⁶⁾, podobně v rovnici $F(x, y, z) = 0$, avšak následující příklady, věty a vzorce už budou vždy formulovány vzhledem k jedné závislé proměnné, která bude dána funkcí zbývajících proměnných, tj. $y = f(x)$, resp. posléze $z = f(x, y)$ apod. Říkáme, že výchozí implicitní rovnice je „rozřešena“ vzhledem k proměnné y , resp. z .

• Rovnicí $x^2 + y^2 + 1 = 0$ je v \mathbb{E}_2 určena množina M bodů (x, y) jí vyhovujících, která je však prázdná, takže jí není definována žádná implicitní funkce.

• Rovnicí $2x^2 + 3y^2 = 0$ je v \mathbb{E}_2 určena množina $M = \{(0, 0)\}$ jednobodová a je jí též určena (např.) implicitní funkce $y = 0$ definovaná pouze pro $x = 0$.

• Rovnicí $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} - x - y = 0$, ekvivalentní s rovnicí⁶⁷⁾ $\sqrt{(x+y)^2} - (x+y) = 0 \iff |x+y| - (x+y) = 0$, tj. ekvivalentní s nerovnicí $x + y \geq 0$, je v \mathbb{E}_2 určena jedna z polorovin o hraniční přímce $x + y = 0$, takže množina M není grafem žádné implicitní funkce.

• Rovnicí $y^2 - x = 0$ je v \mathbb{E}_2 určena⁶⁸⁾ množina M bodů ležících na parabole otevřené ve směru osy x s vrcholem v počátku (studenty nazývaná „ležatá“). Pro každé $x > 0$ má rovnice $y^2 = x$ dvě různá řešení $y = f_1(x) = \sqrt{x}$, $y = f_2(x) = -\sqrt{x}$, takže rovnicí $y^2 - x = 0$ je definováno nekonečně mnoho implicitních funkcí v intervalu $0 \leq x < +\infty$. Ten lze vždy rozdělit na dvě části tak, že v první volíme $y = \sqrt{x}$, ve druhé $y = -\sqrt{x}$. Požadujeme-li navíc *spojitost* funkce, pak existují jen dvě funkce spojité na intervalu $0 \leq x < +\infty$, a to $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$. Požadujeme-li ještě dále, aby graf funkce $y = f(x)$ dané implicitní rovnicí $y^2 - x = 0$ procházel určitým zadaným bodem, tzv. *počátečním bodem*, např. $(1, 1)$, pak takto zúžený, ale v praxi často řešený problém, má zde jediné řešení, funkci $y = \sqrt{x}$. Zvolíme-li bod $(0, 0)$ za *počáteční bod*, prochází jím grafy dvou *spojitých* funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ vyhovujících rovnici $y^2 - x = 0$, neboť v bodě $(0, 0)$ se spojují obě větve „ležatá“ paraboly $y^2 = x$ (uvedená tvrzení lze ověřit větou 5.5.3).

Je zřejmé, že **každou explicitní funkci** $y = g(x)$ **argumentu** x **lze zapsat jako implicitní funkci** o rovnici $y - g(x) = 0$, ale obráceně, z rovnice $F(x, y) = 0$ to obecně nelze.

• Např. z rovnice $xy + \ln y = 0$ nelze vyjádřit y jako explicitní funkci x . Přirozeně nás mohou napadnout otázky:

- Kdy existuje implicitní funkce $y = f(x)$ určená implicitní rovnicí $F(x, y) = 0$?
- Kdy existují derivace funkce $y = f(x)$?

Lze očekávat, že věta řešící obě otázky bude mít **lokální charakter**. Uvedeme ji bez důkazu, který je obsáhlý, ale v příkladu 5.5.5 odvodíme vzorec pro derivaci implicitní funkce, který je v ní obsažen.

5.5.3 Věta o existenci, jednoznačnosti a hladkosti implicitní funkce jedné proměnné Uvažujme rovnici

$$F(x, y) = 0.$$

Označme M množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{E}_2$ vyhovujících této rovnici. Nechť funkce $F(x, y)$ má tyto tři vlastnosti:

- (1) v (počátečním) bodě $X_0 = (x_0, y_0)$ je $F(X_0) = 0$ neboli $X_0 \in M \subseteq \mathbb{E}_2$,
- (2) F je třídy C^1 v okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 ,⁶⁹⁾
- (3) parciální derivace $F'_y(X_0) \neq 0$.

Potom je na určitém okolí $\mathcal{O}(X_0)$ rovnicí $F(x, y) = 0$ definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která má tyto vlastnosti

1. f má graf procházející bodem X_0 neboli $y_0 = f(x_0)$,

⁶⁶⁾ v tom smyslu, kdy gradient $\nabla F(X_0) \neq \vec{0}$, přičemž $F'_x(X_0) \neq 0 \wedge F'_y(X_0) \neq 0$, jak poznáme v následující větě

⁶⁷⁾ *Rovnice* jsou *ekvivalentní*, když množina všech řešení jedné rovnice je rovna množině všech řešení druhé rovnice.

⁶⁸⁾ Stejnou rovnicí $y^2 - x = 0$, avšak v \mathbb{E}_3 je určena množina bodů kolmé **parabolické válcové plochy**. Proto je uvedení uvažovaného prostoru nezbytné.

⁶⁹⁾ Viz 5.3.9.

2. f je třídy C^1 na určitém okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{E}_1$,
3. přičemž pro $x \in \mathcal{O}(x_0)$ lze tuto spojitou derivaci $y' = f'(x)$ určit ze vztahu

$$F'_x + F'_y y' = 0 \quad \text{neboli} \quad \boxed{y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}}. \quad (5.80)$$

Navíc, když všechny parciální derivace funkce F do k -tého řádu včetně ($k \geq 2$) jsou spojité v okolí $\mathcal{O}(X_0)$,⁷⁰⁾ pak $f, f', \dots, f^{(k)}$ jsou též spojité v určitém okolí x_0 , tj. f je *hladká* k -tého řádu v $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ★

5.5.4 Poznámka

- a) Věta vyjadřuje **postačující podmínku**, kterou je definována **implicitní funkce** $y = f(x)$ rovnicí $F(x, y) = 0$ a počátečním bodem $X_0 = (x_0, y_0)$ (tj. počáteční podmínkou $f(x_0) = y_0$) v okolí tohoto bodu (x_0, y_0) , tudíž věta má pouze lokální charakter. I když neříká, jaký má $f(x)$ konkrétní explicitní tvar, ani jak velká jsou zmíněná okolí bodů (x_0, y_0) a x_0 , přesto definuje derivaci implicitní funkce $y = f(x)$ na okolí bodu x_0 (jakožto funkci dvou proměnných).
- b) V oblasti G se neprázdná množina bodů $\mathcal{K} = \{X \in G \subset \mathbb{E}_2 \mid F(x, y) = 0, \nabla F(X) \neq \vec{0}, F \in C^k\}$ nazývá **rovinná (regulární) křivka třídy** C^k určená rovnicí $F(x, y) = 0$. Každý její bod se nazývá **regulární bod**. O regulární křivce třídy C^k dané rovnicí $F(x, y) = c$, která představovala vrstevnici skalárního pole $F(x, y)$ o kótě $c \in \mathbb{R}$, jsme se poprvé zmínili v částech b), c) odstavce 5.4.19. Např. hyperbola daná rovnicí $x^2 - y^2 - 1 = 0$ je regulární křivka třídy C^∞ , přestože má dvě disjunktní větve, tj. není to souvislá množina, zatímco (**pootočená**) **elipsa** s hlavní osou na přímce $y = x$ daná rovnicí $(x - y)^2 + y^2 - 1 = 0$ a třídy C^∞ je souvislá množina.⁷¹⁾ **Věta říká, že na určitém okolí pouze takových bodů** $X_0 = (x_0, y_0)$ rovinné regulární křivky třídy alespoň C^1 určené rovnicí $F(x, y) = 0$,⁷²⁾ kde je i -tá souřadnice gradientu $\nabla F(X_0)$ ($i = 1$ nebo $i = 2$) nenulová (věta je formulována pro $i = 2$, tj. $F'_y(X_0) \neq 0$), lze tuto i -tou souřadnici – proměnnou vyjádřit jako funkci zbývajících proměnných, konkrétně $y = f(x)$, a také určit její 1. derivaci (popř. vyšší), přičemž na zmíněném okolí graf takové funkce $y = f(x)$ splývá se zadanou křivkou.
- c) Je-li $F'_y(X_0) = F'_x(X_0) = 0$, tj. $\nabla F(X_0) = \vec{0} = (0, 0)$, nelze rovnici $F(x, y) = 0$ „rozřešit“ na okolí bodu X_0 vzhledem k žádné z obou proměnných y a x . V tom případě se nazývá bod X_0 **singulární bod křivky** $F(x, y) = 0$. Takové body jsou předmětem studia v diferenciální geometrii.
- d) V bodě $X_0 = (0, 0)$ neexistuje jediná funkce $y = f(x)$ daná implicitní rovnicí $y^2 - x = 0$ „ležatá“ paraboly, neboť není splněn předpoklad věty 5.5.3, aby $F'_y(X_0) \neq 0$. Označme si pro další úvahy všechny takové **body N** množiny M , v jejichž okolí neexistuje právě jedna implicitní funkce, tj. kde $F(N) = 0, F'_y(N) = 0$, a všimněme si, že v tomto příkladě, ale i obecně v **bodech N**, je **normála n rovinné regulární křivky \mathcal{K} třídy aspoň C^1 určené anulovanou rovnicí $F(X) = 0$** (tj. \mathcal{K} je speciálním případem množiny M bodů v \mathbb{E}_2 z definice 5.5.1, přičemž zde „ležatá“ parabola $M = \mathcal{K}$ je třídy C^∞) **kolmá k ose závisle proměnné y (k ose funkčních hodnot)**. Jinými slovy, v **bodech N** má křivka \mathcal{K} „svislé“ tečny.
- Stejně tak vidíme (Obr. 5.8), že celou **Bernoulliovu lemniskátu**⁷³⁾ $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, a > 0$, jejíž průběh názorně vystihuje symbol ∞ svým středem umístěný do počátku, nelze v jakémkoli malém okolí počátku X_0 (má tam **singulární bod**) vyjádřit jedinou funkcí $y = f(x)$. Také zde je $F'_y(0, 0) = 0$. Splnění podmínky $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ není však podmínkou nutnou, což ukazuje průběh **kubické paraboly**⁷⁴⁾ $x - y^3 = 0$ (Obr. 5.9).
- e) Ze vzorce $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ je vidět, že tato derivace je obecně funkcí x i y , a je tomu tak i u vyšších derivací y'', y''' atd. **Málokdy se (totiž) podaří najít konkrétní „rozřešený“ explicitní tvar funkce $y = f(x)$ dané implicitně, i když věta zaručuje její lokální existenci a jednoznačnost** (Funkční hodnoty $y_0 = f(x_0)$ implicitní funkce $f(x)$ však lze na okolí daného počátečního bodu $X_0 = (x_0, y_0)$ počítat numericky iteračními metodami).

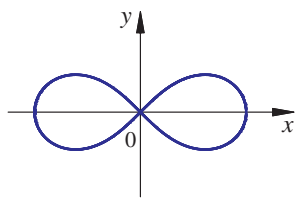
⁷⁰⁾tj. $F \in C^k(\mathcal{O}(X_0))$

⁷¹⁾Viz 3.4.1.

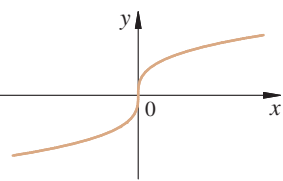
⁷²⁾jež je částí množiny M všech bodů $X = (x, y)$ z \mathbb{E}_2 anulujících rovnicí $F(X) = 0$

⁷³⁾Dříve se používala jako *přechodnice* na plynulý směrový přechod mezi přímou železniční tratí a plným obloukem.

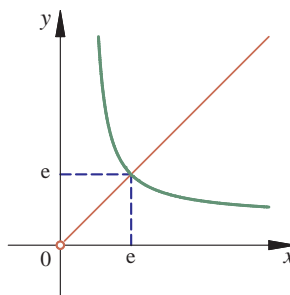
⁷⁴⁾Jako *přechodnice* se v železničním stavitelství dnes používá část **kubické paraboly**, zatímco u silnic se využívá části **klotoidy**.



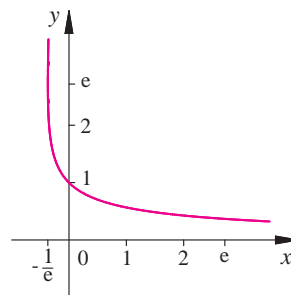
Obr. 5.8



Obr. 5.9



Obr. 5.10



Obr. 5.11

5.5.5 Příklad Odvodíme vzorec pro 1. a 2. derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.
 Řešení: Derivujeme obě strany identické rovnosti $F(x, f(x)) = 0$ podle x a **využijeme-li řetězové pravidlo** (Viz 5.3.3), tj. derivujeme složenou funkci F proměnné x , dostaneme

$$F'_x(x, f(x)) \cdot \frac{dx}{dx} + F'_y(x, f(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Tedy **vzorec (5.80) si nemusíme pamatovat**. Druhou derivaci, za předpokladu, že platí věta 5.5.3 pro $k = 2$, lze získat derivací už derivované identity nebo z ní vyplývajícího podílu. První způsob dává při zjednodušeném zápisu vztah

$$F''_{xx} + F''_{xy}y' + (F''_{yx} + F''_{yy}y')y' + F'_y y'' = 0.$$

Dosadíme-li sem za $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ a použijeme záměnnosti smíšených derivací podle Schwarzovy věty, že totiž $F''_{xy} = F''_{yx}$, získáme vzorec

$$y'' = \frac{1}{(F'_y)^3} \left[-F''_{xx} (F'_y)^2 + 2F''_{xy} F'_x F'_y - F''_{yy} (F'_x)^2 \right], \quad (5.81)$$

který často nepoužíváme, neboť i při výpočtech vyšších derivací lze derivovat složené funkce přímo s využitím úprav.

5.5.6 Příklad Pokud existuje, určíme rovnici tečny t a normály n křivky dané implicitně rovnicí $x^y - y^x = 0$ (Na obr. 5.10 systém Maple znázornil v \mathbb{E}_2 body vyhovující této rovnici) v bodě $X_0 = (1, 1)$.

Řešení: Vzhledem k zaměnitelnosti proměnných x a y v rovnici je jedno, zda hledáme $y = f(x)$ nebo $x = \varphi(y)$. Označme $F(x, y) = x^y - y^x$. Pak $F(1, 1) = 0$, $F \in C^\infty(D_F)$, kde $D_F = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $F'_y = x^y \ln x - xy^{x-1}$, $F'_y(1, 1) = -1 \neq 0$. V určitém okolí bodu X_0 existuje jediná funkce $y = f(x)$ splňující 3 předpoklady existenční věty 5.5.3 tudíž i požadavky zadání příkladu. Můžeme derivovat podle x identitu $x^{y(x)} - [y(x)]^x = 0 \Big|_{\frac{d}{dx}}$ a použít toho, že

$$\left((u(x)^{v(x)})' \right)' = \left(e^{\ln u^v} \right)' = \left(e^{v \ln u} \right)' = e^{v \ln u} \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v \left(\frac{u'}{u} v + v' \ln u \right),$$

avšak výjimečně zde využijme vzorec z předešlého příkladu

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}} \Rightarrow f'(1) = 1 = k_t,$$

kde k_t je směrnice tečny t . Směrnice k_n normály n je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -1$. Pak $t: y = x$; $n: y = -x + 2$ (popř. bychom využili toho, že normálový vektor $\vec{n}(1, 1) = \nabla F(X_0) = (F'_x, F'_y)_{X_0} = (1, -1)$).

5.5.7 Příklad Určíme druhou derivaci funkce $f(x)$ implicitně dané rovnicí $xy + \ln y = 0$ (Obr. 5.11) a bodem $X_0 = (0, 1)$.

Řešení: Snadno ověříme splnění předpokladů pro existenci jediné implicitní funkce. Derivováním máme $y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{xy+1} \Rightarrow y'(X_0) = -1 < 0$. Derivováním y' pak máme $y'' = -\frac{2yy'(xy+1) - y^2(y+xy')}{(xy+1)^2} \Rightarrow y''(X_0) = 3 > 0$. Implicitní funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 = 0$ *klesající a (ryze) konvexní*.

5.5.8 Poznámka Všechny výsledky, zejména geometrické, které se týkaly křivek $F(x, y) = 0$, lze s přihlédnutím k úvahám souvisejícím s gradientem funkce F v částech b), c) odstavce 5.4.19 bezprostředně zobecnit na plochy $F(x, y, z) = 0$, popř. **nadplochy** $F(X, y) = 0$, kde bod $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}_n$, $n \geq 3$.

5.5.9 Věta o existenci, jednoznačnosti a hladkosti implicitní funkce dvou proměnných Uvažujme rovnici

$$F(x, y, z) = 0. \quad (75)$$

Označme M množinu všech bodů $(x, y, z) \in \mathbb{E}_3$ vyhovujících této rovnici. Nechť funkce $F(x, y, z)$ má tyto tři vlastnosti:

- (1) v (počátečním) bodě $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ je $F(X_0) = 0$ neboli $X_0 \in M \subseteq \mathbb{E}_3$,
- (2) F je třídy C^1 v okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 ,
- (3) parciální derivace $F'_z(X_0) \neq 0$.

Potom je na určitém okolí $\mathcal{O}(X_0)$ rovnicí $F(x, y, z) = 0$ definována jediná funkce $z = f(x, y)$, která má tyto vlastnosti

1. f má graf procházející bodem X_0 neboli $z_0 = f(x_0, y_0)$,
2. f je třídy C^1 na určitém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{E}_2$,
3. přičemž pro $(x, y) \in \mathcal{O}(x_0, y_0)$ lze tyto spojité derivace $z'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $z'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ určit ze vztahů

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ neboli } \boxed{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}}, \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ neboli } \boxed{z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}. \quad (5.83)$$

Navíc, jestliže $F \in C^k(\mathcal{O}(x_0, y_0, z_0))$, $k \geq 2$, pak $f \in C^k(\mathcal{O}(x_0, y_0))$, tj. f je *hladká* k -tého řádu na onom okolí. ★

5.5.10 Tečná rovina a normála regulární plochy \mathcal{S} třídy C^k dané implicitně v dotykovém bodě T oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_n$ (kde speciálně $n = 3$) implicitní rovnicí $F(x, y, z) = 0$ mají podle části b) článku 5.4.19 **normálový vektor** \vec{n}_T , $T = (x_0, y_0, z_0)$, určen gradientem F , tj. $\boxed{\vec{n}_T = \nabla F(T) = (F'_x, F'_y, F'_z)_T}$ za předpokladu, že $F \in C^k(G)$, kde $k \geq 1$. Plocha $\mathcal{S} = \{(x, y, z) = 0 \mid F(x, y, z) = 0\}$ chápána jako nulová **hladina skalárního pole** $u = F(x, y, z)$ má podle (5.58) v bodě T **tečnou rovinu** o rovnici $\nabla F(T) \cdot (X - T) = 0$, nebo po rozepsání skalárního součinu má rovnici v symetrickém tvaru

$$\boxed{F'_x(T)(x - x_0) + F'_y(T)(y - y_0) + F'_z(T)(z - z_0) = 0}. \quad (5.84)$$

5.5.11 Příklad Určeme a) rovnici tečné roviny τ k ploše $\mathcal{S} : 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21 = 0$, která je rovnoběžná s rovinou $\sigma : 6x + 4y + z = 0$, b) diferenciál v obecném bodě funkce $z = f(x, y)$ definované implicitně rovnicí plochy \mathcal{S} , c) Laplaceův operátor $\Delta z = \nabla^2 z$ této implicitní funkce.

Řešení: a) Proměnnou z lze vyjádřit dvěma explicitními funkcemi $z = \pm \sqrt{21 - 3x^2 - 2y^2}$, tečnou rovinu však jednodušeji určíme i v této části příkladu pomocí implicitní funkce. Označíme $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 21$. Je to polynomičká funkce, tj. je dokonce třídy C^∞ na celém \mathbb{E}_3 , $F'_z = 2z$, tj. funkce f není jednoznačně určena podle existenční věty v bodech $(x_0, y_0, 0)$. Rovina τ má rovnici $6x + 4y + z + d = 0$. V bodě dotyku $T = (x_0, y_0, z_0)$ je normálový vektor $\vec{n}_\sigma(T) = (6, 4, 1)$ roviny σ kolineární s normálovým vektorem $\vec{n}_\mathcal{S}(T) = (6x_0, 4y_0, 2z_0)$ plochy \mathcal{S} , tj. $\vec{n}_\mathcal{S} = k\vec{n}_\sigma$ neboli $6x_0 = k \cdot 6$, $4y_0 = k \cdot 4$, $2z_0 = k \cdot 1$. Tedy $T = (k, k, \frac{k}{2})$, a protože $T \in \mathcal{S}$, splňuje rovnici pro \mathcal{S} , tudíž platí $3k^2 + 2k^2 + (\frac{k}{2})^2 = 21 \Rightarrow k = \pm 2$. Zároveň $T \in \tau \Rightarrow d = \mp 21$. Existují dva body dotyku, v nichž jsou tečné roviny **trojosého elipsoidu** \mathcal{S} se středem v počátku rovnoběžné s danou rovinou

$$T(2, 2, 1) \in \tau_1 : 6x + 4y + z - 21 = 0, \quad T_2(-2, -2, -1) \in \tau_2 : 6x + 4y + z + 21 = 0.$$

b) $dF(X) = F'_x(X)dx + F'_y(X)dy + F'_z(X)dz = 0$ neboli $6xdx + 4ydy + 2zdz = 0 \Rightarrow dz = df(x, y) = -\frac{1}{z}(3xdx + 2ydy)$ pro $z \neq 0$.

c) Derivováním rovnosti $F(x, y, z(x, y)) = 0$ podle x dostaneme konkrétně $6x + 2z \cdot z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{-3x}{z}$. Derivací tohoto podílu podle x je $z''_{xx} = -3 \frac{z - xz'_x}{z^2} = -\frac{3}{z^2}(z + x \frac{3x}{z}) = -\frac{3}{z^3}(z^2 + 3x^2)$. Podobně derivujeme podle y : $4y + 2z \cdot z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{-2y}{z}$, $z''_{yy} = -2 \frac{z - yz'_y}{z^2} = -\frac{2}{z^3}(z^2 + 2y^2) = -\frac{2}{z^3}(21 - 3x^2)$, $\Delta z = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})z = z''_{xx} + z''_{yy} = -\frac{3}{z^3}(x^2 + z^2 + 14)$.

Laplacián implicitní funkce je tedy funkcí, která není definována v bodech roviny xy , stejně jako implicitní funkce.

⁷⁵⁾ Analogicky, zde je M ternární relace v \mathbb{E}_3 . **Geometricky** je M množina bodů určená průnikem grafu (ležícího už v \mathbb{E}_4) funkce $u = F(x, y, z)$ s nadrovinou $z = 0$ (v \mathbb{E}_4), tj. M je **nulová hladina** ($c = 0$), též **izoplocha této funkce**.

5.6 Vyšší diferenciály a Taylorův vzorec

5.6.1 Motivace Také u funkcí více proměnných je základním úkolem diferenciálního počtu, a často také inženýrských aplikací matematiky, nahrazení komplikované funkce $f(\mathbf{X})$ v okolí uvažovaného bodu \mathbf{A} polynomm, a to nejen lineárním, jak tomu bylo u diferenciálu 1. řádu, ale polynomm vyššího stupně. S polynomy se rovněž dobře pracuje, např. se snadno derivují i integrují. Jinými slovy, ze znalostí hodnot funkce $f(\mathbf{X})$ a jejích derivací v bodě \mathbf{A} , tj. **z lokálního chování funkce $f(\mathbf{X})$, chceme získat informaci** o hodnotách funkce v dalších bodech, tj. **o globálním chování této funkce**. Vyřešení tohoto úkolu aproximací funkce $f(\mathbf{X})$ Taylorovým polynomm více proměnných se formálně nebude odlišovat od už známé situace u funkce jedné proměnné, použijeme-li k zápisu Taylorova vzorce totální diferenciály vyšších řádů. **Taylorův vzorec**, snad nejuvšestranněji používaný vzorec matematické analýzy, nejen **umožní přesněji** než diferenciál 1. řádu **aproximovat přírůstek funkce, ale, což je zásadní, také odhadnout chybu této aproximace**.

5.6.2 Totální diferenciál vyššího řádu Z definice 5.2.2 víme, že totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$ je pro *přírůstkový vektor* $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$, tj. pro konstantní $dx = h_1, dy = h_2$, opět funkcí dvou proměnných x, y .

5.6.3 Definice Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ totální diferenciál, a nechť parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

mají totální diferenciál⁷⁶⁾ v bodě \mathbf{A} . Pak říkáme, že **funkce $f(\mathbf{X})$ má v bodě \mathbf{A} totální diferenciál 2. řádu** stručně **druhý diferenciál**, nebo že **funkce je dvakrát diferencovatelná**. Tímto diferenciálem rozumíme výraz, který označujeme $d^2 f(\mathbf{A}, \vec{h})$, $d^2 f_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$, či jen $d^2 f$ nebo $d^2 z$,

$$d^2 z = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}_2$ je *přírůstkový vektor*. Místo h_1, h_2 často píšeme dx, dy .

5.6.4 Poznámka Druhý diferenciál dostaneme při využití záměnnosti smíšených derivací 2. řádu formálně jako diferenciál 1. diferenciálu v bodě (x_0, y_0) při konstantních⁷⁷⁾ h_1, h_2

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2\right) = h_1 d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + h_2 d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = h_1 \left(h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + h_2 \left(h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \\ &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f}. \end{aligned}$$

Použili jsme podobného symbolického operátorového označení, které už známe z definice gradientu funkce (str. 99), a které zúročí následující

5.6.5 Definice Nechť funkce $f(x, y)$ a všechny její parciální derivace do $(k-2)$ -ho řádu včetně, $k \geq 2$, mají v okolí bodu $\mathbf{A} = (x_0, y_0)$ totální diferenciál a parciální derivace $(k-1)$ -ního řádu mají totální diferenciál v bodě \mathbf{A} . Pak říkáme, že **funkce $f(\mathbf{X})$ je k -krát diferencovatelná v bodě \mathbf{A}** , nebo že **funkce $f(\mathbf{X})$ má v bodě \mathbf{A} totální diferenciál k -tého řádu**, stručně, **k -tý diferenciál**, a rozumíme jím výraz

$$\begin{aligned} d^k f(\mathbf{A}, \vec{h}) &= \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(\mathbf{X})|_{\mathbf{A}} = \\ &= h_1^k \frac{\partial^k f(\mathbf{A})}{\partial x^k} + \binom{k}{1} h_1^{k-1} h_2 \frac{\partial^k f(\mathbf{A})}{\partial x^{k-1} \partial y} + \dots + \binom{k}{k-1} h_1 h_2^{k-1} \frac{\partial^k f(\mathbf{A})}{\partial x \partial y^{k-1}} + h_2^k \frac{\partial^k f(\mathbf{A})}{\partial y^k}, \end{aligned}$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{V}_2$ je libovolný, ale pevně zvolený přírůstkový vektor. Přitom definujeme **diferenciál nultého řádu funkce** v daném bodě konstantní funkcí v tom bodě následovně

$$\boxed{d^0 f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})}. \quad (5.85)$$

⁷⁶⁾ Víme, že k tomu postačuje, aby $f \in C^2(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$.

⁷⁷⁾ Přitom nemusí být $f \in C^2(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$, neboť platí

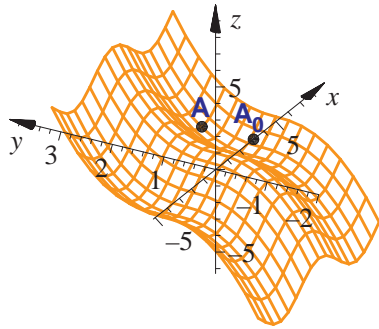
Zobecněná věta o záměnnosti derivací Má-li funkce f v bodě $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_n$ diferenciál k -tého řádu ($k \geq 2$), pak jsou parciální derivace funkce f až do řádu k -tého včetně v bodě \mathbf{A} záměnné (tj. hodnota takové derivace v bodě \mathbf{A} závisí jen na tom, kolikrát se derivuje podle x_1 , kolikrát podle x_2 atd., a ne na tom, jaké bylo pořadí derivování). ★

Věta je podstatným zobecněním zobecněné Schwarzovy věty na str. 96.

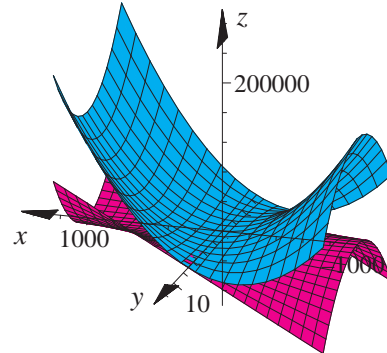
5.6.6 Poznámka Obdobně se definuje k -krát diferencovatelná funkce n proměnných $z = f(X)$, jejíž k -tý totální diferenciál je pro každý přírůstkový vektor $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}_n$ dán výrazem

$$d^k f(A, \vec{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(A) \equiv \left(\sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(A), \quad (5.86)$$

jako taková funkce, která má diferencovatelné všechny parciální derivace řádu $k-1$ v daném bodě $A \in \mathbb{E}_n$.⁷⁸⁾



Obr. 5.12



Obr. 5.13

5.6.7 Příklad Určeme, kolikrát je diferencovatelná funkce (Obr. 5.12) $f(x, y) = \cos x + \frac{27}{28}y^2 \sqrt[3]{y}$ v bodě $A_0 = (\pi, 0)$.

Řešení: $f'_x = -\sin x$, $f'_y = \frac{9}{4}y \sqrt[3]{y}$, $f''_{xy} = 0 = f''_{yx}$, $f''_{xx} = -\cos x$, $f''_{yy} = 3\sqrt[3]{y}$, $f'''_{xxy} = 0 = f'''_{yyx}$, $f'''_{xxx} = \sin x$. Protože $f'''_{yyy} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$, není $f'''_{yyy}(\pi, 0)$ vlastní (konečná), takže f'' není v bodě A_0 diferencovatelná (Viz např. schéma v 5.4.11). Funkce $f(x, y)$ je tedy v bodě A_0 dvakrát diferencovatelná (je totiž nejen v jeho okolí, ale dokonce v \mathbb{E}_2 spojitě diferencovatelná neboli $f \in C^2(\mathbb{E}_2)$).

5.6.8 Příklad Stanovme $d^2 f(A, \vec{h})$, kde $z = f(x, y)$ je funkce z předešlého příkladu, ale volíme bod $A = (\pi, 1)$.

Řešení: S operátorovým označením ve vzorci z odstavce 5.6.4 pracujeme jako s binomickým vzorcem takto

$$d^2 f(X, \vec{h}) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) = \left(h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = f''_{xx} h_1^2 + 2f''_{xy} h_1 h_2 + f''_{yy} h_2^2.$$

Jelikož $f''_{xx}(A) = -\cos x|_A = 1$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy}(A) = 3\sqrt[3]{y}|_A = 3$, je

$$d^2 f(A, \vec{h}) = h_1^2 + 3h_2^2,$$

nebo ve tvaru užívaném často v inženýrské praxi, kdy $\vec{h} = (dx, dy)$, je

$$d^2 z(A) = dx^2 + 3dy^2,$$

nebo pro přírůstkový bod $X = (x, y)$ z okolí bodu A , kdy $\vec{h} = X - A = (x - \pi, y - 1)$, je

$$d^2 f_A(x, y) = (x - \pi)^2 + 3(y - 1)^2.$$

5.6.9 Poznámka Tak jako je první totální diferenciál funkce f v bodě $A \in \mathbb{E}_n$ lineární forma na $\mathbb{V}_n \equiv \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ (Viz příklad 5.4.18), je druhý diferenciál kvadratická forma, třetí diferenciál pak kubická forma na \mathbb{V}_n (tj. forma souřadnic přírůstkového vektoru $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}_n$) atd.

5.6.10 Poznámka Podotkněme, že když \vec{h} je nenulový přírůstkový vektor z \mathbb{V}_n , pak $\vec{s} = \frac{1}{\|\vec{h}\|} \vec{h}$ (kde $\|\vec{h}\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$ je euklidovská norma) je jednotkový vektor téhož směru jako \vec{h} , a k -tá derivace funkce $f(X)$ k -krát diferencovatelné v bodě A ve směru $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ v bodě A označená jako $\frac{\partial}{\partial \vec{s}} (\dots (\frac{\partial}{\partial \vec{s}} (\frac{\partial f}{\partial \vec{s}})) \dots)|_A$ nebo stručně $\frac{\partial^k f}{\partial \vec{s}^k}(A)$ souvisí ve shodě se vzorcem (5.61) ze str. 105 s k -tým diferenciálem této funkce v bodě A takto

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{s}^k}(A) = d^k f(A, \vec{s}). \quad (5.87)$$

⁷⁸⁾K tomu postačuje, aby $f \in C^k(\mathcal{O}(A))$.

Operátor směrové derivace $\frac{\partial}{\partial \vec{s}}$ se někdy označuje jako $\partial_{\vec{s}}$. Můžeme definovat a psát $\frac{\partial}{\partial \vec{s}} := \vec{s} \cdot \nabla = s_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial x_n}$. Pro jeho k -násobné použití, tj. pro jeho k -tou mocninu lze (pro aplikaci na k -krát diferencovatelnou funkci) psát

$$\frac{\partial^k}{\partial \vec{s}^k} := \left(\frac{\partial}{\partial \vec{s}} \right)^k = (\vec{s} \cdot \nabla)^k = \left(s_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k. \quad (5.88)$$

5.6.11 Příklad Pro funkci z předešlého příkladu (dvakrát (spojitě) diferencovatelnou) určíme pomocí 2. diferenciálu druhou směrovou derivaci ve směru určeném vektorem $\vec{h} = (3, 4)$ opět v bodě $\mathbf{A} = (\pi, 1)$.

Řešení: $\|\vec{h}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \neq 1$, tj. \vec{h} není vektor jednotkový. Určíme souhlasně kolineární směr jednotkového vektoru $\vec{s} = \frac{1}{5}(3, 4)$. Bylo zjištěno, že $d^2 f(\mathbf{A}, \vec{h}) = h_1^2 + 3h_2^2$, takže podle (5.87) je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{s}^2}(\pi, 1) = s_1^2 + 3s_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{57}{25} > 0.$$

Výsledek $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{s}^2}(\mathbf{A}) > 0$, resp. < 0 můžeme geometricky interpretovat stručným **rčením**: **graf funkce** $f(x, y)$ **je v bodě** $(\mathbf{A}, f(\mathbf{A}))$ **ve směru** \vec{s} **(ryze) konvexní** resp. **konkávní křivka**.⁷⁹⁾ (podrobněji: graf **zúžení funkce** $f(x, y)$ na polopřímku s počátkem $\mathbf{A} \in \mathbb{E}_2$ a směrem $\vec{s} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ je v bodě $(\mathbf{A}, f(\mathbf{A}))$ ryze ... křivka).

5.6.12 Příklad Předešlý příklad řešíme operátorově.

Řešení: bude podstatně přímočařejší. Podle (5.88) totiž platí vzorec

$$\frac{\partial^k f}{\partial \vec{s}^k} = (\vec{s} \cdot \nabla)^k f = \left(s_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + s_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f. \quad (5.89)$$

Tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{s}^2}|_{\mathbf{A}} = (\vec{s} \cdot \nabla)^2 f|_{\mathbf{A}} = [(s_1, s_2) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})]^2 f|_{\mathbf{A}} = [s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y}]^2 f|_{\mathbf{A}} = (s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2s_1 s_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + s_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) f|_{\mathbf{A}} = f''_{xx}(\mathbf{A})s_1^2 + 2f''_{xy}(\mathbf{A})s_1 s_2 + f''_{yy}(\mathbf{A})s_2^2 = s_1^2 + 3s_2^2$ atd.

5.6.13 Věta Taylorova⁸⁰⁾ o mocninném rozvoji funkce více proměnných

Nechť funkce n proměnných $f(\mathbf{X})$ má v každém bodě uzavřené úsečky \mathbf{AX} spojující body⁸¹⁾ $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \vec{h} = (x_1, \dots, x_n)$, kde vektor $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \neq \vec{0}$,⁸²⁾ totální diferenciály do $(k+1)$ -ního řádu včetně. Pak existuje číslo (parametr) $0 < \vartheta < 1$ tak, že platí **Taylorův vzorec**

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A} + \vec{h}) = f(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{A}) + \frac{df(\mathbf{A})}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{A})}{2!} + \dots + \frac{d^k f(\mathbf{A})}{k!} + \frac{d^{k+1} f(\mathbf{A}^*)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} d^i f(\mathbf{A}) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{A}^*), \end{aligned} \quad (5.90)$$

kde bod $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \vartheta \vec{h} = (a_1 + \vartheta h_1, \dots, a_n + \vartheta h_n)$ je (blíže neurčený, ale pevný) vnitřní bod uvedené úsečky \mathbf{AX} , přičemž funkce R_k (podrobněji označená $R_k(\mathbf{X}; \vartheta)$ nebo $R_k(\vec{h}, \vartheta)$)

$$R_k = \frac{d^{k+1} f(\mathbf{A}^*)}{(k+1)!} = \frac{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k+1} f(\mathbf{A}^*)}{(k+1)!} \quad (5.91)$$

je (nejčastěji používaný) tzv. **Lagrangeův tvar zbytku v Taylorově vzorci** (po k -tém diferenciálu), který splňuje limitní podmínku

$$\lim_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}} \frac{R_k(\mathbf{X}; \vartheta)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|^k} = 0 \quad \text{neboli} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{R_k(\mathbf{X}; \vartheta)}{\|\vec{h}\|^k} = 0. \quad (5.92) \quad \star$$

Důkaz: není obtížný a je založen na větě o derivaci složené funkce.

⁷⁹⁾Přesněji, graf **zúžení funkce** f na funkci jedné proměnné $\varphi(t) = f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2)$, kde bod $\mathbf{A} = (x_0, y_0) = (\pi, 1)$, $\vec{s} = (s_1, s_2)$, $\|\vec{s}\| = 1$, $t > 0$.

⁸⁰⁾Taylor, Brook (1685–1731), anglický matematik.

⁸¹⁾ \mathbb{Z} n rozměrného euklidovského prostoru \mathbb{E}_n

⁸²⁾přičemž \vec{h} patří do zaměření \mathbb{V}_n prostoru \mathbb{E}_n

⁸³⁾Tuto limitní podmínku slovně vyjadřujeme tak, že **funkce** R_k **je pro** $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ **nekonečně malá řádu vyššího než k -tého**. Přitom, stejně jako v (5.4) na str. 88, nejčastěji uvažujeme euklidovskou normu $\|\vec{h}\| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

5.6.14 Důsledky Taylorovy věty

- a) Pro $k = 0$, tj. pro diferencovatelnou funkci f , kdy $\frac{1}{0!}d^0f(A) = f(A)$, dostaneme z (5.90) **Lagrangeovu⁸⁴ větu o střední hodnotě**, též **Lagrangeovu větu o přírůstku funkce** více proměnných v bodě A

$$f(X) - f(A) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(A^*) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(A^*) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A^*), \quad (5.93)$$

kde X , resp. \vec{h} opět můžeme nazývat *přírůstkový bod*, resp. *přírůstkový vektor*.

- b) Je-li bod $A = O$, dostaneme tzv. **Maclaurinův⁸⁵ vzorec**

$$f(X) = \sum_{i=0}^k \frac{d^i f(O)}{i!} + R_k, \quad \text{kde } R_k = \frac{d^{k+1} f(\vartheta h_1, \dots, \vartheta h_n)}{(k+1)!} \text{ pro } \vartheta \in (0, 1), \quad (5.94)$$

přičemž funkce R_k je opět podrobněji označovaná jako $R_k(X; \vartheta)$ nebo $R_k(\vec{h}; \vartheta)$.

5.6.15 Taylorův (náhradní) polynom $T_k(X)$ proměnných x_1, \dots, x_n k -tého stupně funkce $f(X)$ n -proměnných v bodě A , jenž nazýváme **střed** polynomu $T_k(X)$, získáme, vynecháme-li na pravé straně v (5.90) poslední člen, tj. zbytek R_k , a položíme $\vec{h} = (dx_1, \dots, dx_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, takže je

$$T_k(X) = \sum_{i=0}^k \left[(x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^i f(A). \quad (5.95)$$

Pro $A = O = (0, \dots, 0)$, tj. pro střed v počátku, získáme **Maclaurinův polynom** $M_k(X)$, stejně jako u funkce jedné proměnné. Lze ukázat, že

• Zmíněný **Taylorův polynom** $T_k(X)$ funkce $f(X)$ n proměnných **existuje právě jeden**, a navíc ze všech polynomů $Q_k(X)$ téhož stupně k procházejících bodem A **nejlépe aproximuje funkci $f(X)$** v okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A , tj.

$$|f(X) - T_k(X)| \leq |f(X) - Q_k(X)| \quad \forall Q_k(X) \quad \forall X \in \mathcal{O}(A).$$

Důsledkem toho je mimořádný význam Taylorova vzorce v mnoha odvětvích matematické analýzy i v příbližných metodách používaných při řešení inženýrských aplikací na počítači.

• Z již uvedeného je zřejmé, že **velikost** $|\varepsilon(\vec{h})|$ **chyby aproximace** $\varepsilon(\vec{h})$ funkce $f(X)$ Taylorovým polynomem $T_k(X)$ v bodě A

$$|\varepsilon(\vec{h})| = |f(X) - T_k(X)| \quad (5.96)$$

nalezneme, určíme-li zbytek R_k v Taylorově vzorci, neboť jde o tutéž funkci. Použijeme-li tedy k výpočtu $f(X)$ v přírůstkovém bodě X přibližné rovnosti

$$f(X) \approx T_k(X), \quad (5.97)$$

pak při malé vzdálenosti $\varrho(X, A) = \|\vec{h}\|$ bodů X, A je velikost chyby, které se dopustíme, $|\varepsilon| = |R_k|$, a je řádově menší než $\|\vec{h}\|^k$.

• Taylorův vzorec lze rovněž využít při vyšetřování průběhu funkce $f(X)$ v okolí bodu A_0 , což bude cílem závěru této kapitoly.

5.6.16 Příklad Aproximujme funkci $f(x, y) = 2xy^2 + \frac{1}{7} \sin^2 x + 3y - 5$ v okolí počátku $O = (0, 0)$ Maclaurinovým (bikubickým) polynomem $M_3(x, y)$ třetího stupně dvou proměnných a odhadněme velikost $|\varepsilon|$ chyby ε této aproximace pomocí zbytku $R_3(x, y; \vartheta)$.

Řešení: Platí $f(x, y) = M_3(x, y) + R_3(x, y; \vartheta)$, $|\varepsilon| = |f(x, y) - M_3(x, y)| = |R_3(x, y; \vartheta)|$. Přitom platí přibližná rovnost

$$f(x, y) \approx M_3(x, y) \text{ s přesností na } D\text{-desetiných míst, když } |\varepsilon| < 0,5 \cdot 10^{-D}. \quad (5.98)$$

Použijeme-li předchozích označení, máme

$$h_1 = dx = x - 0 = x, \quad h_2 = dy = y, \quad (dx)^k = dx^k,$$

a pro k -tý diferenciál můžeme použít vztah v 5.6.5. Dále je $A^* = (0 + \vartheta h_1, 0 + \vartheta h_2) = (\vartheta x, \vartheta y)$. Nejprve $d^0 f(O) = f(O) = -5$; $f'_x = 2y^2 + \frac{1}{7} \sin(2x)$, $f'_x(O) = 0$, $f'_y = 4xy + 3$, $f'_y(O) = 3 \Rightarrow df(O) = 3dy = 3y$; $f''_{xx}|_O = \frac{2}{7} \cos(2x)|_O = \frac{2}{7}$, $f''_{xy}|_O = 4y|_O = 0$, $f''_{yy}|_O = 4x|_O = 0 \Rightarrow d^2 f(O) = \frac{2}{7}x^2$; $f'''_{xxx}|_O = -\frac{4}{7} \sin(2x)|_O = 0$, $f'''_{xxy}|_O = 0$, $f'''_{xyy}|_O = 4$, $f'''_{yyy}|_O = 0$. Pak

⁸⁴Lagrange, Joseph Louis (1736–1813), francouzský matematik, mj. zavedl název *derivative*

⁸⁵Maclaurin, Colin (1698–1746), skotský matematik

$$d^3 f(x, y)|_0 = (dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y})^3 f(x, y)|_0 = f'''_{xxx} dx^3 + 3f'''_{xxy} dx^2 dy + 3f'''_{xyy} dx dy^2 + f'''_{yyy} dy^3|_0 = 3 \cdot 4 dx dy^2 = 12xy^2;$$

Protože $f_{xxxx}^{(4)} = -\frac{8}{7} \cos(2x)$ a ostatní derivace 4. řádu jsou nulové, je

$$d^4 f(A^*) = d^4 f(\vartheta x, \vartheta y) = -\frac{8}{7} \cos(2\vartheta x) dx^4 = -\frac{8}{7} x^4 \cos(2\vartheta x), f(x, y) = -5 + 3y + \frac{1}{2!} \frac{2}{7} x^2 + \frac{1}{3!} 12xy^2 + \frac{1}{4!} (-\frac{8}{7}) x^4 \cos(2\vartheta x) = -5 + 3y + \frac{1}{7} x^2 + 2xy^2 - \frac{x^4}{21} \cos(2\vartheta x), \text{ kde } 0 < \vartheta < 1.$$

Jestliže v okolí $\mathcal{O}(0)$ je $|x| \leq 1$, pak v takovém okolí počátku platí odhad $|\varepsilon| = |R_3(x, y; \vartheta)| = |d^4 f(A^*)| = |-\frac{x^4 \cos(2\vartheta x)}{21}| \leq \frac{1}{21} < \frac{1}{20} = 0,5 \cdot 10^{-1}$, takže je tam (neboť $D = 1$) $f(x, y) \approx M_3(x, y) = 2xy^2 + \frac{1}{7} x^2 + 3y - 5$ **s přesností na jedno desetinné místo**, což vyjadřujeme následujícími třemi ekvivalentními zápisy

$$|f(x, y) - M_3(x, y)| < |\varepsilon|, \quad M_3(x, y) - |\varepsilon| < f(x, y) < M_3(x, y) + |\varepsilon|, \quad f(x, y) \approx M_3(x, y) \pm |\varepsilon|.$$

Menší chyby ε dosáhneme přidáním dalších členů Maclaurinova mocninného rozvoje funkce f (tj. zvětšením k) nebo zmenšením uvažovaného okolí (tj. zmenšením velikosti x). Na obr. 5.13 je graf aproximované funkce $f(x, y)$ tmavý a aproximujícího polynomu $M_3(x, y)$ světlý. K jejich odlišení jsme museli vzít dostatečně velký interval proměnné y .

5.7 Lokální a globální extrémy funkce

Z hlediska současné matematiky i aktuálních inženýrských aplikací jsou úlohy vedoucí na řešení problému extremalizace mimořádně důležité a také velmi časté. Jmenujme aspoň metodu nejmenších čtverců.

5.7.1 Definice Říkáme, že v bodě $P \in M \subset D_f$ je (*neostré*) **maximum funkce $f(X)$ na množině M** (též *vzhledem k množině M*), platí-li pro všechna $X \in M$

$$f(X) \leq f(P) \text{ neboli}^{86)} f(X) - f(P) \leq 0 \quad (5.99)$$

a toto maximum funkce označíme

$$f(P) = \max_M f(X) = \max f(M). \quad (5.100)$$

Platí-li ostré nerovnosti, jde o **ostré maximum funkce na množině M** (v bodě P).

Podobně říkáme, že v bodě $P \in M \subset D_f$ je (*neostré*) **minimum funkce f na množině M** , platí-li pro všechna $X \in M$

$$f(X) \geq f(P) \text{ neboli } f(X) - f(P) \geq 0, \quad (5.101)$$

a označujeme je

$$f(P) = \min_M f(X) = \min f(M), \quad (5.102)$$

resp. že v P je **ostré minimum funkce f na množině M** , platí-li odpovídající ostré nerovnosti.

Maxima nebo minima funkce f na M jsou **extrémy funkce $f(X)$ na množině M** .

Je-li množina M definičním oborem D_f funkce f , mluvíme (stručně) o **globálním (neboli absolutním) extrému funkce f** (neostrém či ostrém). Příslušné body P nazveme **body globálního maxima**, resp. **body globálního minima** funkce f a označíme je

$$\text{GMAX, resp. GMIN.} \quad (5.103)$$

5.7.2 Definice Řekneme, že v bodě $P \in M \subset D_f$ je (*neostré*) **lokální maximum**, resp. **ostré lokální maximum funkce $f(X)$ na množině M** ⁸⁷⁾ (též *vzhledem k množině M*), existuje-li *redukované*⁸⁸⁾ okolí $\mathcal{O}^*(P)$ bodu P tak, že pro každý bod X patřící do M a zároveň do $\mathcal{O}^*(P)$ platí

$$X \in M \cap \mathcal{O}^*(P) \Rightarrow f(X) \leq f(P), \text{ resp. } f(X) < f(P). \quad (5.104)$$

Takový bod P označíme LMAX; podobně definujeme **bod (neostrého) lokálního minima**, resp. **ostrého lokálního minima** LMIN pomocí obrácených nerovností (Je-li $M = D_f$, opět vynecháme dodatek: *vzhledem k D_f či: na D_f*) a souhrnně mluvíme o **lokálních**⁸⁹⁾ **extrémech na (vzhledem k) množině M** .

⁸⁶⁾Následující ekvivalentní (anulovaná) nerovnost se často dokazuje mnohem snadněji.

⁸⁷⁾Uvědomme si, že M může být např. křivka.

⁸⁸⁾tj. okolí bez samotného bodu P

⁸⁹⁾Říkáme jim též **volné** lokální extrémy funkce, chceme-li je odlišit od tzv. **vázaných** lokálních extrémů probíraných dále.

5.7.3 Důležité poznámky k extrémům

- a) V definici lokálních extrémů autoři někdy navíc předpokládají, že bod P musí být *vnitřním* bodem množiny M . V těchto bodech je naše obecnější definice s jejich totožná.

Rozdíl mezi extrémem neostrým a ostrým je zřejmý. Např. funkce $z = x^2 + y^2$, jejímž grafem je *rotační paraboloid*, má v počátku $O = (0, 0)$ bod ostrého lokálního minima, který je zároveň bodem jejího ostrého globálního minima, tj. $L_{\text{MIN}}(0, 0) = G_{\text{MIN}}(0, 0)$, zatímco maximum funkce neexistuje. Funkce $z = 1 - |y|$, jejímž grafem je *sedlová střecha* (z příkladu 5.4.14 na str. 102), má v bodě $(0, 0)$ neostře lokální maximum, které je zároveň jejím neostrým globálním maximem. Lze psát $f_{L_{\text{MAX}}(0,0)} = f_{G_{\text{MAX}}(0,0)} = 1$. Body sedlové střechy příslušné těmto maximům tvoří dokonce přímku, tzv. *hranu maxima sedlové střechy*, v technické praxi známou jako *hřeben sedlové střechy*.

Připomeňme, že u zmíněné sedlové střechy je $z'_x(0, 0) = 0$, zatímco $z'_y(0, 0)$ neexistuje.

- b) Oba příklady z předešlé části ilustrují

Tvrzení: Je-li funkce $f(X)$ definovaná na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, pak body množiny M , v nichž f má *ostrý* lokální extrém na M , tvoří množinu **nejvýše spočetnou**.

Tvrzení neplatí pro neostře extrémy, neboť např. **funkce konstantní** v nějakém otevřeném (n -rozměrném) intervalu má dokonce v každém bodě takového intervalu *neostrý* lokální extrém (zároveň minimum i maximum), tj. takových bodů je nespočetně mnoho a tvoří *kontinuum*.

- c) **Tvrzení:** Má-li $f(X)$ v bodě $P \in M_1 \subset M \subseteq D_f$ *ostré* lokální minimum (maximum) na M , pak má f v bodě P též *ostré* lokální minimum (maximum) na M_1 . Kontrapozice tvrzení dává

Kontrapozice tvrzení: Nemá-li funkce $f(X)$ v bodě $P \in M_1 \subset M \subseteq D_f$ *ostré* lokální maximum (resp. minimum) na aspoň jedné *vlastní* podmnožině M_1 množiny M (tj. $M_1 \neq M$), pak jej f též nemá v bodě P na množině M (obsahující M_1 jako *vlastní* část).

- d) Příklad, kdy bod P je *hraniční* bod i *hromadný* bod množiny $M \subset D_f$ (resp. $D_f = M$) a je nutno hledat na jeho okolí $M \cap \mathcal{O}^*(P)$ (resp. $D_f \cap \mathcal{O}^*(P)$) lokální extrémy, procvičíme zejména u tzv. *vázaných* lokálních extrémů.

- e) Je-li bod P *izolovaný* bod množiny $M \subset D_f$ (tj. i její *hraniční* bod), jde o „nezájímavou situaci“.⁹⁰⁾

- f) Připomeňme (Viz 5.4.19 části h)), že bod P , v němž je gradient (diferencovatelné) funkce f nulový, tj.

$$\nabla f(P) = \vec{0} \text{ neboli } f'_{x_1}(P) = 0, \dots, f'_{x_n}(P) = 0,$$

se nazývá **stacionární bod funkce**. Pro f diferencovatelnou ve stacionárním bodě P je ovšem též

$$df(P) = 0.$$

- g) **Sedlový bod funkce** je stacionární bod P definičního oboru D_f funkce f (tj. jsou v něm všechny její parciální derivace rovny nule), v němž nenastává lokální extrém. **Sedlo funkce** f je bod $(P, f(P))$ grafu f odpovídající bodu P , v němž je sedlový bod. Např. funkce $z = y^2 - x^2$ z příkladu 4.1.8 na str. 60 má v počátku $(0, 0)$ sedlový bod se sedlem $(0, 0, 0)$. Všimněme si, že v sedlovém bodě je $f'_x(0, 0) = 0 = f'_y(0, 0)$. Obvykle oba termíny příliš nerozlišujeme.

- h) Připomeňme, že podle 4.6.11 postačující podmínku pro existenci globálních extrémů funkce uvádí

(Zobecněná) 2. Weierstrassova věta: Nechť f je funkce n proměnných, která je **spojitá** na neprázdné **kompaktní** množině $\bar{M} \subset \mathbb{E}_n$ (neboli uzavřené a ohraničené). Potom existuje (globální) maximum a minimum funkce na množině \bar{M} . Tedy je-li množina M jen uzavřená a není ohraničená, např.

$$M = \bar{M} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = x\},$$

tj. jde o symetrálu 1. a 3. kvadrantu, pak je na M např. funkce $z = f(x, y) = x + y$ (jejímž grafem je rovina) neohraničená shora i zdola, takže na M nemůže mít ani globální maximum ani globální minimum. Podobně, je-li M jen ohraničená a není uzavřená, např.

$$M = (0, 1) \times (0, 1),$$

pak na tomto otevřeném čtverci M též funkce $z = x + y$ evidentně globálních extrémů nenabývá (dokonce ani lokálních). Zato na čtverci $\bar{M} = [0, 1] \times [0, 1]$, který je množinou kompaktní, má v jeho hraničním bodě $(1, 1)$ největší hodnotu $f_{\text{max}}(1, 1) = 2$, a v hraničním bodě $(0, 0)$ má globální minimum s hodnotou $f_{\text{min}}(0, 0) = 0$.

Závěr: Na nekompaktních množinách extrémy funkcí nemusí existovat.

⁹⁰⁾ Funkce f má v izolovaném bodě automaticky ostré lokální minimum i ostré lokální maximum (a tedy také (neostře) lokální minimum i (neostře) lokální maximum).

5.7.4 (Zobecněná) Fermatova⁹¹⁾ věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Má-li funkce n proměnných $f(X)$ ve vnitřním bodě $P = (p_1, \dots, p_n)$ definičního oboru D_f lokální extrém a existují-li v P všechny první parciální derivace, potom je gradient funkce v bodě P nulový, tj.

$$\nabla f(P) = \vec{0} \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

(tedy P je nutně stacionární bod). ★

Důkaz: Z předpokladů vyplývá, že pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ má funkce jedné proměnné $\varphi_k(x_k) = f(p_1, \dots, p_{k-1}, x_k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ v bodě p_k lokální extrém, přičemž platí vztahy

$$\varphi'_k(p_k) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_k}(P),$$

a ty jsou ekvivalentním zápisem vztahů z tvrzení dokazované věty. ♣

5.7.5 Důsledek (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Má-li funkce n proměnných $f(X)$ ve vnitřním bodě P definičního oboru D_f lokální extrém a je v P diferencovatelná, potom pro každý nenulový přírůstkový vektor $\vec{h} \in \mathbb{V}_n$ platí

$$df(P, \vec{h}) = 0 \quad \text{neboli} \quad \nabla f(P) = \vec{0} = (0, \dots, 0).$$

(Tedy P je nutně stacionární bod diferencovatelné funkce)⁹²⁾

5.7.6 První poznámka o hledání bodů podezřelých z extrémů Má-li f uvnitř D_f lokální extrém, pak (podle předešlého důsledku) buď

- 1) jde o *stacionární bod* funkce f nebo
- 2) f v tomto bodě *není diferencovatelná* (to se obecně obtížně ověřuje, a je nutné postupovat případ od případu), což konkrétně např. znamená, že v něm *neexistuje alespoň jedna* z 1. parciálních derivací f'_{x_i} , $i = 1, \dots, n$ (tj. *neexistuje* v něm ani *gradient* funkce ∇f), přičemž žádná ze zbývajících 1. parciálních derivací, která existuje,⁹³⁾ není různá od nuly, tj. je nulová (Uvedené situaci vyhovuje příklad *sedlové střechy* $z = 1 - |y|$, kde v počátku $O = (0, 0)$ neexistuje $z'_y(O)$ a $z'_x(O) = 0$).

Platí totiž následující věta, jejíž důkaz i geometrický význam je analogií funkce jedné proměnné.

5.7.7 Věta (Kritérium neexistence extrému) Existuje-li v bodě $A = (a_1, \dots, a_n)$ definičního oboru D_f funkce $f(X)$ n proměnných aspoň jedna z jejích 1. derivací $f'_{x_i}(A)$ ($1 \leq i \leq n$), která je různá od nuly, potom f nemá v A lokální extrém (ostrý ani neostrý). ★

5.7.8 Příklad Funkce $z = |x| + |y|$, jejíž část grafu připomíná plochu *násypky* ve tvaru pláště převrácené pyramidy,⁹⁴⁾ viz obr. 5.14, není v počátku $O = (0, 0)$ diferencovatelná a má v O ostré lokální minimum. V O neexistuje ani $z'_x(O)$ ani $z'_y(O)$ (avšak existují všechny směrové derivace funkce v O).

5.7.9 Druhá poznámka o hledání bodů podezřelých z extrémů Body z definičního oboru D_f funkce f (popř. uvažujeme jen nějakou množinu $M \subset D_f$), v nichž může nastat extrém funkce (lokální nebo globální), nazveme *body podezřelé z extrémů*, stručně *podezřelé body* funkce f a budeme je označovat P , tak jak doposud (někdy se nazývají *kritické body*, z anglického *critical points*). Podle předešlé věty

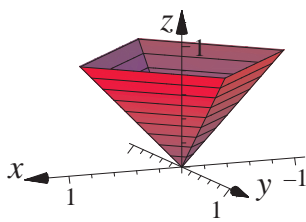
⁹¹⁾ V klasické Fermatově větě pro $f(X)$ je silnější předpoklad, že f je *spojitě* diferencovatelná, tj. je z třídy C^1 na okolí $O(A)$ bodu A , přičemž u funkce jedné proměnné $f(x)$ tomu odpovídá předpoklad, že v bodě a existuje $f'(a)$;

Pierre de Fermat (1601–1665), francouzský matematik, zakladatel algebraicky pojaté analytické geometrie. Tzv. **Velká Fermatova věta**: *Rovnice $a^n + b^n = c^n$ nemá v oboru přirozených čísel pro $n > 2$ řešení*, vyslovená Fermatem v r. 1637, o níž velký německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777–1855) svého času prohlásil, že jde o neřešitelný problém, byla po více než 350 letech dokázána. Angličan Andrew John Wiles (čti: *wilis*) (1953–), absolvent univerzit v Oxfordu a Cambridge odstranil v r. 1994 poslední nedostatky svého důkazu z r. 1993 a jeho článek s historickým důkazem Velké Fermatovy věty „Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem“ vyšel v r. 1995 v *Annals of Mathematics*.

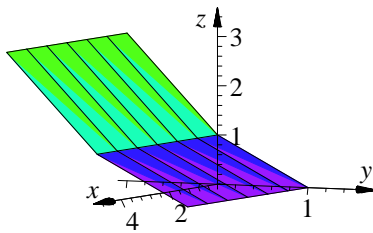
⁹²⁾ Připomeňme, že když $f(X)$ je funkce diferencovatelná v bodě A , pak v A existuje tečná rovina (resp. nadrovina, v případě tří a více proměnných), která je nutně v bodě lokálního extrému kolmá na osu funkčních hodnot.

⁹³⁾ tj. je to derivace vlastní neboli konečná

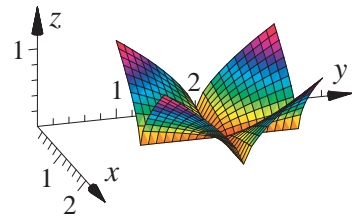
⁹⁴⁾ tj. pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu



Obr. 5.14 „Násypka“



Obr. 5.15



Obr. 5.16

Podezřelé body P jsou

- 1) všechny **vnitřní body** P definičního oboru D_f (neboli $P \in D_f^\circ$, kde D_f° je *vnitřek množiny*⁹⁵⁾ D_f), které jsou
 - a) **stacionární** nebo
 - b) v nichž **není funkce diferencovatelná** (podrobněji viz část 2) poznámky 5.7.6)
- 2) všechny **hraniční body** P uzavřeného definičního oboru (neboli $P \in \partial D_f$, kde ∂D_f je *hranice množiny* D_f). Hledání lokálních extrémů na uzavřených množinách D_f , popř. $M \subset D_f$ vede na hledání tzv. **vázaných lokálních extrémů**.

5.7.10 Příklad a možnost použít směrové derivace k určování extrémů Funkce

$$z(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(|y| - 3y) = \begin{cases} 1 - y & \text{pro } y \geq 0 \\ 1 - 2y & \text{pro } y < 0 \end{cases}$$

má graf, který ze zmíněné sedlové střechy $f(x, y) = 1 - |y|$ (v příkladu na str. 102) vznikne dostačujícím otočením její části definované nad 3. a 4. kvadrantem kolem hřebene střechy ve směru osy z . Graf také připomíná otevřený sešit s nadzvednutým levým okrajem, viz obr. 5.15. Např. v počátku $O = (0, 0)$ neexistuje $z'_y(O)$ a $z'_x(O) = 0$. Přestože u této funkce, která není diferencovatelná, je bod O podle předešlé poznámky podezřelý bod, není v něm lokální extrém. Určeme některé směrové derivace v O .

$\frac{\partial z}{\partial j}(O) = \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{z(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \cos \beta) - z(x_0, y_0)}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{1 - (0 + \varrho \cos \beta) - 1 + 0}{\varrho} = -\cos \beta = -\cos 0 = -1$, takže funkce klesá v kladném směru osy y (v okolí bodu O), $\frac{\partial z}{\partial(-j)}(O) = \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \frac{1 - 2(0 + \varrho \cos \beta) - 1 + 0}{\varrho} = -2 \cos \beta = -2 \cos \pi = 2$, takže funkce roste v záporném směru osy y . Dále je $\frac{\partial z}{\partial i}|_O = \frac{\partial z}{\partial(-i)}|_O = -\cos \beta = -\cos \frac{\pi}{2} = 0$, takže funkce je v kladném i záporném směru osy x konstantní.

Příklad naznačuje, že

k určování podmínek pro existenci extrémů funkce lze u funkcí, jež nejsou diferencovatelné, použít směrové derivace funkce, které vystihnou lokální vlastnosti funkcí (není-li jednodušší postupovat podle definice extrémů, tj. přímo vyšetřovat funkční hodnoty v okolí bodu).⁹⁶⁾

Tvrzení (Postačující podmínka): *Existují-li ve vnitřním bodě P definičního oboru spojité funkce $f(X)$ všechny její směrové derivace,⁹⁷⁾ které jsou kladné (resp. záporné), funkce má v bodě ostré lokální minimum (resp. maximum).*

Uvedenému tvrzení vyhovuje předešlý příklad s *násypkou*.

5.7.11 Věta (Kritérium existence lokálního extrému) Nechť má funkce $f(X)$ ve svém stacionárním bodě $P \in \mathbb{E}_n$ (tj. $df(P, \vec{h}) = 0$) druhý totální diferenciál $d^2f(P, \vec{h})$ s nenulovým přírůstkovým vektorem $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}_n$, kde \mathbb{V}_n je zaměření prostoru \mathbb{E}_n . Jestliže

⁹⁵⁾ je množina všech vnitřních bodů, viz 3.3.8

⁹⁶⁾ Funkce z příkladu 5.7.10 nemá v O extrém. V jeho okolí jsou jak menší, tak větší hodnoty, neboť

$$\begin{aligned} f(0, y > 0) - f(0, 0) &= 1 - y - 1 = -y < 0 & \Rightarrow f(X) < f(O), \\ f(0, y < 0) - f(0, 0) &= 1 - 2y - 1 = -2y > 0 & \Rightarrow f(X) > f(O). \end{aligned}$$

⁹⁷⁾ Přitom nemusí existovat žádná její parciální derivace, a tedy funkce nemusí být diferencovatelná.

- (1) $d^2 f(P, \vec{h}) > 0 \forall \vec{h} \in \mathbb{V}_n$, pak v P je **ostré lokální minimum**
 (2) $d^2 f(P, \vec{h}) < 0 \forall \vec{h} \in \mathbb{V}_n$, pak v P je **ostré lokální maximum**

a existují-li (nenulové) vektory \vec{h}_1, \vec{h}_2 tak, že

- (3) $d^2 f(P, \vec{h}_1) \cdot d^2 f(P, \vec{h}_2) < 0$, pak v P **není lokální extrém, ale sedlo**. ★

Důkaz: je založen na Taylorově větě o mocninném rozvoji funkce $f(X)$.

5.7.12 Hessova matice druhých derivací, hessián Druhý totální diferenciál funkce f v bodě P je výhodně vyjádřit v maticovém tvaru (vektor $\vec{h} \in \mathbb{V}_n$ nechť je opět řádkový vektor)

$$d^2 f(P, \vec{h}) = (h_1, h_2, \dots, h_n) \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} & \cdots & f''_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_1 x_n} & f''_{x_2 x_n} & \cdots & f''_{x_n x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad (5.105)$$

neboli stručně $d^2 f(P, \vec{h}) = \vec{h} \mathbf{H} \vec{h}^T$, kde čtvercová matice \mathbf{H} řádu n , podrobněji označená $\mathbf{H}(P)$ a sestavená z druhých parciálních derivací, která je v bodě P **symetrická** z důvodu záměnnosti smíšených derivací (podle tvrzení v 5.6.4, když f je k -krát diferencovatelná v P nebo je dokonce třídy C^k v bodě P), takže pro její prvky h_{ij} platí $h_{ij} = f''_{x_i x_j}, h_{ij} = h_{ji}, 2h_{ij} = h_{ij} + h_{ji}$, se někdy nazývá **Hessova**⁹⁸⁾ **matice** funkce f . Její determinant n -tého stupně se nazývá **hessián** a v bodě P jej označíme $H_n(P)$.

Maticové vyjádření je vlastně jen jiný zápis totálního diferenciálu 2. řádu jako kvadratické formy $q(\vec{h})$ nad \mathbb{V}_n , tj. n -ární kvadratické formy n proměnných h_1, \dots, h_n , které jsou souřadnicemi přírůstkového vektoru \vec{h} , tj.

$$q(\vec{h}) = d^2 f(P, \vec{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{x_i x_j}(P) h_i h_j = \sum_{i=1}^n f''_{x_i x_i}(P) h_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} f''_{x_i x_j}(P) h_i h_j \quad (5.106)$$

a hovoříme o **kvadratické formě generované symetrickou maticí**.

5.7.13 Poznámka V algebře se definuje **reálná n -ární kvadratická forma** jako homogenní (tj. bez absolutního členu i lineárních členů) polynom 2. stupně o n proměnných h_1, \dots, h_n

$$q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} h_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_{ij} h_i h_j = \vec{h} \mathbf{A} \vec{h}^T, \quad (5.107)$$

kde $a_{ij} = a_{ji}, 2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ jsou daná čísla, která tvoří prvky **symetrické matice \mathbf{A}** . Protože pro nulový vektor $\vec{o} = (0, \dots, 0)$ jsou všechny kvadratické formy $q(\vec{h}), \vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}_n$ nulové, tj. $q(\vec{o}) = 0$, dělíme je podle toho, jakých hodnot nabývají pro vektory $\vec{h} \neq \vec{o}$ s využitím členění předešlé věty na tyto druhy:

- (1) Forma $q(\vec{h})$ je **pozitivně definitní**, když $q(\vec{h}) > 0 \forall \vec{h} \neq \vec{o}$.
- (2) Forma $q(\vec{h})$ je **negativně definitní**, když $q(\vec{h}) < 0 \forall \vec{h} \neq \vec{o}$.
- (3) Forma $q(\vec{h})$ je **indefinitní**, když $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{o} \exists \vec{h}_2 \neq \vec{o} : q(\vec{h}_1) \cdot q(\vec{h}_2) < 0$.⁹⁹⁾
- (4) Forma je
 - (a) **pozitivně semidefinitní**, resp.
 - (b) **negativně semidefinitní**, když $q(\vec{h}) \geq 0 \forall \vec{h} \neq \vec{o}$, resp. $q(\vec{h}) \leq 0 \forall \vec{h} \neq \vec{o}$, a když existuje $\vec{h}_1 \neq \vec{o}$ tak, že $q(\vec{h}_1) = 0$ (v obou případech).

Matice \mathbf{A} pozitivně (resp. negativně) definitní kvadratické formy se nazývá **pozitivně** (resp. negativně) **definitní** atd.

⁹⁸⁾Hesse, Ludwig Otto (1811–1874), německý matematik.

⁹⁹⁾Neboli nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.

5.7.14 Poznámka Věta 5.7.11 neříká nic v případě, že $d^2f(P, \vec{h})$ je v P tzv. **semidefinitní kvadratickou formou**, což je případ zahrnující jak (4a), tak (4b) v 5.7.13. V **semidefinitním** případě proto může, ale nemusí nastat lokální minimum, resp. maximum. Tento případ však lze často zodpovědět užitím vyšších derivací (stejně jako u funkcí jedné proměnné, kdy např. funkce $y = x^4$ má v nule ostré lokální minimum a $y = x^3$ tam extrém nemá).

Poznamenejme, že větou 5.7.11 rozhodnuté tři případy odpovídají po řadě tomu, kdy $d^2f(P, \vec{h})$ je kvadratická forma $q(\vec{h})$ pozitivně, resp. negativně definitní, resp. indefinitní.

5.7.15 Příklady definitní a indefinitní kvadratické formy jsou pozitivně definitní forma (nad \mathbb{V}_2) $q_1(\vec{h}) = q_1(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$, negativně definitní forma $q_2 = -h_1^2 - h_2^2$ a indefinitní forma $q_3 = -h_1^2 + h_2^2$ nebo $q_4 = h_1h_2$, jejichž grafům po řadě odpovídají **rotační paraboloid** otevřený ve směru, resp. proti směru osy funkčních hodnot, resp. **hyperbolický paraboloid** (z příkladu 4.1.8, resp. ze cvičení 4.9 [6b]).

5.7.16 Příklady semidefinitní kvadratické formy, kdy extrém může i nemusí nastat Funkce $f(x, y) = (x^2 + 1)y^2$, $g(x, y) = x^3 + y^2$ mají v počátku $O = (0, 0)$ stacionární bod. Forma $q(\vec{h}) = q(h_1, h_2) = 2h_2^2$ je v O pro obě funkce pozitivně semidefinitní, neboť $q(\vec{h}) = 0$ pro $\vec{h} = (h_1, 0) \neq \vec{0}$, je-li $h_1 \neq 0$. Lze ukázat, že pro f je v O neostré lokální minimum, tj. $O = \text{LMIN}$. Funkce g nemá žádný extrém (pro $y = 0$ mění znaménko s proměnnou x).

5.7.17 Určování definitnosti kvadratických forem je v algebre založeno na četných nutných i postačujících podmínkách. K nejoblíbenějším metodám patří převedení symetrické matice A kvadratické formy $q(\vec{h})$ na diagonální matici $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, jejíž prvky λ_i jsou **vlastní čísla** matice A určená z jejího **charakteristického polynomu** $\det(A - \lambda I) = 0$, která jsou **reálná**, neboť A je reálná symetrická matice.

My nyní využijeme známou **Sylvestrovu větu**,¹⁰⁰⁾ nazývanou též **Sylvestrovo kritérium**, neboť jde o **postačující podmínku** k určení definitnosti kvadratické formy $g(\vec{h})$, čehož přímým důsledkem je následující praktická věta k určení znaménka diferenciálu $d^2f(P, \vec{h})$.

5.7.18 Věta – Důsledek Sylvestrova kritéria pro ostrý lokální extrém funkce $f(X)$ Nechť má funkce $f(X)$ ve svém stacionárním bodě $P \in \mathbb{E}_n$ (tj. $df(P, \vec{h}) = 0$, tedy $\nabla f(P) = \vec{0}$) druhý totální diferenciál¹⁰¹⁾ s (nenulovým) přírůstkovým vektorem $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{V}_n$

$$d^2f(P, \vec{h}) = h_{11}h_1^2 + \dots + h_{nn}h_n^2 + 2h_{12}h_1h_2 + \dots + 2h_{n-1n}h_{n-1}h_n = \vec{h}H\vec{h}^T, \quad (5.108)$$

kde H je Hessova symetrická matice funkce f s prvky $h_{ij} = f''_{x_i x_j}(P)$, $h_{ij} = h_{ji}$, $2h_{ij} = h_{ij} + h_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Nechť její základní hlavní subdeterminanty H_k ($k = 1, \dots, n$) konče jejím determinantem n -tého stupně, tzv. hessiánem $H_n(P) = \det H(P)$, jsou

$$H_1 = h_{11}, H_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{vmatrix}, \dots, H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}. \quad (5.109)$$

Potom, jestliže

- (1) $\forall k H_k > 0$, má f v P **ostré lokální minimum**,
- (2) $\forall k H_{2k-1} < 0 \wedge H_{2k} > 0$, má f v P **ostré lokální maximum**,¹⁰²⁾
- (3) $\exists k H_{2k} < 0$, nemá f v P lokální extrém, ale **sedlový bod (sedlo)**,
- (4) $\exists k H_k = 0$, nelze rozhodnout¹⁰³⁾, lokální extrém může i nemusí nastat. ★

5.7.19 Věta – Důsledek Sylvestrova kritéria pro ostrý lokální extrém funkce $f(x, y)$ Nechť má funkce $f(x, y)$ ve svém stacionárním bodě $P \in \mathbb{E}_2$ (tj. $df(P) = 0$, tedy $f'_x|_P = f'_y|_P = 0$) totální diferenciál druhého řádu. Označme H_2 Hessův determinant (hessián) Hessovy matice H sestavené z hodnot druhých

¹⁰⁰⁾Sylvester, James Joseph (1814–1897), anglický matematik.

¹⁰¹⁾nebo nechť f je v P dokonce dvakrát spojitě diferencovatelná neboli f je v okolí $\mathcal{O}(P)$ bodu P třídy C^2

¹⁰²⁾Tj. pro liché k je $H_k < 0$ a pro sudé k je $H_k > 0$.

¹⁰³⁾tímto důsledkem Sylvestrova kritéria, tj. teorie kvadratických forem (tj. i diferenciálů) selhává

derivací funkce f v bodě P , tj.

$$H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P), & f''_{xy}(P) \\ f''_{xy}(P), & f''_{yy}(P) \end{vmatrix}, \text{ a označme } H_1 = f''_{xx}(P).^{104} \quad (5.110)$$

Potom,

je-li $H_2 > 0$, má f v P lokální extrém, a to

- (1) když je $H_1 > 0$, má f v P **ostré lokální minimum**,
- (2) když je $H_1 < 0$, má f v P **ostré lokální maximum**;

je-li

- (3) $H_2 < 0$, nemá f v P lokální extrém, ale **sedlový bod (sedlo)**;
- (4) $H_2 = 0$, nelze rozhodnout, lokální extrém (i neostřý) může i nemusí nastat, existuje-li ale redukované okolí $\mathcal{O}^*(P)$, že pro každý bod $X \in \mathcal{O}^*(P)$ je
 - (a) $H_2(X) > 0$, má f v bodě P **lokální extrém** (jenž určíme z 5.7.21),
 - (b) $H_2(X) < 0$, nemá f v bodě P lokální extrém, ale **sedlový bod (sedlo)**. ★

5.7.20 Poznámka s otázkou Podobně lze doplnit větu pro vyšetřování extrémů ve stacionárních bodech P funkce $f(x, y, z)$. **Otázka:** Můžeme ve větě 5.7.19 místo čísla $H_1 = f''_{xx}(P)$ vzít $H_1^* = f''_{yy}(P)$?

5.7.21 Co v případech, kdy o extrémech podle uvedených vět nelze rozhodnout Postup v podezřelých bodech P naznačíme v řešených příkladech. Např.

- když P je stacionární bod funkce f k -krát diferencovatelné, $k \geq 3$, tj. $df(P) = 0$ a navíc $d^2f(P) = 0$, určujeme znaménko (definitnost) prvního nenulového diferenciálu vyššího řádu (Viz 5.7.14);
- někdy je výhodné použít definici lokálního extrému funkce f a vyšetřovat v okolí P znaménko rozdílu $(f(X) - f(P))$, přičemž f nemusí být diferencovatelná – viz zajímavý příklad 5.7.23;
- u $f(x, y)$ lze navíc prokládat bodem P svazek vhodných křivek, např. přímek a na tomto zúžení funkci f vyšetřovat jako funkci jedné proměnné v okolí P ;
- lze popř. využít matematický software (Maple, Matlab, Mathematica apod.).

5.7.22 Příklad Vyšetřeme lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3x - 2y - 4z - \frac{2}{3}$.
Řešení: Funkce je dvakrát diferencovatelná, neboť je dokonce třídy C^∞ na $D_f = \mathbb{E}_3$. Podezřelé body P zde mohou být jen stacionární body. V nich je gradient funkce nulový, tj. $\nabla f = \vec{0}$. Řešit tuto vektorovou rovnici značí řešit soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x - y + 3 = 0 \\ f'_y &= -x + 2y - 2 = 0 \\ f'_z &= 2z - 4 = 0. \end{aligned}$$

Jediným řešením je bod $P = (-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 2)$. Zda je P bodem lokálního extrému, zjistíme podle důsledku Sylvestrovovy věty určením definitnosti diferenciálu $d^2f(P, \vec{h})$ v P jako kvadratické formy $q(\vec{h})$ nad \mathbb{V}_3 , kde $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3) \neq \vec{0}$, generované symetrickou Hessovou maticí \mathbf{H} funkce f v bodě P s hessiánem třetího stupně $H_3 = \det \mathbf{H}$, jejichž prvky h_{ij} jsou druhé derivace f v P . Máme

$$\begin{aligned} f''_{xx}|_P &= 2, f''_{yy}|_P = 2, f''_{zz}|_P = 2, f''_{xy}|_P = -1, f''_{xz}|_P = 0, f''_{yz}|_P = 0, \\ d^2f(P, \vec{h}) &= q(\vec{h}) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 - 2h_1h_2, \\ h_{11} &= h_{22} = h_{33} = 2, 2h_{12} = -2, \text{ tj. } h_{12} = -1, \text{ ostatní } h_{ij} = 0 \text{ (} i, j = 1, 2, 3 \text{),} \end{aligned}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0, H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, H_1 = 2 > 0.$$

V bodě P má tedy $f(X)$ ostré lokální minimum, tj. $P = \text{LMIN}(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 2)$ s hodnotou $f_{\text{LMIN}} = f(P) = -7$, které je zároveň ostrým globálním minimem f , tj. $f_{\text{LMIN}} = f_{\text{GMIN}}$, neboť další podezřelé body už neexistují (D_f jako neohraničená množina nemá hranici ∂D_f). Maxima funkce neexistují (z téhož důvodu).

Všimneme-li si, že $d^2f(P, \vec{h}) = h_1^2 + h_2^2 + (h_1 - h_2)^2 + h_3^2 > 0 \forall \vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{V}_3$, tj. podle (1) v odstavci 5.7.13 jde o pozitivně definitní formu $q(\vec{h})$ nad \mathbb{V}_3 , plyne existence LMIN opět podle (1) v příslušné větě 5.7.11.

¹⁰⁴⁾Tedy H_1, H_2 jsou opět základní hlavní subdeterminanty Hessovy (symetrické) matice \mathbf{H} .

5.7.23 Příklad Určeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2$.

Řešení: $f \in C^\infty(\mathbb{E}_2)$, tedy f je i dvakrát diferencovatelná na $D_f = \mathbb{E}_2$ a podezřelé body P mohou být jen stacionárními body. V nich je $\nabla f = \vec{0}$ neboli řešením soustavy $\underbrace{f'_x \equiv 2x = 0, f'_y \equiv 0 = 0}$ je každý bod $P^{y_0} = (0, y_0)$, kde $y_0 \in \mathbb{R}$, tedy libovolný bod souřadnicové osy y . Protože hessián z druhých derivací f je

$$H_2(\mathbf{X}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

pro všechny body $\mathbf{X} \in \mathbb{E}_2$, nelze přímo rozhodnout. Zklame nás i druhý diferenciál, protože $d^2f(\mathbf{X}, \vec{h}) = 2h_1^2 \geq 0$ je pozitivně semidefinitní kvadratická forma, neboť $d^2f(\mathbf{X}, \vec{h}) = 0$ pro $\vec{h} = (0, h_2) \neq \vec{0}$, je-li $h_2 \neq 0$. Tedy obě věty 5.7.19 i 5.7.11¹⁰⁵⁾ selhávají. Jelikož i vyšší diferenciály jsou nulové, zkusíme podle 5.7.21 použít definici lokálního extrému. Protože

$$f(\mathbf{X}) - f(P) = f(x, y) - f(0, y_0) = x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x, y) \geq f(0, y_0),$$

nastává ve všech bodech osy y neostré lokální minimum s hodnotou 0, a zároveň i neostré globální minimum, neboť jiné extrémy neexistují. Situace je zřejmá z toho, že grafem funkce je parabolická válcová plocha znázorněná pro 4.2.16 na str. 66.

5.7.24 Příklad extrémů s neexistujícími derivacemi Určeme lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \sqrt[3]{(y-2)^2}$.

Řešení: $D_f = \mathbb{E}_2$, obor hodnot funkce $H_f = [0, +\infty)$.

$$f'_x = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{(y-2)^2}}{\sqrt[3]{x-1}} = 0 \Rightarrow y = 2 \quad (x \neq 1),$$

$$f'_y = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{y-2}} = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (y \neq 2).$$

Protože f nemá 1. parciální derivace na množině \mathcal{P} určené bodem $P = (1, 2)$ a „přímkami“ jej neobsahujícími $p_1 : x = 1 \wedge y \neq 2$, $p_2 : y = 2 \wedge x \neq 1$, není f též na této množině \mathcal{P} diferencovatelná. Mimo \mathcal{P} je všude gradient funkce nenulový, tj. $\nabla f \neq \vec{0}$, neboť obě derivace f'_x, f'_y jako jeho souřadnice nejsou zároveň nulové. Jelikož stacionární body neexistují, zbývá hledat lokální extrémy na „podezřelé“ množině \mathcal{P} , tj. tam, kde neexistuje ∇f , tedy přímo podle definice lokálních extrémů vyšetřovat funkční hodnoty v okolí podezřelých bodů.

Bod P: Zde neexistují obě derivace, extrém může nastat, neboť v redukováném okolí $\mathcal{O}^*(P)$ je

$$f(x, y) - f(1, 2) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \sqrt[3]{(y-2)^2} - 0 \geq 0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) \geq f(P) \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(P),$$

přičemž rovnost nastane jen pro body $\mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(P)$ ležící na přímce p_1 nebo p_2 , tj. v P má f neostré lokální minimum, $P = \text{LMIN}(1, 2)$.

Přímka p_1 : Zde f'_x neexistuje, $f'_y = 0$ a tato nulová derivace signalizuje, že může nastat neostrý extrém. Platí

$$f(x, y) - f(1, y) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \sqrt[3]{(y-2)^2} - 0 \geq 0 \Rightarrow f(\mathbf{X}) \geq f(\mathbf{X}_0) \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(\mathbf{X}_0), \mathbf{X}_0 \in p_1,$$

přičemž rovnost nastane jen pro body $\mathbf{X} \in \mathcal{O}^*(\mathbf{X}_0)$ ležící na p_1 neboli pro body \mathbf{X} z redukováného okolí bodů \mathbf{X}_0 přímky p_1 , tj. v bodech \mathbf{X}_0 přímky p_1 má f neostrá lokální minima. Přímka $p_1 = \{\text{LMIN}(1, y) \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ doplněná o bod P je tzv. **hrana minima**.

Přímka p_2 : Zde f'_y neexistuje, $f'_x = 0$ a zcela analogicky zjistíme, že v bodech \mathbf{X}_0 přímky p_2 má f neostrá lokální minima, tj. p_2 vč. bodu P je též **hrana minima**. Zároveň v bodech množiny $\mathcal{P} = \{P\} \cup p_1 \cup p_2$ nastávají i globální minima. Maxima funkce neexistují (Viz obr. 5.16 na str. 124).

Přímky p_1, p_2 s bodem P tvoří **osový kříž** (bodů neostrých lokálních i globálních minim), na němž funkce není diferencovatelná, tj. v jeho bodech neexistují tečné roviny.

5.8 Vázané extrémy funkce

5.8.1 Pojem vázaného (též podmíněného) extrému ať **lokálního** nebo **globálního** dané funkce $f(\mathbf{X})$ n argumentů se v inženýrských výpočtech objevuje tehdy, hledají-li se extrémy vázané k nějaké podmínce, popř. podmínkám, které popisují danou množinu M , a které se nazývají **vazba**. Jde tedy o **extrémy na (vzhledem k) množině M** definované v 5.7.1 a 5.7.2. Mluvíme o **vázaných extrémech funkce f na (vzhledem k) vazbě M** . Není-li $M \subset D_f$, pak uvažujeme všude místo M jen společné body $M \cap D_f$.

¹⁰⁵⁾jak důsledek Sylvestrovy věty pro $f(x, y)$ využívající hessián, tak věta o postačující podmínce využívající znaménka druhého diferenciálu

Jinak řečeno, jde o hledání (volných) extrémů zúžení $f|_{M \cap D_f}$ funkce f na množinu $M \cap D_f$. Podmínek vazby bude m , kde $m < n$. Budeme je zapisovat ve tvaru

$$g_1(\mathbf{X}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{X}) = 0 \text{ nebo vektorově } \vec{g}(\mathbf{X}) = \vec{0}, \quad (5.111)$$

což je systém m rovnic (obecně nelineárních) a uvažujme, že vektory jsou sloupcové, tj.

$\vec{g}(\mathbf{X}) = (g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X}))^T$. Platí

$$M = \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_1(\mathbf{X}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{X}) = 0, m < n\}, \quad (5.112)$$

stručněji

$$M = \bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_i(\mathbf{X}) = 0\}. \quad (5.113)$$

5.8.2 Poznámka k průniku ploch Např. množina bodů $\{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_1(\mathbf{X}) = 0\}$ může představovat nadplochu v \mathbb{E}_n dimenze $(n - 1)$. Průnik množin

$$\{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_1(\mathbf{X}) = 0\} \cap \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_2(\mathbf{X}) = 0\}$$

je již v \mathbb{E}_n útvar o dimenzi $(n - 2)$ atd. **Množina M je** pak v \mathbb{E}_n $(n - m)$ -**dimenzionální plocha.**

5.8.3 Intermezzo k přibližnému řešení soustav nelineárních rovnic v inženýrské praxi V odstavci 5.8.1 jsme se zmínili o soustavě nelineárních rovnic. Interpretujeme-li neznámé, jak je obvyklé, jako sloupcový vektor \vec{x} , tj. $\vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_n$, a stejně tak i ostatními vektory, a omezíme se na nejčastější případ n rovnic o n neznámých x_1, \dots, x_n ($n \geq 2$)

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, g_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (5.114)$$

přičemž položíme $\vec{g}^T = (g_1, \dots, g_n)^T$, $g_i = g_i(x_1, \dots, x_n) = g_i(\vec{x})$, ($i = 1, \dots, n$), $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$, můžeme předešlou **soustavu nelineárních rovnic** psát vektorově

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}. \quad (5.115)$$

Přibližné řešení této **nelineární vektorové rovnice** provádíme numericky na počítači **zobecněnou iterační metodou**, která je lokální, tj. dává řešení ve tvaru konvergentní posloupnosti (n -tic neboli) vektorů $({}^k x_1, {}^k x_2, \dots, {}^k x_n)^T = {}^k \vec{x}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ za předpokladu, že nultá (tj. výchozí či počáteční) iterace ${}^0 \vec{x} = ({}^0 x_1, \dots, {}^0 x_n)^T$ je dostatečně blízko hledaného řešení \vec{x} . Přitom ${}^0 \vec{x}$ se určuje odhadem založeným často na znalosti oboru hodnot souřadnic x_1, \dots, x_n nebo na znalosti geometrické či inženýrské povahy výchozího modelu úlohy.

Klíčovým předpokladem řešitelnosti nelineární soustavy rovnic $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ je, aby souřadnicové funkce $g_i(x_1, \dots, x_n)$ měly na nějaké oblasti Ω , v níž hledáme řešení \vec{x} , spojitě 1. parciální derivace podle x_1, \dots, x_n , tj. $g_i \in C^1(\Omega)$ a aby determinant **Jacobiovoy**^{106) **matice funkcí** g_1, \dots, g_n (čti: **jakobiovy**)}

$$\mathbf{J}(\vec{x}) \equiv \mathbf{J}(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

nazývaný stručně **jacobián** (jakobián) a označovaný $\det \mathbf{J} \equiv \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \equiv J$ byl nenulový, tj. $J \neq 0$, na oblasti Ω (O jacobiánu zobrazení viz **IP**, odstavec s názvem **Jacobián zobrazení**).

Speciálním případem zobecněné iterační metody je (zobecněná) **Newtonova-Raphsonova metoda tečen** pro $(k + 1)$ -ní iteraci¹⁰⁷⁾

$${}^{k+1} \vec{x} = {}^k \vec{x} - \mathbf{J}^{-1}({}^k \vec{x}) \vec{g}({}^k \vec{x}), \quad (5.117)$$

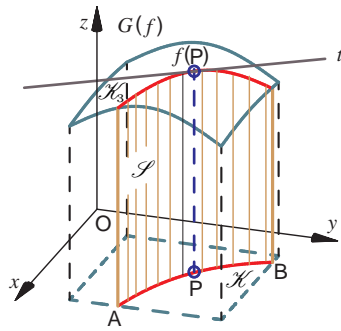
vyjádřenou pomocí inverzní Jacobiovoy matice \mathbf{J}^{-1} v k -té iteraci ${}^k \vec{x}$. [Je to analogie $(k + 1)$ -ní iterace x_{k+1} jedné (skalární) rovnice $g(x) = 0$ (kdy je $n = 1$), pro niž v tomto jednorozměrném případě platí

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \text{ je-li } g'(x) \neq 0 \text{ na intervalu } G.]$$

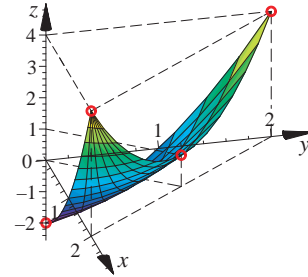
Poznamenejme, že činí-li výpočet derivací Jacobiovoy matice potíže, popř. není zaručen dobrý odhad nulté iterace ${}^0 \vec{x}$, pak je vhodnější zvolit **metodu sečen**, přestože její konvergence k přesnému řešení je pomalejší. Z dalších metod jmenujme **metodu vloženého parametru** a **gradientní metody**.

¹⁰⁶⁾ Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851), německý matematik, zakladatel teorie implicitních funkcí.

¹⁰⁷⁾ Mimoходом, v praxi se $(k + 1)$ -ní iterace počítá nikoli podle následujícího vzorce, jenž uvádíme pouze kvůli porovnání, nýbrž ze vzorce, kde se nepoužije inverzní matice \mathbf{J}^{-1} , ale jen \mathbf{J} .



Obr. 5.17 Vázaný extrém



Obr. 5.18

5.8.4 Geometrická interpretace vázaného extrému pro diferencovatelnou funkci $f(X) = f(x, y)$ v každém bodě $P = (x_0, y_0)$ množiny M určené vazbou $g(x, y) = 0$ a pro situaci, že P bude např. **bodem vázaného lokálního maxima**, tj. $P = \text{VLMAX}(x_0, y_0)$, funkce f s grafem $G(f)$, je následující. Vazbou určená množina M může být rovinnou křivkou $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_2$ (Viz obr. 5.17). Platí totiž $g(P) = 0$, a je-li např. $g'_y(P) \neq 0$, pak podle věty (str. 113) o existenci implicitní funkce existuje okolí $\mathcal{O}(P)$, na němž je rovnicí $g(x, y) = 0$ dána implicitní funkce $y = \varphi(x)$, jejíž graf, tj. křivka \mathcal{K} , prochází bodem P . Bodům $X = (x, y)$ křivky \mathcal{K} odpovídají na ploše $G(f)$ body $(x, y, f(x, y))$ tvořící *prostorovou křivku* $\mathcal{K}_3 \subset \mathbb{E}_3$. Ta má v bodě $(x_0, y_0, f(P))$ lokální extrém, zde **lokální maximum**, a existuje-li v tomto bodě tečna t ke křivce \mathcal{K}_3 , pak je rovnoběžná s rovinou xy .

Poznamenejme, že za uvedených předpokladů je vazbou $g(x, y) = 0$ v \mathbb{E}_3 určena také kolmá **válcová** (též **přímková**) **plocha** \mathcal{S} (s řídicími přímkami kolnými k rovině xy), takže $\mathcal{K}_3 = G(f) \cap \mathcal{S}$.

Říkáme, že funkce f má v bodě P **ostré vázané lokální maximum**, resp. **minimum na vazbě** M , platí-li

$$f(X) < f(P) \text{ resp. } f(X) > f(P) \quad \forall X \in \mathcal{O}^*(P) \cap M.$$

5.8.5 Příklad převedení vázaného extrému na volný Určeme rozměry bazénu tvaru kvádru tak, aby při daném objemu V byla spotřeba materiálu (barvy, obkladu apod.) na údržbu jeho vnitřních stěn minimální.

Řešení: Povrch S bazénu určující spotřebu materiálu na bazén o rozměrech dna x, y a hloubce z je

$$S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz = xy + 2(x + y)z$$

a my hledáme jeho minimum. Protože objem bazénu je $V = xyz$, kde $x > 0, y > 0, z > 0$, je vazba dána ve tvaru

$$V - xyz = 0, \text{ tj. } g(x, y, z) = 0.$$

Zde je $m = 1, n = 3$, tedy je splněna podmínka $m < n$.

Naštěstí lze z vazby kteroukoli z proměnných vyjádřit explicitně. Protože např. $z = \frac{V}{xy}$, převedeme úlohu hledat vázaný extrém funkce $S(x, y, z)$ na úlohu hledat (volný) extrém funkce σ jen dvou proměnných x, y

$$\sigma(x, y) = S(x, y, \frac{V}{xy}) = xy + 2V(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}).$$

Hledejme lokální extrémy. Pak $\nabla\sigma = \vec{0}$, jestliže

$$\sigma'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \wedge \sigma'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0.$$

Řešením tohoto nelineárního systému rovnic¹⁰⁸⁾ obdržíme pro stacionární body P vztahy $x^2y = xy^2 = 2V$, tj. $x = y > 0, x(x^3 - 2V) = 0$, a odtud $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}, z_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$, tedy $P = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$.

Pro určení typu lokálního extrému v bodě P pomocí důsledku Sylvestrové věty s využitím hessiánu H_2 vyčíslíme derivace

$$\sigma''_{xx}|_P = h_{11} = H_1 = (4V)/(2V) = 2, \sigma''_{xy}|_P = h_{12} = 1, \sigma''_{yy}|_P = 2. \text{ Pak } H_2 = 3.$$

Protože je $H_2 > 0, H_1 > 0$, je v P **ostré lokální minimum**,¹⁰⁹⁾ tj. $P = \text{LMIN}$. Přitom určený minimální povrch bazénu po dosazení je $S(P) = 3\sqrt[3]{(2V)^2}$.

¹⁰⁸⁾Naštěstí jej nemusíme řešit některou zmíněnou numerickou metodou.

¹⁰⁹⁾Příslušná kvadratická forma $k d^2 f(P)$ je v P pozitivně definitní.

Že jde o globální vázané minimum funkce S , plyne z povahy úlohy i z toho, že $\sigma(x, y)$ je definována v otevřené oblasti, kterou je 1. kvadrant roviny \mathbb{E}_2 a má zde jediné lokální minimum.

Ze souřadnic bodu P vidíme, že bazén o objemu V musí mít čtvercové dno o délce strany $\sqrt[3]{2V}$ a poloviční hloubce (např. při objemu bazénu $V = 32 \text{ m}^3$ vychází rozměry jeho dna $x = y = 4 \text{ m}$ a hloubka $z = 2 \text{ m}$).

5.8.6 Jak postupovat ve složitějších případech si naznačíme v následujícím odstavci, kdy si odvodíme pojem *Lagrangeovy funkce* $L(X)$. Ten je klíčový v důležité *metodě Lagrangeových koeficientů (multiplikátorů)* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ nabízející možnost hledat vázané extrémny v případech, kdy neexistuje závislost mezi proměnnými x_1, \dots, x_n umožňující vyšetřovat (volné) extrémny původní funkce nebo kdy tato závislost existuje, ale je komplikovaná.

5.8.7 Lagrangeova funkce L a koeficient λ (případ $m = 1$) Hledejme extrém diferencovatelné funkce $f(x, y)$ s jednou vazbou $g(x, y) = 0$, jíž je určen graf implicitní funkce – křivka \mathcal{K} v daném intervalu. Nechť existuje její parametrické vyjádření – *parametrizace* ve tvaru (bodové) funkce $X = \Phi(t) = (x(t), y(t))$, kde parametr $t \in [a, b]$, tj.

$$M = \mathcal{K} = \{X(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

Hledáme tedy extrém funkce jedné proměnné t , a to

$$L(t) = f(x(t), y(t)).$$

Ve stacionárním bodě P je $L'(t) = 0$. Podrobněji, v P je $L'(t) = \frac{dL}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} = \left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f \cdot \vec{\Phi}'(t) = 0$, což znamená, že vektory ∇f a $\vec{\Phi}'$ jsou v P k sobě kolmé, přičemž $\vec{\Phi}'$ je *tečný vektor* \vec{r}' *křivky*, neboť platí

$$\vec{\Phi}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \vec{r}'(t_0),$$

kde $P = X(t_0)$, $\vec{r}(t)$ je radiusvektor bodu $X(t) = \Phi(t)$. Proto je v bodě P vektor ∇f kolmý ke křivce \mathcal{K} dané vazbou $g(x, y) = 0$, kterou lze chápat jako nulovou vrstevnici funkce g . To však znamená, že vektory ∇f a ∇g jsou kolmé, tedy existuje číslo λ takové, že

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \nabla(f + \lambda g) = \vec{0}.$$

Tuto podmínku lze interpretovat podle zobecněné Fermatovy věty 5.7.4 jako nutnou podmínku lokálního extrémny funkce $L = f + \lambda g$ a obecněji při m vazbách g_1, \dots, g_m pak funkce

$$L(X) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) + \dots + \lambda_m g_m(X), \quad (5.118)$$

která se nazývá *Lagrangeova funkce*. Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ se nazývají *Lagrangeovy koeficienty (též multiplikátory)*. Zobecněním našich úvah se odvodí následující dvě věty.

5.8.8 Věta (o nutné podmínce existence vázaných extrémny metodou Lagrangeových koeficientů) Má-li Lagrangeova funkce $L(X)$ z (5.118) n proměnných příslušná k funkci $f(X)$, kde $1 \leq m < n$, ve svém stacionárním bodě P volný lokální extrém, pak funkce $f(X)$ má na vazbě M z (5.113) v bodě P vázaný lokální extrém. ★

5.8.9 Poznámka Obrácená věta neplatí. To působí potíží v tom, že nemá-li $L(X)$ v bodě A lokální extrém, přesto $f(X)$ může mít na vazbě M v P vázaný extrém. Je-li tedy příslušná kvadratická forma $q(\vec{h})$ druhého diferenciálu $d^2 L(X, \vec{h})$ indefinitní, nemusí to přesto znamenat, že f nemá vázaný extrém v A.

Poznamenejme, že Lagrangeovy koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ určíme řešením soustavy $(n+m)$ rovnic (v obecném případě nelineárních)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1}(X) = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2}(X) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(X) = 0 \quad \text{neboli} \quad \nabla L(X) = \vec{0}, \\ g_1(X) = 0, \dots, g_m(X) = 0 \quad \text{neboli} \quad \vec{g}(X) = \vec{0}, \end{array} \right\} \quad (5.119)$$

o $(n+m)$ neznámých, neboť z ní za jistých předpokladů také určíme ještě i souřadnice stacionárních bodů $P = (p_1, \dots, p_n)$ Lagrangeovy funkce $L(X)$, kterým odpovídá jistá m -tice Lagrangeových koeficientů. Tento postup nazývaný (*Lagrangeova*) *metoda Lagrangeových (neurčitých) koeficientů* umožní v následující větě formulovat také *postačující podmínku* (tj. kritérium) pro existenci vázaných extrémny¹¹⁰.

• Použití metody Lagrangeových koeficientů v případě, kdy vazba M je dána nikoli systémem rovnic, ale i systémem nerovnic, nebudeme studovat.

¹¹⁰ Speciální případ, kdy vazebních rovnic je o jednu méně než proměnných, tj. $m = n - 1$, a k hledání podezřelých bodů P z vázaných extrémny lze použít tzv. *metodu jacobíánu* funkcí f, g_1, \dots, g_{n-1} (tj. nulovosti jacobíánu) na vazbě M , nebudeme rozebírat.

5.8.10 Věta (Kritérium existence vázaných lokálních extrémů) Necht $g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X})$ jsou funkce n proměnných ($1 \leq m < n$) třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{E}_n$. Označme M množinu všech bodů, tzv. vazbu

$$M = \bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n \mid g_i(\mathbf{X}) = 0\}.$$

Necht Jacobiova matice $\mathbf{J}(x_1, \dots, x_n)$ z (5.116) typu (m, n) má na G maximální možnou hodnotu m . Necht $f(\mathbf{X})$ je funkce třídy C^2 na vazbě M a bod $\mathbf{P} \in M$ má následující vlastnosti

- (1) existují Lagrangeovy koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{X})$ z (5.118) tak, že \mathbf{P} vyhovuje soustavě n rovnic

$$\nabla L(\mathbf{X}) = \vec{o} \quad \text{neboli} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} = 0, \end{cases} \quad (5.120)$$

a ovšem též soustavě m rovnic (neboť $\mathbf{P} \in M$)

$$\vec{g}(\mathbf{X}) = \vec{o} \quad \text{neboli} \quad \begin{cases} g_1(\mathbf{X}) = 0, \\ \dots \\ g_m(\mathbf{X}) = 0; \end{cases} \quad (5.121)$$

- (2) kvadratická forma $q(\vec{h}) = d^2L(\mathbf{P}, \vec{h})$ uvažovaná pouze pro přírůstkové vektory¹¹¹

$$\vec{h} \in T = \bigcap_{i=1}^m \{\vec{x} \in \mathbb{V}_n \mid \vec{x} \perp \nabla g_i(\mathbf{P})\} = \bigcap_{i=1}^m \{\vec{x} \in \mathbb{V}_n \mid \vec{x} \cdot \nabla g_i(\mathbf{P}) = 0\} \quad (5.122)$$

je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, resp. indefinitní).

Pak funkce f má v takovém bodě \mathbf{P} ostré vázané lokální minimum (resp. maximum, resp. extrém nemá) na vazbě M . ★

Důkaz: je založen na větě o implicitní funkci.

5.8.11 Poznámka k větě Zúžení prostoru \mathbb{V}_n na tečný podprostor T k vazbě M v bodě \mathbf{P} je pro testování definitnosti kvadratické formy $q(\vec{h})$ příslušné druhému totálnímu diferenciálu $d^2L(\mathbf{P}, \vec{h})$ klíčové. **Kvadratická forma $q(\vec{h})$ může být indefinitní na celém \mathbb{V}_n , ale její zúžení na tečný podprostor T už může být definitní**, jak poznáme v následujícím příkladu.

5.8.12 Příklad Vyšetřeme, zda funkce $f(x, y) = y^2 - x^2$ má na množině

$$M = \{\mathbf{X} = (x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x - e^{-y^2} + 1 = 0\}$$

vázaný lokální extrém.

Řešení: Zde je $m = 1$, máme jednu podmínku vazby M ve tvaru

$$g(x, y) = 0, \quad \text{kde } g(x, y) = x - e^{-y^2} + 1,$$

ze které lze vyjádřit $x(y)$ jako funkci proměnné y a přejít k vyšetřování volných lokálních extrémů funkce $f(x(y), y)$ proměnné y .

Použijeme však metodu Lagrangeových koeficientů. Lagrangeova funkce je

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = y^2 - x^2 + \lambda(x - e^{-y^2} + 1).$$

- (1) Určíme podezřelé body \mathbf{P} funkce L na vazbě M z podmínky (1) předešlé věty. Je to soustava rovnic pro neznámé x, y, λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, & -2x + \lambda &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0, & \text{tj. } 2y + 2\lambda e^{-y^2} &= 0, \\ g(x, y) &= 0, & x - e^{-y^2} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Pro $\lambda = 0$ je $x = y = 0$. Pro $\lambda \neq 0$ máme z první rovnice $x = \frac{\lambda}{2}$, z druhé $e^{-y^2} = -\frac{1}{\lambda}$, a dosazením do třetí získáme kvadratickou rovnici $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, která nemá reálné řešení. Vyhovuje tedy jediný bod $\mathbf{P} = (0, 0)$, kterému přísluší $\lambda = 0$.

¹¹¹ \vec{h} nikoli z celého zaměření \mathbb{V}_n prostoru \mathbb{E}_n , ale jen ty, které patří do (vektorového) podprostoru T , tzv. **tečného podprostoru** dimenze $(n - m)$ k vazbě M neboli do prostoru T všech tečných vektorů k M v bodě \mathbf{P}

- (2) V této druhé části předpokladů věty určíme definitnost $d^2L(P, \vec{h})$ buď rovnou v tečném podprostoru T , jak uvádí věta, popř. v celém \mathbb{V}_2 všech přírůstkových vektorů $\vec{h} = (h_1, h_2) \neq \vec{0}$, což může být snadnější. Testujme nejprve d^2L ve \mathbb{V}_2 . Pak d^2L lze pomocí Hessiany matice \mathbf{H} vyjádřit podle 5.7.12 jako kvadratickou formu $q(\vec{h})$

$$d^2L(P, \vec{h}) = \vec{h}\mathbf{H}\vec{h}^T = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2(h_2^2 - h_1^2) = q(\vec{h}),$$

která je indefinitní (Viz 5.7.13) na \mathbb{V}_2 , neboť může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot. Týž výsledek získáme přímo z důsledku Sylvestrova kritéria 5.7.19, neboť determinant hessiany $H_2 = \det \mathbf{H} = -4 < 0$. Podle 5.8.11 tím vůbec není vyloučeno, že by zde přesto mohl být vázaný extrém. Musíme se proto omezit jen na tečný podprostor T vektorů \vec{h} (Stejně by tomu bylo, kdyby forma $q(\vec{h})$ byla semidefinitní na \mathbb{V}_2). Dál můžeme postupovat dvěma způsoby

- (a) Podmínka pro T je $\vec{h} \perp \nabla g_i(P)$, tj. $\vec{h} \cdot \nabla g_i(P) = 0$ neboli $(h_1, h_2) \cdot (1, 0) = h_1 = 0$, omezíme se tedy v $T = \mathbb{V}_{n-m} = \mathbb{V}_1$ jen na vektory $\vec{h} = (0, h_2) \neq \vec{0}$. Pro ně pak platí

$$d^2L(P, \vec{h}) = (0, h_2)\mathbf{H}(0, h_2)^T = 2h_2^2 = q^*(\vec{h}) = q^*(h_2) > 0.$$

Tato forma q^* je na T pozitivně definitní, takže f má podle předešlé věty v bodě P ostré vázané lokální minimum na vazbě M , tj. píšeme $P = \text{VLMIN}_1(0, 0)$, s hodnotou $f_{\text{VLMIN}_1} = 0$;

- (b) Podmínku (5.122) pro tečný podprostor T všech přírůstkových vektorů vyjádřených nyní pomocí diferenciálů $\vec{h} = (dx_1, \dots, dx_n) \neq \vec{0}$ můžeme přepsat na tvar

$$\vec{h} \in T = \bigcap_{i=1}^m \left\{ (dx_1, \dots, dx_n) \in \mathbb{V}_n \mid \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(P)dx_1 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(P)dx_n = 0 \right\}. \quad (5.123)$$

Každá z těchto m rovnic

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(P)dx_1 + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial x_n}(P)dx_n = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5.124)$$

vznikne vlastně diferencováním každé z m podmínek $g_i(\mathbf{X}) = 0$ vazby M (a je nutnou i postačující podmínkou toho, aby vektor $\vec{h} \in T$, tj. aby patřil do průniku zaměření tečných nadrovin k jednotlivým plochám $g_i(\mathbf{X}) = 0$ v bodě P).

V praxi postupujeme tak, že z (5.124) vypočítáme dx_1, \dots, dx_n jako lineární funkce (formy) $n - m$ proměnných dx_{m+1}, \dots, dx_n a dosadíme za ně do $d^2L(P, dx_1, \dots, dx_n)$, čímž se tento druhý diferenciál stane kvadratickou formou $q^{**}(dx_{m+1}, \dots, dx_n)$ rovněž $n - m$ proměnných, tj. formou na $\mathbb{V}_{n-m} = T$. Při menším počtu proměnných se zároveň snadněji určuje definitnost formy q^{**} .

V našem příkladu je $n = 2$, $m = 1$. Máme jedinou podmínku

$$\vec{h} = (dx, dy) \in T = \{(dx, dy) \in \mathbb{V}_2 \mid g'_x(P)dx + g'_y(P)dy = 0\}.$$

Platí

$$1dx + 0dy = 0 \Rightarrow dx = 0, \text{ tj. } \vec{h} = (0, dy) \neq \vec{0}.$$

Pak na $T = \mathbb{V}_{n-m} = \mathbb{V}_1$ platí $d^2L(P, \vec{h}) = (0, dy)\mathbf{H}(0, dy)^T = 2(dy)^2 = q^{**}(dy) > 0$.

Vidíme, že oba postupy se liší jen formálně (Interpretujte příklad geometricky).

5.8.13 Poznámka k varietám Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ popsaná soustavou m rovnic $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, kde $i = 1, \dots, m$, $1 \leq m < n$, a kde g_1, \dots, g_m splňují jisté předpoklady (jako např. v předešlé větě), kterou jsme nazývali vazbou, je příkladem tzv. $(n - m)$ -**rozměrné variety** v \mathbb{E}_n . Např. jednorozměrná varieta v \mathbb{E}_2 je **rovinná křivka**, jednorozměrná varieta v \mathbb{E}_3 je **prostorová křivka**, dvojrozměrná varieta v \mathbb{E}_3 je **plocha** atd. **Topologická varieta**, krátce **varieta** M dimenze n je prostor (v obecném případě „topologický“), jenž je **lokálně homeomorfní** s \mathbb{E}_n neboli každý jeho bod má okolí homeomorfní s celým euklidovským prostorem \mathbb{E}_n .

5.8.14 Určování globálních extrémů spojitých funkcí více argumentů na kompaktních množinách s hranicí po částech hladkou V praxi je postup zásadně ovlivněn zadáním funkce i množiny. Přesto lze s přihlédnutím k důležitým poznámkám v 5.7.3 dosavadní zkušenosti shrnout do několika kroků. Omezíme se na množiny kompaktní.¹¹²⁾ Budeme předpokládat, že hranice ∂D_f definičního oboru D_f (popř. se uvažuje jen nějaká jeho kompaktní podmnožina) funkce f se skládá z konečně mnoha **hladkých úseků** [tj. grafů popsaných hladkými funkcemi neboli funkcemi třídy aspoň C^1 (Viz definici 5.3.9 na str. 96)].

¹¹²⁾Pouze na nich zaručuje zobecněná Weierstrassova věta (připomenutá ve zmíněných poznámkách pro spojitou funkci) existenci globálních extrémů.

- 1) Stanovíme **podezřelé body** P z (volného) extrému (Viz definici 5.7.9 na str. 123) **ve vnitřku** D_f
 - a) ze **stacionárních bodů** funkce (kde je **gradient funkce nulový**, tj. $\nabla f(P) = \vec{0}$ neboli kde jsou všechny první parciální derivace funkce nulové),
 - b) z bodů, kde **funkce není diferencovatelná**¹¹³⁾ (zjišťujeme proto body, v nichž **neexistuje gradient funkce** $\nabla f(P)$, tj. kde neexistuje aspoň jedna první parciální derivace¹¹⁴⁾, a pokud některá ze zbývajících existuje, pak musí být jen nulová).
- 2) Stanovíme podezřelé body P z (vázaného) extrému **na hladkých úsecích** hranice ∂D_f **metodou Lagrangeových koeficientů** nebo **převedením (je-li možno) na vyšetřování volných extrémů** (využitím jednoduché závislosti mezi argumenty na zmíněných úsecích hranice ke snížení počtu argumentů **dosazením** do zbývajících argumentů nebo **použitím parametrického vyjádření** jednoduchých rovnic na zmíněných úsecích hranic reprezentujících tak hladké úseky vazby).
- 3) Stanovíme podezřelé body P všude, kde **hranice není hladká**, tj. kde jsou tzv. **hroty hranice** (neexistuje zde tečná rovina, speciálně tečna, ke grafu hranice).
- 4) Vypočítáme **funkční hodnoty** ve zbylých podezřelých bodech a z nich **vybereme** největší a nejmenší, což je hledané globální minimum a maximum funkce (nemusí být jediné, ostrých extrémů je však nejvýše spočetně mnoho).

5.8.15 Příklad na hledání globálních extrémů

Najděme globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 2$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 2 - x\}$.

Řešení: Načtneme si M a zjistíme, že jde o pravouhlý rovnostranný trojúhelník v 1. kvadrantu s pravým úhlem při vrcholu ležícím v počátku a odvěsnami o délkách 2 ležícími na souřadnicových osách. M je kompaktní, f je spojitá na M , zobecněná Weierstrassova věta zaručuje existenci aspoň jednoho globálního minima i maxima (zde podrobněji vázaného globálního maxima na vazbě $M \subset D_f$, $D_f = \mathbb{E}_2$).

Pro stacionární body uvnitř M musí být

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 2x - y + 1 = 0 \\ f'_y &= 2y - x + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{vyhovuje bod } (-1, -1) \notin M. \text{ Neexistují stacionární body v } M.$$

Neexistence derivací zde nenastává, neboť f je dokonce třídy C^∞ uvnitř M . Hranici ∂M trojúhelníka tvoří jeho strany, jež jsou hladkými úseky a jeho vrcholy, jež jsou hroty. Nejprve vyšetříme vázané extrémy na jednotlivých stranách bez vrcholů, a to jako volné extrémy. Lze totiž použít dosazení rovnic stran do funkce.

$$\text{Platí } y = 0: \quad f(x, 0) = x^2 + x - 2 \text{ pro } x \in (0, 2), \quad f'_x(x, 0) = 2x + 1, \\ \text{stacionární bod } x = -\frac{1}{2} \notin (0, 2);$$

$$x = 0: \quad f(0, y) = y^2 + y - 2 \text{ pro } y \in (0, 2), \quad f'_y(0, y) = 2y + 1, \\ \text{stacionární bod } y = -\frac{1}{2} \notin (0, 2);$$

$$y = 2 - x: \quad f(x, 2 - x) = 3x^2 - 6x + 4 \text{ pro } x \in (0, 2), \quad f'_x(x, 2 - x) = 6x - 6, \\ \text{stacionární bod } x = 1 \in (0, 2), y = 1. \text{ Protože } f''_{xx} = 6 > 0, \\ \text{máme bod vázaného lokálního minima } \text{VLMIN}(1, 1), f_{\text{VLMIN}} = 1.$$

Funkční hodnoty v hrotech hranice jsou $f(0, 0) = -2$, $f(0, 2) = 4$, $f(2, 0) = 4$. Porovnáním všech čtyř hodnot máme na množině M jediné vázané globální minimum o hodnotě -2 v bodě $\text{VGMIN}(0, 0)$ a dvě vázaná globální maxima o hodnotě 4 v bodech $\text{VGMAX}_1(0, 2)$, $\text{VGMAX}_2(2, 0)$, viz obr. 5.18 na str. 130.

5.9 Cvičení

A) Parciální derivace

1 V počátku $O(0, 0)$ vyčíslete všechny první parciální derivace funkce. Nevedou-li k cíli vzorce pro derivování elementárních funkcí, použijte *zúžení* funkce na příslušnou proměnnou nebo přímo definici derivace jako limity

a) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$

c) $f(x, y) = x\sqrt[3]{y}$

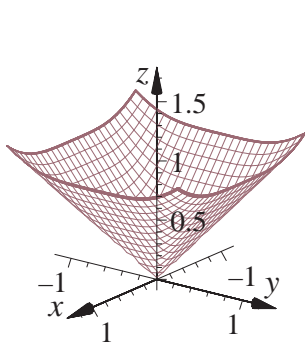
e) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

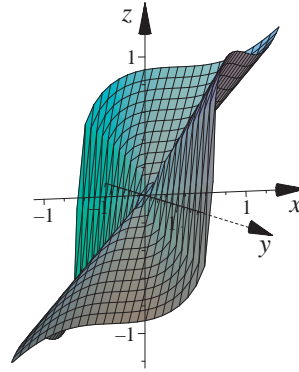
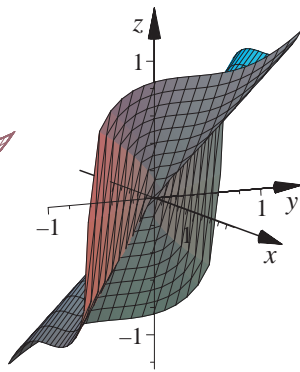
d) $z = |x|y^4$

¹¹³⁾To se obecně obtížně dokazuje, takže zkoumáme porušení nutné podmínky diferencovatelnosti funkce.

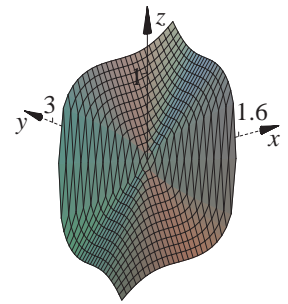
¹¹⁴⁾Patří sem i takové body, pro něž po aplikaci elementárních vzorců pro derivování (vychází např. nula ve jmenovateli) není hned zřejmé, zda jde o derivaci nevlastní (pak zde extrém není) nebo zde derivace neexistuje, a tedy zde extrém může existovat.



Obr. 5.19



Obr. 5.20



- a) $\{\{\text{neexistují, obr. 5.19}\}\}$ c) $\{\{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\}\}$ d) $\{\{z'_x(\mathbf{O}) = z'_y(\mathbf{O}) = 0\}\}$
 b) $\{\{f'_x|_0 = f'_y|_0 = 1, \text{ obr. 5.20}\}\}$ e) $\{\{\text{neexistuje, neboť } \mathbf{O} \notin D_z\}\}$

2 Formálně určete a zjednodušte první parciální derivace následujících funkcí, tedy bez vyšetřování definičních oborů těchto derivací

- a) $z = x^3 - y^2 + 5xy$ $\{\{\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 5x\}\}$
 b) $z = \frac{y}{x}$ $\{\{z'_x = -\frac{y}{x^2}, z'_y = \frac{1}{x}\}\}$
 c) $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ $\{\{z'_x = -\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{y}{x}}, z'_y = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x}{y}}\}\}$
 d) $z = x^y$ $\{\{z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x\}\}$
 e) $z = (x^x)^y = x^{xy}$ $\{\{z'_x = x^{xy}y(\ln x + 1), z'_y = x^{xy}x \ln x\}\}$
 f) $z = x^{(x^y)} = x^{x^y}$ $\{\{z'_x = x^{x^y}x^{y-1}(y \ln x + 1), z'_y = x^{x^y}x^y \ln^2 x\}\}$
 g) $u(t, x, y) = t^{xy}$ $\{\{u'_t = xy t^{xy-1}, v'_x = t^{xy}y \ln t, v'_y = t^{xy}x \ln t\}\}$
 h) $z = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ $\{\{z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}\}\}$
 i) $z = \frac{x-y}{x+y}$ $\{\{z'_x = 2\frac{y}{(x+y)^2}, z'_y = -2\frac{x}{(x+y)^2}\}\}$
 j) $z = \ln \cos \frac{y}{\sqrt{x}}$ $\{\{z'_x = \frac{y}{2x\sqrt{x}} \tan \frac{y}{\sqrt{x}}, z'_y = -\frac{1}{\sqrt{x}} \tan \frac{y}{\sqrt{x}}\}\}$
 k) $u = (xy)^z$ $\{\{u'_x = yz(xy)^{z-1}, u'_y = xz(xy)^{z-1}, u'_z = (xy)^z \ln(xy)\}\}$
 l) $v = e^{\frac{1}{x+y+z}}$ $\{\{v'_x = v'_y = v'_z = -\frac{v}{(x+y+z)^2}\}\}$
 m) $w = \arcsin \frac{z}{x-y}$ $\{\{w'_x = \frac{-z}{(x-y)\sqrt{(x-y)^2-z^2}} = -w'_y, w'_z = \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\sqrt{(x-y)^2-z^2}}\}\}$
 n) $P = \pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$ $\{\{\frac{\partial P}{\partial r_1} = \pi(2r_1 + s), \frac{\partial P}{\partial r_2} = \pi(2r_2 + s), \frac{\partial P}{\partial s} = \pi(r_1 + r_2)\}\}$
 o) $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ $\{\{\frac{\partial V}{\partial r_1} = \frac{1}{3}\pi v(2r_1 + r_2), \frac{\partial V}{\partial r_2} = \frac{1}{3}\pi v(r_1 + 2r_2), \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{V}{v}\}\}$

3 Jaký úhel α svírá s kladnou částí osy x (tj. s kladnou poloosou x) tečna v bodě $\Gamma = (-2, 4, z_0)$ ke křivce, která je řezem plochy **rotačního paraboloidu** $4z = x^2 + y^2$ rovinou $y = 4$?

$$\{\{\tan \alpha = z'_x|_{\Gamma} = \frac{x}{y}|_{-2} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4}\pi\}\}$$

4 Určete rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $z = \sqrt{19 - 2x^2 - y^2}$ (část **elipsoidu** v poloprostoru $z \geq 0$), která je rovnoběžná s rovinou $2x + 4y - z = 0$.

$$\{\{\tau: 2x + 4y - z - 17 = 0, n: x = 1 + 2t, y = 4 + 4t, z = 1 - t, \text{ kde } t \in \mathbb{R}\}\}$$

5 Dokažte, že daná funkce vyhovuje dané parciální diferenciální rovnici (1. řádu) v každém bodě, v němž je daná funkce definována

- a) $z = xy^2, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$ (dokonce v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{E}_2$)
 b) $u = x^3 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2}, x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 3u$
 c) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ d) $z = e^{\frac{x}{y}}, xz'_x + yz'_y = 0$.

B) Diferencovatelné funkce. Diferenciál. Tečná rovina grafu funkce

6 Zjistěte, kde je funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ diferencovatelná, a pak vypočítejte její přírůstek (diferenci) Δf a totální diferenciál df v bodě $\mathbf{A} = (2, -1)$, je-li přírůstkový vektor $\vec{h} = (\Delta x, \Delta y) = (-0,1; -0,2)$.
 $\{\{f \text{ je polynomičká funkce } p_2(x, y) \text{ diferencovatelná všude, neboť je třídy } C^\infty(\mathbb{E}_2); \Delta f = 0,33; df = 0,30\}\}$

7 Určete totální diferenciály následujících funkcí

a) $z = \arctan \sqrt{\frac{x}{y}}$ $\{ dz = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{x+y} (dx - \frac{x}{y} dy) \}$
 b) $z = 10^{xy}$ $\{ dz = (\ln 10) 10^{xy} (y dx + x dy) \}$
 c) $z = \log \sin \frac{y}{x}$ $\{ dz = \frac{1}{\ln 10} \cot \frac{y}{x} (-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy) \}$

8 Středový úhel kruhové výseče $\alpha = \frac{\pi}{6}$ se zvětší o $\Delta\alpha = \frac{\pi}{180}$ (rad). O kolik je nutno přibližně zmenšit poloměr výseče $r = 40$ cm, aby obsah výseče $P = \frac{1}{2}\pi r^2 \alpha$ zůstal stejný? $\{ \text{přibližně o } 6,7 \text{ mm} \}$

9 Doba kmitu (perioda) T matematického kyvadla je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je jeho délka, g je tíhové zrychlení. Stanovte horní odhad velikosti absolutní chyby ΔT i relativní chyby $\frac{\Delta T}{T}$ při výpočtu T , jsou-li známy relativní chyby $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{\Delta g}{g}$ při měření l, g .

$$\{ \Delta T \approx dT = \frac{T}{2} (\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}); \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} (\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}); |\frac{\Delta T}{T}| \leq \frac{1}{2} (|\frac{\Delta l}{l}| + |\frac{\Delta g}{g}|) \}$$

10 Skutečná výtoková rychlost v volně vytékající (nestlačitelné) kapaliny v otevřené nádobě, jejíž obsah S_1 hladiny je mnohem větší než obsah S příčného průřezu výtokového otvoru (tj. $S_1 \gg S$)¹¹⁵⁾ umístěného v hloubce h ve dně nebo stěně nádoby, je μ -násobkem rychlosti dané Torricelliho vzorcem¹¹⁶⁾, tj. $v = \mu\sqrt{2gh}$, kde g je tíhové zrychlení a μ je výtokový součinitel.¹¹⁷⁾ Najděte horní odhad velikosti procentuální relativní chyby $\frac{\Delta v}{v}$ rychlosti v , jestliže veličiny μ , resp. h byly změřeny s relativní chybou 1%, resp. 1%. $\{ 1,5\% \}$

11 Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně

a) $\sqrt{4,97^2 - 3,02^2}$ $\{ 3,95 \}$
 b) $1,01^{0,98}$ $\{ 1,01 \}$

C) Derivace složené funkce. Derivace vyšších řádů. Záměnnost derivací

12 Určete derivaci složené funkce $h(x) = f(g(x))$ s vnější funkcí $f(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2^5 u_3^5$, která je (zobrazením) typu (3, 1) a s vnitřní funkcí typu (1, 3) $g = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = (\sin x, e^{2x}, \ln x)$.
 $\{ h'(x) = e^{4x} \ln^4 x (\cos x \ln x + 4 \sin x \ln x + 5 \frac{\sin x}{x}) \}$

13 Vyjádřete totální diferenciál složených funkcí obsahujících libovolné diferencovatelné funkce f, g, φ

a) $z = f(t), t = 2x - y$ $\{ dz = f'(t)(2dx - dy) \}$
 b) $z = g(\sqrt{x^2 + 3y^2})$ $\{ dz = g' \frac{x dx + 3y dy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \}$
 c) $z = \varphi(u, v), u = x + y, v = xy$. $\{ dz = \varphi'_u (dx + dy) + \varphi'_v (y dx + x dy) \}$

14 S využitím řetězového pravidla suverénně dokažte, že daná funkce, ve které f je libovolná diferencovatelná funkce, vyhovuje dané parciální diferenciální rovnici

a) $z = f(x^2 + y^2), y z'_x - x z'_y = 0$
 b) $z = f(\frac{y}{x}), x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

15 (Obtížnější) Pokuste se určit derivace z'_x, z'_y funkce $z = h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) = u^2 + v^2$, přestože složky $u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)$ jsou dány vztahy $x = ue^v, y = ve^u$, z nichž nelze přímo (explicitně) vyjádřit $u(x, y), v(x, y)$.

Návod: Řetězovým pravidlem určete f'_u, f'_v , odtud vyjádřete neznámé z'_x, z'_y , přičemž dosadíte za f'_u, f'_v .

$$\{ z'_x = 2 \frac{e^u (u - v^2)}{e^{u+v} (1 - uv)}, z'_y = 2 \frac{e^v (v - u^2)}{e^{u+v} (1 - uv)}, \text{ neboť např. } f'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \text{ přičemž } f'_u = 2u \text{ atd.} \}$$

16 Vyjádřete parciální derivace druhého řádu funkcí

a) $f(s, t) = \ln(s - at^2)$ $\{ f''_{ss} = -\frac{1}{(s - at^2)^2}, f''_{tt} = -2a \frac{s + at^2}{(s - at^2)^2}, f''_{st} = f''_{ts} = 2a \frac{t}{(s - at^2)^2} \}$
 b) $z(t, u, v) = t^{\frac{u}{v}}$.
 $\{ z''_{t^2} = \frac{u}{v} (\frac{u}{v} - 1) t^{\frac{u}{v} - 2}, z''_{u^2} = \frac{\ln^2 t}{v^2} t^{\frac{u}{v}}, z''_{v^2} = \frac{u \ln t}{v^3} t^{\frac{u}{v}} (\frac{u \ln t}{v} + 2), z''_{tu} = z''_{ut} = \frac{1}{v} t^{\frac{u}{v} - 1} (\frac{u \ln t}{v} + 1), z''_{tv} = z''_{vt} = -\frac{u}{v^2} t^{\frac{u}{v} - 1} (\frac{u \ln t}{v} + 1), z''_{uv} = z''_{vu} = -\frac{\ln t}{v^2} t^{\frac{u}{v}} (\frac{u \ln t}{v} + 1) \}$

17 Z předešlého příkladu ještě určete derivaci $\frac{\partial^3 z}{\partial t \partial u^2}$ a vypište též ty derivace, které jsou s ní na příslušném definičním oboru záměnné.

$$\{ (\frac{\partial^3 z}{\partial t \partial u^2} \equiv) z'''_{uut} = z'''_{utu} = z'''_{tuu} = \frac{\ln t}{v^2} t^{\frac{u}{v} - 1} (\frac{u \ln t}{v} + 2) \}$$

¹¹⁵⁾ zde se konkrétně předpokládá, viz [2] str. 451, že S_1 je aspoň o jeden řád větší než S

¹¹⁶⁾ $v^* = \sqrt{2gh}$, tj. jako kdyby částice kapaliny spadla volným pádem ve vakuu z výšky h

¹¹⁷⁾ Jeho hodnota pro vodu je 0,6 a obecně závisí na úpravě výtokového otvoru, viskozitě kapaliny atd.

¹¹⁸⁾ To znamená, že např. také funkce $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ definovaná na oblasti neobsahující počátek (0, 0), jejímž grafem je *Plückerův*

konoid, je řešením této rovnice, neboť ji lze uvést na tvar $z = 2 \frac{(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2}$. S funkcí jsme se setkali v 4.8.1 a v 5.1.8.

18 Ukažte, že daná funkce $u(x, t)$ vyhovuje dané parciální diferenciální rovnici (2. řádu)

- a) Podle principu superpozice řešení lineárních úloh jsou malé výchylky u výsledné vlny¹¹⁹⁾ v místě x (zde jediné prostorové proměnné) a čase t šířící se rychlostí c určeny¹²⁰⁾ vztahem, v němž f, g jsou funkce libovolné, avšak v každém bodě (x, t) uvažované rovinné oblasti G třídy C^2

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{jednorozměrná vlnová rovnice})^{121)}$$

- b) $u(x, t) = A \sin(c \cdot kt + \varphi_0) \sin kx$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, kde A, c, k, φ_0 jsou fyzikální konstanty

- c) $z(x, y) = \frac{y}{y^2 - (cx)^2}$ (pro $y^2 - (cx)^2 \neq 0$) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

D) Derivace ve směru. Gradient. Výpočet operátorů teorie pole

19 Trajektorie částice je dána¹²²⁾ vektorovou funkcí $\vec{r}(t) = \vec{i}\sqrt{t} + \vec{j}e^{-t} + \vec{k} \arctan t$. Časovými derivacemi určete její okamžitou rychlost $\vec{v}(t)$ a zrychlení $\vec{a}(t)$ v čase t i jejich limity $\vec{v}(+\infty), \vec{a}(+\infty)$ pro $t \rightarrow +\infty$. Určete tečnu k trajektorii pro $t = 1$.

$$\{\{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, -e^{-t}, \frac{1}{1+t^2}\right), \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{1}{4t\sqrt{t}}, -e^{-t}, \frac{2t}{(1+t^2)^2}\right), \vec{v}(+\infty) = \vec{a}(+\infty) = (0, 0, 0) = \vec{o}. \text{ Tečna: } x = 1 + \frac{u}{e}, y = \frac{1}{e} - \frac{u}{e}, z = \frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}, \text{ parametr } u \in \mathbb{R}\}\}$$

20 Plochu \mathcal{S} pláště **rotačního válce** s osou v ose Oz o poloměru r a výšce h lze v \mathbb{E}_3 zadat pro každý její bod $X = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ třemi skalárními rovnicemi s parametry u, v (vnitřními proměnnými) $x = r \cos u, y = r \sin u, z = v$ nebo přímo vektorovou funkcí¹²³⁾ $\vec{r}(u, v) = \vec{i}r \cos u + \vec{j}r \sin u + \vec{k}v$, kde $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq h$. V bodě $A = (0, r, 0) \in \mathcal{S}$ ležícím na ose Oy určete dva (nekolinéární) tečné vektory, tj. $\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}|_A, \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|_A$, jejich vektorovým součinem normálový vektor $\vec{n}_A = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2$, jeho směr, velikost $\|\vec{n}_A\|$; tvoří $\{\vec{t}_u, \vec{t}_v, \vec{n}_A\}$ v (jako obvykle kladně orientovaném) prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ též kladně (tj. pravotočivě) orientovanou bázi?

$\{\{\text{Bodu } A \text{ v } \mathbb{E}_3 \text{ odpovídá v souřadnicích } u, v \text{ bod } U = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \text{ Pak } \vec{t}_u = \vec{r}'_u(A) = (-r \sin u, r \cos u, 0)|_U = (-r, 0, 0), \vec{t}_v = \vec{r}'_v(A) = (0, 0, 1), \vec{n}_A = r\vec{j} = (0, r, 0) = r(0, 1, 0) \text{ má směr osy } Oy \text{ (tj. míří vně válcové plochy), } \|\vec{n}_A\| = r; \text{ ano tvoří}\}\}$

21 Jakým směrem \vec{u} , resp. \vec{v} o celočíselných složkách se musíme vydat, abychom šli co nejstrměji nahoru, resp. si udrželi stejnou nadmořskou výšku, nacházíme-li se v bodě $A(10, -10, 192)$ hory, která je plochou danou grafem funkce $z(x, y) = 492 - x^2 - 2y^2$? Určeme spád ∇z plochy a jeho velikost (strmost). $\{\{\vec{u} = \frac{\nabla z(A)}{20} = (-1, 2), \vec{v} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \pm(2, 1); \nabla z(A) = 20(-1, 2), \|\nabla z(A)\| = 20\sqrt{5} = \tan \varphi_{\max}$, kde φ_{\max} je odchylka tečny diferencovatelné funkce z obr. 5.3 na str. 100}\}

22 Odůvodněte, že funkce

$$z = 1 + \frac{1}{2}(|y| - 3|y|) = \begin{cases} 1 - y & \text{pro } y \geq 0 \\ 1 - 2y & \text{pro } y < 0, \end{cases}$$

s níž jsme se setkali i v příkladě 5.7.10, není diferencovatelná (a nemá ani gradient) v \mathbb{E}_2 na přímce $y = 0$ (ose Ox), a tedy ani v počátku $O = (0, 0)$. S přihlédnutím k příkladu 5.4.14 vypočítejte derivaci f v O ve směru \vec{s}_1 osy 1. kvadrantu a ve směru \vec{s}_2 osy 3. kvadrantu, a tím zjistěte její růst či klesání přímo limitním vzorcem, neboť nelze užít vzorec s gradientem.

$$\{\{\text{odůvodnění neuvádíme, } \frac{\partial f}{\partial s_1}|_O = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0, \frac{\partial f}{\partial s_2}|_O = \sqrt{2} > 0\}\}$$

23 Vypočítejte derivaci rovinného, resp. prostorového skalárního pole $u(x, y) = x^2 + y$, resp. $v(x, y, z) = x^2y + y^2z$ v bodě A , resp. B daném rádiusvektorem $\vec{r}_A = (2, 1)$, resp. $\vec{r}_B = (1, 1, 1)$ ve směru jednotkového vektoru $\vec{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, resp. $\vec{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ a $\vec{s}_3 = -\vec{s}_2$.

$$\{\{\frac{\partial u}{\partial \vec{s}_1}(A) = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \text{ resp. } \frac{\partial v}{\partial \vec{s}_2}|_B = 0 \text{ a } \frac{\partial v}{\partial \vec{s}_3}|_B = \frac{\partial v}{\partial (-\vec{s}_2)}|_B = -\frac{\partial v}{\partial \vec{s}_2}|_B = 0^{124)}\}\}$$

24 Jaký je v předešlém příkladě diferenciál funkce u , resp. v v bodě A , resp. B , je-li přírůstkový vektor \vec{h} v zadaném směru jednotkový, tj. $\|\vec{h}\| = \|\vec{s}\| = 1$?

$\{\{\text{(bez počítání) jsou rovny směrovým derivacím}\}\}$

¹¹⁹⁾netlumené rovinné příčné (lineární polarizované s výchylkou u např. ve směru osy y) nebo podélné, ať jednoduché nebo jakkoli složené, tedy i stojaté

¹²⁰⁾součtem dílčích výchylek, a to výchylkou f vlny postupující ve směru osy x a výchylkou g vlny šířící se opačným směrem (např. vlivem odrazu vlny) stejnou rychlostí c

¹²¹⁾je *evoluční* rovnici (popisuje časový průběh procesu) *hyperbolického* typu, *lineární*, která modeluje jak malé *příčné* kmity *struny*, tak *podélné* kmity tenké *tyče*, kmitání *vzduchového sloupce* (píšťal ve varhanech), šíření *elektrického signálu* ve vedení atd.

¹²²⁾pomineme-li nezbytné fyzikální konstanty

¹²³⁾rádiusvektorem $\vec{OX} = \vec{r}(u, v)$, jehož koncový bod X je bodem plochy \mathcal{S}

¹²⁴⁾tj. $\frac{\partial v}{\partial \vec{s}_3}|_B$ není nutné znovu počítat podle 5.4.9, ale využijeme vztah (5.52) na str. 101, neboť funkce v je diferencovatelná (dokonce $v \in C^\infty(\mathbb{E}_3)$)

- 25** Určete derivaci skalárního pole $f(x, y, z) = x^3 + y^2z - xyz$ v bodě $A = (2, 1, 1)$ ve směru \vec{s} svírajícím s osou x úhel 60° a s osou y úhel 45° . Pak najděte kosinus úhlu ω gradientu pole f v bodě A se směrem \vec{s} .

$$\{\{\cos \gamma_{1,2} = \pm \frac{1}{2}, \frac{\partial f}{\partial s_1}|_A = 5, \frac{\partial f}{\partial s_2}|_A = 6. \text{ Pak } \cos \omega_1 = \frac{5}{\sqrt{122}}, \cos \omega_2 = \frac{6}{\sqrt{122}}\}\}$$

- 26** Určete stacionární body P diferencovatelné funkce $z = e^{x+3y}(x^2 + 3xy + 3y^2)$, tj. kde je gradient $\nabla z|_P = \vec{0}$. Návod: Soustavu dvou nelineárních rovnic řešte např. tak, že jednu z neznámých vyjádříte z rovnice, která vznikne porovnáním stejných kvadratických výrazů z obou rovnic.

$$\{\{P_1 = (0, 0), P_2 = (1, -1)\}\}$$

- 27** Určete stacionární body P diferencovatelné funkce $z = xy(6 - x - y)$.

$$\{\{P_1 = (0, 0), P_2 = (0, 6), P_3 = (6, 0), P_4 = (2, 2)\}\}$$

- 28** Uveďte, v jaké měřicí jednotce SI jsou konstanty $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ z příkladu 5.4.27 na str. 107.

$$\{\{\lambda_1(\text{kg} \cdot \text{m}^{-5}), \lambda_2(\text{m}^{-2}), \lambda_3(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}), \lambda_4(\text{m}^{-1})\}\}$$

- 29** Rozhodněte, zda, popř. pak na jaké oblasti je polem harmonickým skalární pole $u = xyz$, resp. vektorové pole $\vec{f} = (x^2 - z^2, y^2 - x^2, z^2 - y^2)$.

$$\{\{\text{je v } \mathbb{E}_3, \text{ neboť tam } \Delta u = 0; \text{ je v } \mathbb{E}_3, \text{ neboť tam } \Delta \vec{f} = \vec{0}\}\}$$

- 30** Odvoďte, zda rovinné pole $\frac{1}{r}$ je harmonické.

$$\{\{\text{neuvádíme}\}\}$$

- 31** Vyjádřete $\text{div } \vec{f}$ a $\text{rot } \vec{f}$ vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = \frac{y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ v libovolném bodě $X \neq O$ (různém od počátku), a pak v bodě $A = (1, 1, 1)$. Charakterizujte pole v A .

$$\{\{\text{div } \vec{f} = -\frac{(xy + yz + xz)}{\|\vec{r}\|^3}, \text{rot } \vec{f} = -\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}(x^2 + y^2 + xy, y^2 + z^2 + yz, x^2 + z^2 + xz); \text{div } \vec{f}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0, \text{ tj. v } A \text{ je } \textit{propad}, \text{rot } \vec{f}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \neq \vec{0}, \text{ tj. v } A \text{ je } \textit{vír} \text{ (jehož pravidlem pravé ruky orientovaná osa je souhlasně rovnoběžná se symetrálou 7. oktantu)}\}\}$$

- 32** Stanovte, zda pro skalární pole f platí $\nabla f = \text{div } f$.

$$\{\{\text{neplatí, neboť operátor divergence lze aplikovat jen na vektor}\}\}$$

- 33** Vyjádřete tzv. **biharmonický operátor** $\Delta^2 = \nabla^4$ např. v \mathbb{E}_3 (který se vyskytuje u parciálních diferenciálních rovnic popisujících malé příčné kmity tyče, nosníku či tenké desky).

- 34** Nechť u , resp. \vec{f} označuje skalární, resp. vektorovou funkci třídy C^1 . Přímým výpočtem i použitím rozkladu (dále naznačeného dolními vodorovnými svorkami) podle pravidla

$$\text{div}(u\vec{f}) = u \text{div } \vec{f} + \vec{f} \cdot \nabla u$$

vypočítejte divergenci **pole elektrické indukce** (E je konstantní veličina)

$$\vec{D} = \frac{E}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = \underbrace{\frac{E}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}}_u (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})_{\vec{f}}$$

$$\{\{\text{div } \vec{D} = 0, \text{ je to nezářivé pole}\}\}$$

- 35** Operátorovým počtem dokažte, že pro funkce třídy C^2 platí $\text{rot grad } f = \vec{0}, \text{ div rot } \vec{f} = 0$.

- 36** Je-li možno, rozhodněte, zda rovinné vektorové pole $\vec{f} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 + 2xy)\vec{j}$ je v \mathbb{E}_2 konzervativní (potenciální).

$$\{\{\text{není, je disipativní, neboť } \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}\}\}$$

- 37** Vyšetřete, zda pole $\vec{f} = (\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, 3z)$ je v \mathbb{E}_3 konzervativní.

$$\{\{\text{je, neboť } \mathbb{E}_3 \text{ je jednoduše souvislá oblast a } \text{rot } \vec{f} = \vec{0}, \text{ tj. } \vec{f} \text{ je nevírové pole}\}\}$$

- 38** Je dána oblast $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ a vektorové pole $\vec{f}(X) = (\frac{ax}{x^2 + y^2}, \frac{ay}{x^2 + y^2}, bz)$, kde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Slovně charakterizujte G a zjistěte, zda \vec{f} je konzervativní pole.

$\{\{G \text{ je prostor } \mathbb{E}_3 \text{ bez osy } z \text{ a není to jednoduše souvislá oblast; nelze rozhodnout, ačkoli } \vec{f} \text{ má v } G \text{ spojitě parciální derivace a nutná podmínka konzervativnosti pole } \text{rot } \vec{f} = \vec{0} \text{ platí}^{125}\}\}$

- 39** Zjistěte, zda na téže prostorové oblasti G jako v předešlém příkladě je **pole magnetické intenzity**

$\vec{H} = 2I(\frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j})$ indukované průtokem konstantního proudu I neomezeným lineárním vodičem umístěným v ose z konzervativní pole.

$$\{\{\text{také zde } (G \text{ není jednoduše souvislá oblast) nelze rozhodnout}^{126}\}\}$$

¹²⁵Nemáme prostředky dokázat, že \vec{f} je konzervativní pole, přestože G není oblast jednoduše souvislá.

¹²⁶Pomocí tzv. cirkulace pole \vec{H} budeme moci v \mathbf{IP} ukázat, že \vec{H} není konzervativní, ačkoli $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$. Pole \vec{H} však je konzervativní např. uvnitř prvního oktantu, neboť to už je jednoduše souvislá oblast.

- 40** Vyjděte z *Maxwellových rovnic* pro elektromagnetické pole ve vakuu, které lze v případě vhodné volby jednotek (*přeskálováním*) zapsat ve tvaru

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{E} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (5.125)$$

kde $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, resp. $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ je vektor *intenzity elektrického*, resp. *magnetického (nestacionárního) pole* v bodech (x, y, z, t) , t je čas a c je rychlost světla ve vakuu.

- a) Odvoďte trojrozměrnou *vlnovou rovnici* pro vektor \vec{E} (tj. tři skalární rovnice pro souřadnice E_1, E_2, E_3)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}}, \text{ tj. }^{127)} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_i. \quad (5.126)$$

Návod: Operátor rot aplikujte na 1. rovnici. Pomocí identity

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}}, \quad (5.127)$$

druhé Maxwellovy rovnice a porovnáním vzniklého vztahu s třetí rovnicí derivovanou podle t získáte výsledek. Tuto vlnovou rovnici lze též přepsat do tvaru

$$\square \vec{E} = \vec{o}, \quad (5.128)$$

definujeme-li *d'Alembertův operátor* (čti: *dalambérův*), stručně dalembertián v \mathbb{E}_3

$$\square := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (5.129)$$

- b) Analogicky odvoďte vlnovou rovnici pro vektor \vec{H} $\{\{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{H}\}\}$
 c) Předěšlou identitu (5.127) ukazující, že **nezřídlové a nerotační pole je vždy též Laplaceovo (či harmonické)** (Viz str. 109), dokažte tak, že v kartézských souřadnicích porovnáte obě její strany
 d) Protipříkladem **pole rádiusvektoru** $\vec{r}(X)$ v \mathbb{E}_3 ukažte, že obrácené tvrzení neplatí $\{\{\text{je harmonické, avšak } \operatorname{div} \vec{r} = 3 \neq 0, \operatorname{rot} \vec{r} = \vec{o}\}\}$
 e) Vyjádřete d'Alembertův operátor \square tak, aby obsahoval Hamiltonův operátor ∇ . $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$

E) Implicitní funkce

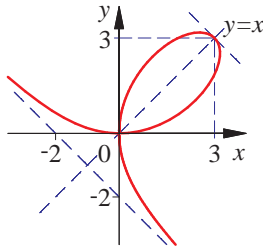
- 41** Pro níže uvažovanou funkci $y = f(x)$ danou implicitně rovnicí $F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 6xy = 0$ [Touto rovnicí, obecněji rovnicí $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a \neq 0$, je v \mathbb{E}_2 určena množina M nazývaná **Descartesův list** (Viz obr. 5.21), který lze vyjádřit též parametricky $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in \mathbb{R}$] a jistým bodem $X_0 = (x_0, y_0)$, tj. $F(X_0) = 0$, určete
- a) nejprve **singulární body S křivky** určené rovnicí $F(x, y) = 0$ (tj. body, v jejichž okolí je F třídy (aspoň) C^1 , $F(S) = 0$ a gradient $\nabla F(S) = \vec{o}$) $\{\{S = (0, 0)\}\}$
- b) **body N** $\in \mathbb{E}_2$, v jejichž okolí neexistuje právě jedna implicitní funkce $y = f(x)$ (Viz 5.5.4d) na str. 114) $\{\{\text{řešením soustavy rovnic } F(x, y) = 0, F'_y(x, y) = 0 \text{ získáme body } N_1 = (0, 0), N_2 = (2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})\}\}$
- c) derivace y', y'' (v obecném bodě) $\{\{y' = -\frac{x^2-2y}{y^2-2x}, y'' = -\frac{2xy}{(y^2-2x)^3}(x^3 + y^3 - 6xy + 8)\}\}$
- d) v okolí kterých bodů a do kterého řádu jsou ještě spojité derivace $f(x)$ $\{\{\text{protože } F \in C^\infty(\mathbb{E}_2), \text{ pak pro každý bod } X_0 = (x_0, y_0) \in M \setminus \{N_1, N_2\} \text{ (přičemž } F(X_0) = 0) \text{ je } F \in C^\infty(\mathcal{O}(X_0)) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathcal{O}(x_0)), \text{ tj. } f(x) \text{ má v jistém okolí příslušných bodů } x_0 \neq 0, x_0 \neq 2\sqrt[3]{4} \text{ spojité derivace všech řádů (je tam hladká nekonečného řádu)}\}\}$
- e) zda $y = f(x)$ je v bodě $X_0 = (3, 3)$ rostoucí a konvexní $\{\{\text{je klesající } (y' = -1) \text{ a konkávní } (y'' = -\frac{16}{3})\}\}$
- f) v $X_0 = (3, 3)$ tečnu t a normálu n $\{\{t: y - 3 = -(x - 3), n: y = x\}\}$
- g) body x_0 , v nichž $f'(x_0) = 0$. $\{\{x_0 = 2\sqrt[3]{2}\}\}$

- 42** Zjistěte, zda rovnice $(y + 3) \sin 2x = \sin y$ definuje na okolí bodu $A = (0, 0)$ implicitně funkci $y = f(x)$ určenou na nějakém okolí bodu $x_0 = 0$. Pokud ano, vypočítejte derivaci y' funkce dané implicitně tou rovnicí na okolí bodu A . $\{\{y'(A) = 6\}\}$

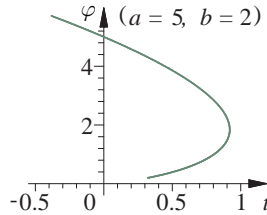
- 43** Vypočítejte směrnici k tečny v bodě $T = (1, 2)$ ke křivce dané implicitně rovnicí $x^5 + y^5 - 2x^2y = 29$. $\{\{k = y'(1, 2) = \frac{1}{26}\}\}$

¹²⁷⁾ Zde aplikujeme Laplaceův operátor na vektor \vec{E} a výsledkem je samozřejmě vektor.

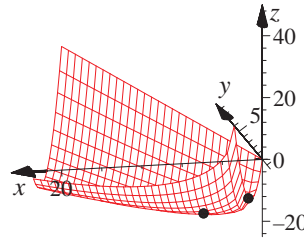
¹²⁸⁾ Ke studiu vlnové rovnice výrazně přispěl právě Francouz Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783).



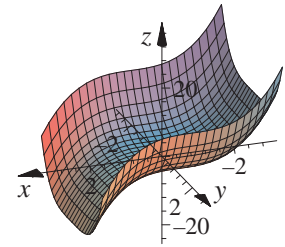
Obr. 5.21 Descartesův list



Obr. 5.22



Obr. 5.23



Obr. 5.24

- 44** V jistém časovém rozmezí byla mezi okamžitou úhlovou výchylkou φ (rad) otáčivého pohybu a časem t (s) zjištěna závislost (Viz obr. 5.22) ve tvaru $\varphi = ae^{-\frac{bt}{\varphi}}$, kde a (rad), b (rad·s⁻¹) jsou kladné fyzikální konstanty. Odvoďte okamžitou úhlovou rychlost $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ i okamžité úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ pohybu, a pak hodnoty $\varphi_0, \omega_0, \varepsilon_0$ v bodě $t = 0$; určete v jakém čase t^* a výchylce φ^* se (teoreticky) blíží $\dot{\varphi} \rightarrow \pm\infty$.

$$\{\{\omega = \dot{\varphi} = \frac{b\varphi}{bt - \varphi}, \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{(b\varphi)^2}{(bt - \varphi)^3}, \varphi_0 = a, \omega_0 = -b, \varepsilon_0 = -\frac{b^2}{a}; \text{neuvádíme}\}\}$$

- 45** Pro funkci $z = f(x, y)$ danou implicitně rovnicí $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $a > 0$ (v \mathbb{E}_3 je touto rovnicí určena množina M nazývaná **kulová plocha** či **sféra**, což je **regulární plocha** (též **izoplocha**) **třídy** C^∞ , označme ji \mathcal{S}) a jistým bodem $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tj. $F(X_0) = 0$, určete v analogii s cvičením **41**

- a) nejprve **singulární body** S plochy \mathcal{S}

$\{\{\text{neexistují, tj. } \mathcal{S} \text{ je podle 5.4.19 b) } \text{regulární plocha třídy } C^\infty, \text{ neboť } F \in C^\infty(\mathbb{E}_3)\}\}$

- b) **body** N ,¹²⁹⁾ v jejichž okolí neexistuje jediná implicitní funkce $z = f(x, y)$

$\{\{\text{v rovině } xy \text{ body kružnice („rovničky“)} \mathcal{K}_{xy} : z = 0, x^2 + y^2 = a^2\}\}$

- c) derivace $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

$$\{\{z'_x = -\frac{x}{z}, z'_y = -\frac{y}{z}, z''_{xx} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}, z''_{xy} = -\frac{xy}{z^3}, z''_{yy} = -\frac{y^2+z^2}{z^3}\}\}$$

- d) v okolí kterých bodů a kolikrát je spojitě diferencovatelná funkce $f(x, y)$

$\{\{\text{protože } F \in C^\infty(\mathbb{E}_3), \text{ pak pro každý bod } X_0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{K}_{xy} \text{ je } F \in C^\infty(\mathcal{O}(X_0)) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathcal{O}(x_0, y_0)), \text{ tj. } f(x, y) \text{ je spojitě diferencovatelná v okolí příslušných bodů } (x_0, y_0) \text{ množiny } M_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 < a^2\}^{130)}\}\}$

- e) ve směru kterého vektoru \vec{v} je derivace implicitní funkce $z = f(x, y)$ v jejich bodech X_0 maximální, najděte ji a geometricky interpretujte

$\{\{\text{(z teorie) vždy ve směru gradientu } \vec{v} = \nabla f = -\frac{1}{z}(x\vec{i} + y\vec{j}) = -\frac{1}{z}\vec{r}(x, y), \text{ který pro } (z \neq 0) \text{ body na symetrických „rovnoběžkách“ } (x_0, y_0, \pm z_0) \text{ má opačný směr ve } \mathbb{V}(\mathbb{E}_2), \text{ takže ve směru (jednotkového) gradientu } \vec{s} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = -(\text{sgn } z) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \text{ je } \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = \frac{1}{|z|} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{a}{z})^2 - 1} > 0 \text{ na dvojici oněch „rovnoběžek“ táž}^{131)}\}\}$

- f) pro porovnání též gradient ∇F plochy \mathcal{S} a pro $\vec{s} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ také směrovou derivaci $\frac{\partial F}{\partial \vec{s}}$ tohoto skalárního pole $u = F(x, y, z)$ na jeho nulové hladině

$$\{\{\nabla F = 2(x, y, z) = 2\vec{r}, \vec{r} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_3), \nabla F = \vec{n}_{\mathcal{S}}, \frac{\partial F}{\partial \vec{s}} = 2\|\vec{r}\| = a \text{ (shoda s 5.4.16 a 5.4.19)}\}\}$$

- g) rovnice („svislých“) tečných rovin σ plochy \mathcal{S} v bodech N kružnice \mathcal{K}_{xy} z části b)

$$\{\{\text{označíme-li } N = (x_*, y_*, 0), \text{ pak } \sigma_N : x_*x + y_*y - a^2 = 0\}\}$$

- h) zda je implicitní funkce $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ v bodě $X_0 = (0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$ ve směru (jednotkového) vektoru $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ rostoucí a (máte-li nastudovány též vyšší směrové derivace) zda její graf je konvexní křivka (Viz 5.6.11)

$\{\{\text{v příslušném bodě } X_0^{xy} = (0, \frac{a}{2}) \text{ roviny } xy \text{ je ve směru } \vec{s} \text{ klesající } [\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(X_0^{xy}) = -\frac{\sqrt{6}}{6} < 0] \text{ a konkávní } [\frac{\partial^2 z}{\partial \vec{s}^2}(X_0^{xy}) \stackrel{(5.87)}{=} d^2z(X_0^{xy}, \vec{s}) = z''_{xx}s_1^2 + 2z''_{xy}s_1s_2 + z''_{yy}s_2^2|_{X_0^{xy}} = -\frac{7\sqrt{3}}{9a} < 0]\}\}$

- i) v $X_0 = (0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$ tečnou rovinu τ a normálu n plochy \mathcal{S}

$$\{\{n : x = 0, y = \frac{a}{2} + at, z = \frac{\sqrt{3}a}{2} + \sqrt{3}at; \tau : y + \sqrt{3}z - 2a = 0\}\}$$

- j) body, v nichž $f'_x = f'_y = 0$, tj. kde $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$

$$\{\{\text{„póly“ sféry } \mathcal{S} : (0, 0, \pm a)\}\}$$

¹²⁹⁾ V analogii s **41b**) jde o body $N \in \mathbb{E}_3$, v nichž $F(N) = 0$, $F'_z(N) = 0$, a v nichž je normála n plochy \mathcal{S} určené anulovanou rovnicí $F(X) = 0$ (regulární a třídy aspoň C^1) kolmá k ose závisle proměnné z neboli v bodech N má plocha \mathcal{S} „svislé“ tečné roviny.

¹³⁰⁾ otevřený kruh M_{xy} je projekcí $\mathcal{S} \setminus \mathcal{K}_{xy}$ do roviny Oxy , a ačkoli \mathcal{S} není grafem žádné funkce dvou proměnných na M_{xy} (neboť každému bodu z množiny M_{xy} by byly rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ plochy \mathcal{S} přiřazeny právě dvě, a to opačné hodnoty proměnné z , místo jediné), lze \mathcal{S} vyjádřit sjednocením grafů (např.) dvou funkcí $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

¹³¹⁾ přičemž na „pólech“ je $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = 0$ a na „rovničce“ \mathcal{K}_{xy} (kde $z = 0$) neexistuje (a ani není nevlastní, ačkoli zcela formálně vychází) $\lim_{|z| \rightarrow 0^+} \frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = +\infty$, neboť f tam není dána jednoznačně. Na \mathcal{K}_{xy} však můžeme implicitně definovat funkci $x = \varphi(y, z)$, resp. $y = \psi(x, z)$

- k) odchylku φ normály n plochy \mathcal{S} v bodě $X_0 = (0, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$ a osy z
 $\{\{\varphi = \frac{\pi}{6} (\sim 30^\circ), \text{ je též odchylka roviny } xy \text{ a tečné roviny plochy } \mathcal{S} \text{ v } X_0\}\}$
- l) v bodě $X_0 = (0, \frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$ **jednotkový vektor \vec{n}^o vnější normály** plochy \mathcal{S} a pak **derivaci $\frac{\partial F}{\partial \vec{n}^o}(X_0)$ podle (jednotkového vektoru) vnější normály.** $\{\{\text{při } \vec{n}^o = \frac{1}{2}(0, 1, -\sqrt{3}) \text{ je } \frac{\partial F}{\partial \vec{n}^o}(X_0) = 2a \text{ (srovnej s 5.4.16)}\}\}$

46 Dokažte, že dané dvě plochy určené rovnicemi $F \equiv (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $G \equiv x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$ jsou kolmé (ortogonální).¹³²⁾

47 Najděte úhel dvou ploch (tj. odchylku jejich normál) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ v bodě $(2, 2, 0)$. $\{\{\frac{\pi}{2}\}\}$

48 Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližnou funkční hodnotu $f(1,98; 1,01)$ funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí $xy^2z + \ln z - 2 = 0$, a také z''_{yy} v obecném bodě.

$$\{\{0,99; z''_{yy} = \frac{2xz^2}{(xy^2z+1)^3}(3x^2y^4z^2 + 4xy^2z - 1)\}\}$$

49 Při respektování označení z fyzikálních a chemických aplikací se pokuste odvodit rychlost změny $(\frac{\partial S}{\partial p})_V$ entropie S podle tlaku p při konstantním objemu V pro látkové množství jednoho molu reálného plynu, který se řídí Redlichovou-Kwongovou stavovou rovnicí

$$pV = RT + p(b - \frac{a}{RT^{\frac{5}{2}}}),$$

kde a, b, R jsou konstanty, uvážíte-li, že $S = S(T, p)$, kde T je termodynamická teplota.

$$\{\{(\frac{\partial S}{\partial T})_p \frac{\frac{a}{R} \frac{1}{T^{3/2}} + V - b}{\frac{3a}{2R} \frac{p}{T^{5/2}} + R} + (\frac{\partial S}{\partial p})_T\}\}$$

F) Vyšší diferenciály a Taylorův vzorec

50 Najděte první, druhý, třetí až k -tý (totální) diferenciál funkce

- a) $f(x, y) = e^{ax+by}$ v bodě $A = (0, 0)$ s přírůstkovým vektorem $\vec{h} = (h_1, h_2)$ $\{\{d^k f(A, \vec{h}) = (ah_1 + bh_2)^k\}\}$
- b) $z(x, y) = \ln(x+y)$ v $A(1, 0)$, $\vec{h} = (dx, dy) = (x-1, y)$ $\{\{d^k z(A, x, y) = (-1)^{k-1}(k-1)!(x-1+y)^k\}\}$
- c) $\varphi(x, y, z) = f(x+y+z)$ v $A(1, -1, 0)$, $\vec{h} = (dx, dy, dz) = (x-1, y+1, z)$ a určete, jaká musí být funkce f .
 $\{\{d^k \varphi_A(x, y, z) = f^k(0) \cdot (x+y+z)^k, f(u) \text{ musí být } k\text{-krát diferencovatelná v bodě } u = 0\}\}$

51 Určete druhý diferenciál funkce $z = f(x, y)$ dané (implicitně) rovnicí $x + y + z - \ln z = 0$ a bodem $X_0 = (-1, -\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. Pak pomocí druhé směrové derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{s}^2}$ zjistěte, zda (Viz 5.6.11) graf funkce f je v bodě X_0 ve směru vektoru $\vec{s} = (1, -2)$ konvexní křivka.

$$\{\{\text{je konvexní, neboť při } \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \text{ je } \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{s}^2}|_{X_0} \stackrel{(5.87)}{=} d^2 f(X_0, \vec{s}) = \frac{z}{(1-z)^3}|_{X_0} \cdot (s_1 + s_2)^2 = \frac{e^2}{(e-1)^3} \cdot \frac{1}{5} > 0\}\}$$

52 Je dána funkce $z = f(x, y) = e^x \sin y$.

- a) Dokažte, že vyhovuje **Laplaceově** parciální diferenciální **rovnicí** (2. řádu) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$, tj. že je to **harmonická funkce**
- b) Co nejlépe ji aproximujte na okolí obecného bodu $A = (x, y)$ polynomickou funkcí 3. stupně (tj. Taylorovým polynomem) při použití **přírůstkového vektoru** $\vec{h} = (h_1, h_2)$
- c) Využijte toho pro přibližný výpočet hodnoty $e^{0,1} \sin(0,99\pi)$ ve vhodně zvoleném středu **Taylorova polynomu** a vyčíslování jeho členů ukončete, až bude zaručena přesnost výpočtu na tři desetinná místa (tj. bez odhadu R_k)¹³³⁾
- d) Aproximujte funkci **Maclaurinovým polynomem** 2. stupně $M_2(x, y)$. Uvažujete-li čtverec, v němž $|x| < 0,1$ a $|y| < 0,1$, odhadněte velikost $|\varepsilon|$ chyby ε této aproximace pomocí Lagrangeova zbytku R_k
- e) Jak lze $|\varepsilon|$ ještě zmenšit? $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- f) Zvolte bod (x_0, y_0) ve čtverci a porovnejte hodnotu aproximace $M_2(x_0, y_0)$ s $f(x_0, y_0)$.
- b)) $\{\{f(x+h_1, y+h_2) = e^x[\sin y + h_1 \sin y + h_2 \cos y + \frac{1}{2!}(h_1^2 \sin y + 2h_1 h_2 \cos y - h_2^2 \sin y) + \frac{1}{3!}(h_1^3 \sin y + 3h_1^2 h_2 \cos y - 3h_1 h_2^2 \sin y - h_2^3 \cos y)] + R_3\}\}$
- c)) $\{\{\text{Pro střed } A = (0, \pi) \text{ máme } h_1 = 0,1 \text{ a } h_2 = -0,01\pi, e^{0,1} \sin(0,99\pi) \approx 0,01\pi + \frac{1}{2!}(0,002\pi) + \frac{1}{3!}(3 \cdot 0,01 \cdot 0,01\pi - 10^{-6}\pi^3). \text{ Protože pro 3. člen je } 0,15 \cdot 10^{-3} < 0,5 \cdot 10^{-3}, \text{ součet prvních dvou členů dává požadovanou aproximaci } 0,034. \text{ Pro porovnání, } f(0,1; 0,99\pi) = 0,03471 \dots\}\}\}$

¹³²⁾tj. v každém jejich společném bodě jsou normály ploch kolmé

¹³³⁾To je méně pracné. Navíc odhady založené na Lagrangeově zbytku R_k jsou často pesimistické a skutečná chyba bývá mnohdy o jeden či více řádů menší.

- d)) $\{\{\text{Pro střed } A = (0, 0), h_1 = \Delta x = x, h_2 = y, A^* = (\vartheta x, \vartheta y), 0 < \vartheta < 1, \text{ je } e^x \sin y = M_2(x, y) + R_2 = y + xy + \frac{1}{3!}d^3 f(A^*), \text{ kde } R_2(x, y; \vartheta) = \frac{1}{6}e^{\vartheta x}[(x^3 - 3xy^2) \sin \vartheta y + (3x^2y - y^3) \cos \vartheta y]. \text{ Na čtverci je } e^{\vartheta x} < e^{0,1}, |\sin \vartheta y| < 1, |\cos \vartheta y| < 1 \text{ a s využitím nerovnosti } |a - b| \leq |a| + |b| \text{ máme odhad } |\varepsilon| = |R_2| < \frac{1}{6}e^{0,1}(0,1^3 + 3 \cdot 0,1 \cdot 0,1^2 + 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,1 + 0,1^3) \doteq \frac{1}{6}e^{0,1} \cdot 0,1^3 \cdot 8 \doteq 0,00147 \dots < 0,002 < 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ (tj. s přesností na 2 desetinná místa).}\}$

Lze psát $e^x \sin y \approx (1 + x)y \pm 0,002$ pro body (x, y) čtverce $(-0,1; 0,1) \times (-0,1; 0,1)$

53

- a) Na okolí bodu $A = (1, 1, 1)$ zapište Taylorovým polynomem $T_k(x, y, z)$ co nejvyššího stupně k se středem v bodě A rozvoj (tj. rozvoj podle mocnin $(x-1), (y-1), (z-1)$) polynomické funkce (2. stupně) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz$ $\{\{f(x, y, z) = 1 + 2(y-1) + (x-1)^2 - 2(x-1)(z-1) + (y-1)^2 + (z-1)^2\}\}$
- b) Zdůvodněte, proč je po úpravě $T_k = T_2(x, y, z) = f(x, y, z)$ $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$

- 54) V okolí bodu $(0, 0)$ najděte nejlepší aproximaci funkce $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ polynomem 5. stupně (tj. Maclaurinovým polynomem $M_5(x, y)$). $\{\{\cos(x^2 + y^2) \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \text{ }^{134)}\}\}$

- 55) Dokažte, že pro malé hodnoty x, y, z platí aproximace $e^{x^4 - y^4 + z^2} \approx 1 + x^4 - y^4 + z^2$.

G) Lokální a globální extrémy funkce

- 56) Jako přípravu na použití důsledku 5.7.18 Sylvestrova kritéria zapište a vyčíslete základní hlavní subdeterminanty níže uvedené matice. Protože je symetrická, může to být **Hessova matice** jisté dvakrát diferencovatelné funkce $f(x, y, z)$ v jistém bodě P . Najděte všechny druhé derivace vyhovujících funkcí f a bodů P . Zapište **kvadratickou formu** $q(\vec{h}) = d^2 f(P, \vec{h})$ nad \mathbb{V}_3 generovanou (Viz 5.7.12) danou maticí, popř. určete její definitnost, je-li matice

$$H = \begin{pmatrix} -2, & -1, & 0 \\ -1, & -4, & 1 \\ 0, & 1, & -3 \end{pmatrix}.$$

$\{\{\det(-2) = -2, \det \begin{pmatrix} -2, & -1 \\ -1, & -4 \end{pmatrix} = 7, \det H = -19; \text{ v } P \text{ je } f''_{xx} = -2, f''_{xy} = f''_{yx} = -1, f''_{xz} = f''_{zx} = 0, f''_{yy} = -4, f''_{yz} = f''_{zy} = 1, f''_{zz} = -3; q(h_1, h_2, h_3) = -2h_1^2 - 4h_2^2 - 3h_3^2 - 2h_1h_2 + 2h_2h_3; \text{ je negativně definitní, neboť } q(\vec{h}) = -(h_1 + h_2 - h_3)^2 - (h_1 + h_3)^2 - 3h_2^2 - h_3^2 < 0 \text{ pro každý nenulový vektor } \vec{h} \in \mathbb{V}_3\}\}$

- 57) Určete lokální extrémy, resp. sedlové body S dané funkce

- a) $f(x, y, z) = -x^3 - y^3 + 3xy - z^2$ $\{\{2 \text{ stacionární body dají } f_{\text{LMAX}}(1, 1, 0) = 1, \text{ přičemž } S = (0, 0, 0) = O\}\}$
- b) $f(x, y, z) = z^3 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3xz + 2x - 2y + 1$
 $\{\{\text{stacionární body } P_1 = (4, 1, 2), P_2 = (1, 1, 1). \text{ V } P_1 \text{ je (ostré) lokální minimum } f_{\text{LMIN}}(P_1) = 0; \text{ V } P_2 \text{ nám důsledek 5.7.18 odpověď nedává, avšak není zde extrém, neboť } q(P_2, dx, dy, dz) = dx^2 + 2dy^2 + 6dz^2 - 6dxdz = \frac{3}{2}(dx - 2dz)^2 - \frac{1}{2}dx^2 + 2dy^2 \text{ je indefinitní kvadratická forma}^{135)}\}\}$
- c) $u(x, y, z) = xyz(x + y + z - 4)$. $\{\{u_{\text{LMIN}}(1, 1, 1) = -1\}\}$

- 58) Je dána funkce $f(x, y) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y + 3$. Pomocí znázornění grafu f a daných množin určete

- a) $\max f, \min f$ $\{\{\text{neexistují, } f \text{ je neohrazená, } \sup f = +\infty, \inf f = -\infty\}\}$
- b) maximum a minimum f na uzavřeném trojúhelníku $M : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x$
 $\{\{\max f(M) = 3 \text{ je ostré, nastává v počátku } O(0, 0); \min f(M) = 0 \text{ je neostré a nastává na uzavřené úsečce } AB, A(4, 0), B(0, 2)^{136)}\}\}$
- c) zda počátek $O(0, 0)$ je též bodem ostrého lokálního maxima funkce na M
 $\{\{\text{podle definice 5.7.2 ano (a ovšem i bodem ostrého globálního maxima)}\}\}$
- d) která věta zaručila pro část b) existenci největší a nejmenší hodnoty funkce f $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- e) supremum a infimum f na *vnitřku* M° množiny M . $\{\{\sup f = 3, \inf f = 0\}\}$

- 59) S využitím znázornění grafu dané funkce $f(x, y)$ a množiny stanovte $\max f(M)$ a $\min f(M)$, je-li

- a) $f(x, y) = y + 1, M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ $\{\{\max f(M) = 3, \min f(M) = 1\}\}$
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2, M$ je elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
 $\{\{\max f(M) = 9 \text{ (ostré) v bodech } (\pm 3, 0); \min f(M) = 4 \text{ (ostré) v bodech } (0, \pm 2)\}\}\}$

¹³⁴⁾ lze popřípadě formálně dosadit do Maclaurinova vzorce $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ za $z = x^2 + y^2$

¹³⁵⁾ tj. ona i $d^2 f(P, dx, dy, dz)$ mění v okolí bodu P_2 znaménko. Např. pro volbu $dx = 2dz = dy$ je $q = \frac{3}{2}dy^2 > 0$, ale pro $dx = 2dz = 3dy$ je $q = -\frac{5}{2}dy^2 < 0$

¹³⁶⁾ která je tak množinou nekonečně (přesněji *nespočetně*) mnoha bodů lokálních (i *globálních*) minim

60 Vyšetřete lokální extrémů funkce $f(x, y) = 2y^2 + 2x - 12y - 2y\sqrt{x}$ ($D_f : x \geq 0$).
 {ve stacionárním bodě $f_{\text{LMIN}}(4, 4) = -24$ (ostré); v podezřelém bodě $P(0, 3)$ hranice ∂D_f (osa y), kde f'_x neexistuje a $f'_y = 0$, lokální extrém nenastane,¹³⁷⁾ viz obr. 5.23 na str. 140}

61 Vyšetřete extrémů funkce

- a) $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
 {ostré lokální extrémů $f_{\text{LMIN}}(0, 0) = 0$, $f_{\text{LMAX}}(-1, 0) = \frac{2}{e} = f_{\text{LMAX}}(1, 0)$, sedlové body $S_1(0, -1)$, $S_2(0, 1)$ }
- b) $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí $z^3 - 3xyz - 1 = 0$ {neexistují, sedlový bod $S = (0, 0)$ }
- c) $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$
 {funkce f_1 , resp. f_2 , pro niž platí $f_1(-1, 1) = -1$, resp. $f_2(-1, 1) = 5$, má $f_{1\text{LMIN}}(-1, 1) = -1$, $f_{2\text{LMAX}}(-1, 1) = 5$ (ostrý extrém pro f_1 i pro f_2)}
- d) $f(x, y) = xy + x - y - 1$ na M , $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x + y = 1\}$
 {ostré lokální maximum $f_{\text{LMAX}}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ na M }
- e) $z(x, y) = x - xy - y$ a definitnost kvadratické formy $q(P, \vec{h})$ nad \mathbb{V}_2 , generované Hessovou maticí funkce v podezřelých bodech P {neexistují, jen sedlový bod $S(0, 0)$, neboť $q = -2h_1h_2$ je indefinitní}
- f) $z(x, y) = y^4 - x^3$. {nejsou, jen sedlo $(0, 0, 0)$, viz obr. 5.24}

62 Určete globální extrémů funkce $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$.
 { $\max f(\mathbf{X})$ neexistuje, $\min f(\mathbf{X}) = f(a_1, \dots, a_n) = 0$ }

63 Slovně formulujte, jaké souřadnice v rovině má bod $\mathbf{X} = (x, y)$, jehož součet čtverců vzdáleností od n daných bodů $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ je nejmenší. {neuvádíme}

H) Vázané extrémů funkce

64 Vyšetřete vázané extrémů funkcí na daných množinách (vazbách) M

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M : 2x + 3y - 6 = 0$ { $f_{\text{VLMAX}}(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}) = \frac{36}{13}$ }
- b) $f(x, y) = y^2 - x^2$,¹³⁸⁾ $M : x^2 + y^2 - 1 = 0$ { $f_{\text{VLMAX}_{1,2}}(\pm 1, 0) = 1$, $f_{\text{VLMIN}_{1,2}}(0, \pm 1) = -1$ }
- c) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $M : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.
 { $f_{\text{VLMIN}_{1,2}}(0, 0, \pm 1) = 1$, $f_{\text{VLMAX}_{1,2}}(\pm 3, 0, 0) = 9$, extrém není v $(0, \pm 2, 0)$ }

65 V rovině $x + y - z - 5 = 0$ najděte bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A = (1, 1, 1)$ a $B = (2, 2, 2)$ je nejmenší. {bod $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3})$ }

66 Najděte největší a nejmenší hodnoty, tj. globální extrémů, daných funkcí na zadaných množinách (vazbách) M

- a) $f(x, y) = y^2 - x^2$, $M : x^2 + y^2 \leq 4$
 { $\min f(M) \equiv f_{\text{VGMIN}_{1,2}}(\pm 2, 0) = -4$, $\max f(M) \equiv f_{\text{VGMAX}_{1,2}}(0, \pm 2) = 4$, přičemž v počátku $(0, 0)$ extrém neexistuje}
- b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M : x^2 + y^2 \leq 16$
 { $\min_{(x,y) \in M} f(x, y) \equiv f_{\text{VGMIN}}(0, 0) = 0$ (ostré), $\max_{(x,y) \in M} f(x, y) \equiv f_{\text{VGMAX}}(x, y) = 4$ (neostré) v každém bodě (x, y) hranice $\partial M : x^2 + y^2 = 16$ }
- c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $M : |x| + |y| \leq 1$
 { $f_{\text{VGMIN}}(0, 0) = 0$, (vázaná) globální maxima $f(-1, 0) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(0, 1) = 1$ }
- d) $f(x, y) = xy(x - 2)(y - 2)$, $M : 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.
 { $f_{\text{VGMAX}}(1, 1) = 1$, (vázaná) globální minima $f(0, 0) = f(2, 0) = f(0, 2) = f(2, 2) = 0$ }

67 Pokuste se odvodit, při jakém poměru výšky h a poloměru r dna nádrže ve tvaru otevřeného kolmého kruhového válce zadaného objemu V (m^3) bude výroba nejlacinější, stojí-li plošná jednotka pláště p (€) a dna d (€). { $\frac{r}{h} = \frac{2}{d}$ }

¹³⁷⁾ Lze totiž použít **kontrapozici (též transpozici) tvrzení z 5.7.3 c)**.

1) zvolíme-li $M_1 = O_y$, pak na $M_1 \cap \mathcal{O}^*(P)$, tj. na ose O_y existuje **reduované okolí** $\mathcal{O}^*(P)$, že pro zúžení funkce $f|_{O_y} = f(0, y \neq 3) = 2y^2 - 12y = 2(y - 3)^2 - 18 > -18 = f(P) \Rightarrow$ že je tam $f(\mathbf{X}) > f(P)$ a zároveň

2) zvolíme-li $M_1 = p$, kde polopřímka $p = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq 0 \wedge y = 3\}$, pak na p existuje **takové** $\mathcal{O}^*(P)$, že je tam $f(\mathbf{X}) < f(P)$, neboť pro zúžení funkce $f|_p = f(x \geq 0; 3) \equiv \varphi(x) = 2x - 6\sqrt{x} - 18$ je $\varphi'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2 - \frac{3}{\sqrt{x}}) = -\infty$, tj.

$\varphi(x)$ je tam klesající (ve směru souhlasném s osou x). Tím jsme vyloučili podle zmíněného tvrzení jak ostré, tak i neostré extrémů.

¹³⁸⁾ graf viz obr. 4.3 na str. 60

Část III

Základy integrálního počtu funkcí více proměnných

6 Riemannův dvojný a trojný integrál na měřitelné množině

6.1 Riemannův dvojný integrál. Měřitelné množiny v \mathbb{E}_2

6.1.1 Význam Riemannova vícerozměrného integrálu v současnosti se nikterak nezměnil, přičemž připomeňme, že klasickou Riemannovu součtovou definici zobecnil v r. 1957 český matematik Jaroslav Kurzweil¹⁾, a přispěl tak se světovým věhlasem k renesanci východisek klasického R-integrálu.²⁾ V základních aplikacích čtenář s definicí a aparátém dvojrozměrného či trojrozměrného R-integrálu, tak jak bude podán, vystačí, i když skutečností je, že v mnoha náročnějších aplikacích z hydromechaniky, reologie³⁾, pravděpodobnosti, parciálních diferenciálních rovnic apod. se používá *Lebesgueův integrál* (čti: *lebegův*), založený na obsáhlé teorii Lebesgueovy míry. Důvod k tomu je především ten, že R-integrál vyžaduje, aby integrandem byla funkce „skoro všude“ spojitá.

Podobně jako u R-integrálu *ohraničené* funkce $f(x)$ jedné proměnné (tj. u jednorozměrného nebo jak jsme stručně říkali u určitého integrálu), jenž v nejčastějším případě – v uzavřeném ohraničeném intervalu $a \leq x \leq b$ umožnil (speciálně) pro spojitou kladnou funkci $f(x)$ vypočítat *obsah* příslušného křivočarého lichoběžníka,⁴⁾ také zde budeme dvojný (tj. dvojrozměrný) integrál v \mathbb{E}_2 definovat pro *ohraničenou* funkci tak, aby nám umožnil (speciálně) pro spojitou kladnou funkci $f(x, y)$ vypočítat např. *objem* jistého tělesa a vlastně tento objem jako důležitou číselnou charakteristiku onoho tělesa – tzv. „trojrozměrnou míru množiny“ dvojným nebo trojným integrálem definovat.⁵⁾ Naznačeným zobecňováním ve smyslu přechodu k integraci funkcí více proměnných lze dospět k (Riemannovu) *k-rozměrnému integrálu* v n -rozměrném euklidovském prostoru \mathbb{E}_n , přičemž obecně je $k \leq n$. Při $k = n$ mluvíme o *n-rozměrném integrálu*, při $k = 1$, $n > 1$ jde o *křivkový integrál* a při $1 < k < n$ se příslušný (Riemannův) integrál nazývá *plošný integrál*.

Stejně jako u určitého integrálu na jednorozměrném intervalu, rovněž u všech k -rozměrných integrálů je při jejich riemannovské definici výchozím principem princip *dělení a norma dělení* příslušných integračních oborů.

Můžeme shrnout, že *k-rozměrný integrál je zobrazením* jistých vlastností, které funkci $f(X)$ v \mathbb{E}_n a množině $M \subseteq D_f \subseteq \mathbb{E}_n$ přiřadí reálné číslo, popř. slovo „neexistuje“. Analogický pojem k pojmu *neurčitý integrál* se pro funkce více proměnných nezavádí.

6.1.2 Úmluva o intervalech v \mathbb{E}_n V celé této kapitole budeme symbol I užívat k označení n -rozměrného intervalu v \mathbb{E}_n ($n = 1, 2, \dots$),⁶⁾ přičemž (*kompaktní*) *n-rozměrný interval* nebo (*kompaktní*) *n-rozměrný kvádr*⁷⁾ definujeme jako množinu $I \subset \mathbb{E}_n$

$$I = \{(x_1, \dots, x_n) = X \in \mathbb{E}_n \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad (6.1)$$

kde $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla splňující nerovnosti $a_i < b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Poznamenejme, že je-li I interval (kvádr), pak *vnitřek* I° *množiny* I je množina, která se rovněž definuje kartézským součinem, avšak příslušných otevřených intervalů, a nazývá se pak *otevřený interval* nebo *otevřený kvádr*.

6.1.3 Dělením intervalu I (n -rozměrného) se nazývá každá množina \mathcal{D} o r prvcích tvořená n -rozměrnými intervaly, tj. takový systém množin $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_r\}$, kde $r \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$, že

$$1. \bigcup_{i=1}^r I_i = I,$$

$$2. I_i^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset \text{ pro každé dva různé indexy } i, j \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Prvky I_1, \dots, I_r se nazývají *dílčí intervaly intervalu I dělení \mathcal{D}* .

¹⁾ jak jsme uvedli v závěru odstavce 2.3.15 ze str. 36

²⁾ tj. Riemannova integrálu

³⁾ Slovo *reologie* vzniklo z řeckého slovesa *ρειν = téci*. Označení reologie s vymezením působnosti na *studium deformace a toku materiálů* bylo zavedeno v r. 1920 Američanem Eugene C. Binghamem, profesorem v oboru koloidní chemie, a obecně přijato při založení americké Společnosti pro reologii v r. 1925. Prudký rozvoj reologie ve 2. polovině 20. století souvisí zejména s hromadným použitím pevných i kapalných polymerních systémů.

⁴⁾ jako limity integrálních součtů obsahů obdélníků $f(r_i) \cdot \Delta x_i$, kterými byl onen křivočarý lichoběžník aproximován

⁵⁾ přičemž ono těleso bude opět aproximováno systémem jednodušších těles

⁶⁾ s nímž jsme se setkali v 3.2.36 str. 47 v souvislosti s kvádrovým okolím bodu z \mathbb{E}_n

⁷⁾ Připomeňme, že *kompaktní množina* v \mathbb{E}_n je právě taková, která je v něm *ohraničená* a *uzavřená*.

6.1.4 Příklad Na obr. 6.1 intervaly I_1, \dots, I_r , $r = 8$, označují prvky jednoho z možných dělení \mathcal{D} dvojrozměrného intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$, přičemž indexování se často vyhýbáme, tj. $a \equiv a_1, b \equiv b_1, c \equiv a_2, d \equiv b_2$.

6.1.5 Průměr, norma dělení a objem intervalu I Nechť I je (n -rozměrný) interval (kvádr) v \mathbb{E}_n . Pak číslo

$$\text{diam } I = \left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

se nazývá **průměr intervalu (kvádru) I** .⁸⁾ **Průměrem dvojrozměrného intervalu, tj. obdélníka, resp. trojrozměrného intervalu, tj. kvádru, je délka úhlopříčky, resp. délka tělesové úhlopříčky příslušné geometrické interpretace.**⁹⁾

- Mějme $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_r\}$ dělení intervalu I . Pak číslo

$$\|\mathcal{D}\| = \max_{1 \leq i \leq r} \text{diam}(I_i), \quad (6.3)$$

tj. největší číslo z číselné množiny $\{\text{diam}(I_1), \dots, \text{diam}(I_r)\}$, se nazývá **norma dělení \mathcal{D}** . Je to největší z průměrů dílčích intervalů.

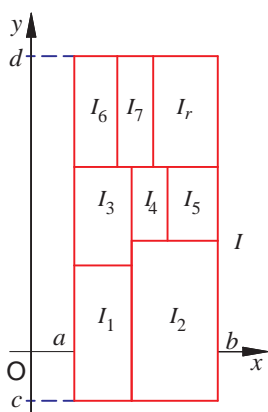
• Číslo $\mu_n(I)$ nebo (nehrozí-li nedorozumění) stručněji $\mu(I)$ označuje (n -rozměrný) **objem intervalu I** a definujeme jej následovně

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \quad (6.4)$$

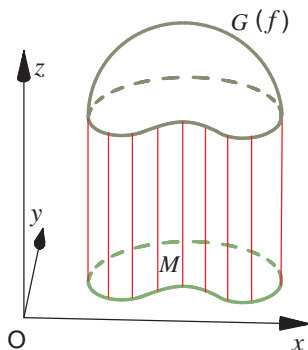
přičemž poznamenejme, že je-li $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_r\}$ dělení intervalu I , pak

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^r \mu(I_i). \quad (6.5)$$

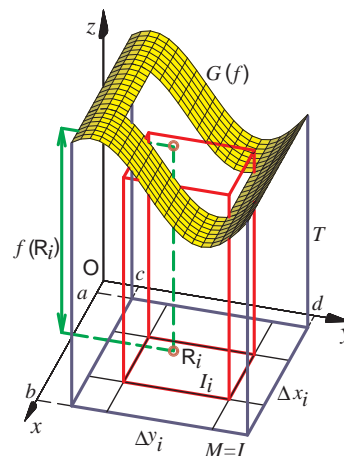
6.1.6 Příklad Obsah dvojrozměrného intervalu $I = [a, b] \times [c, d]$ je definován číslem $P(I) = (b - a)(d - c)$, tedy $\mu_2(I) = P(I)$, tj. **dvojrozměrný objem intervalu je jeho obsah**. Podobně **objem trojrozměrného intervalu $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$** je definován číslem $V(I) = (b - a)(d - c)(f - e)$, takže $\mu_3(I) = V(I)$, tj. **trojrozměrný objem intervalu je jeho objem a ovšem jednorozměrný objem intervalu $I = [a, b]$ je jeho délka $(b - a)$** .



Obr. 6.1



Obr. 6.2



Obr. 6.3

6.1.7 Dosavadní obecnější přístup by mohl vyústit v definici k -rozměrného integrálu v \mathbb{E}_n . My jej opustíme, avšak umožní nám dostatečný nadhled v následujících článcích, kdy budeme definovat dvojný a později i trojný integrál.

⁸⁾ Průměr množiny v metrickém prostoru jsme definovali v 3.3.9 na str. 50.

⁹⁾ Pro dva libovolné body $X, Y \in I$ zřejmě platí $\rho(X, Y) \leq \text{diam } I$, kde $\rho(X, Y)$ je vzdálenost bodů v \mathbb{E}_n .

6.1.8 Geometrická motivace pro dvojný integrál. Dělení obdélníka. Reprezentant. Ve shodě s obr. 6.2 uvažujeme nejprve spojitou kladnou funkci $z = f(x, y)$ na množině $M \subset \mathbb{E}_2$, přičemž chceme definovat a také vypočítat objem $V(T)$ množiny – (kolmého) válcového tělesa T majícího v rovině xy podstavu M , shora ohraničeného grafem $G(f)$ funkce f , jehož definice je $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.¹⁰⁾

- a) Nejprve se zaměříme na jednodušší válcové těleso T z obr. 6.3, u nějž je podstavou množina $\boxed{M = I}$, kde $I = [a, b] \times [c, d]$ je dvojrozměrný interval, tj. **obdélník**, který je kolmým průmětem našeho jednoduššího tělesa T do roviny xy .

V triviálním případě, kdy f je konstantní na I , je T kvádrem s objemem $V(T) = f \cdot (b - a)(d - c)$.

- b) Není-li f konstantní, pak ve shodě s obr. 6.3 vezměme jedno z nejpoužívanějších **dělení**¹¹⁾ \mathcal{D} uvažovaného **obdélníka** I , kdy se na obor integrace – obdélník I použije **pravoúhlá nepravidelná síť**,¹²⁾ tj. obdélník I se rozdělí na n **dílčích obdélníků** I_1, \dots, I_n .

Objem $V(T_i)$ *i-tého* **dílčího tělesa** T_i s podstavou *i-tého* **dílčího obdélníka** I_i shora ohraničeného grafem $G(f)$ **aproximujeme objemem kvádrů** Q_i opět s podstavou I_i , avšak s výškou rovnou konstantě $f(R_i)$, kde bod $R_i \in I_i$ je libovolně vybraný z I_i , nazvěme jej **reprezentant i-tého** **dílčího obdélníka** I_i **dělení** \mathcal{D} . Platí přibližná rovnost $V(T_i) \approx V(Q_i) = f(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i$, kde $\Delta x_i, \Delta y_i$ jsou **délky stran i-tého obdélníka** I_i . Objem $V(T)$ celého tělesa z obr. 6.3 pak aproximujeme takto

$$V(T) = \sum_{i=1}^n V(T_i) \approx \sum_{i=1}^n f(R_i) \Delta x_i \Delta y_i. \quad (6.6)$$

- c) Dosavadní postup by teoreticky vedl k přesnému výpočtu objemu $V(T)$, pokud bychom podle nějakého funkčního předpisu a nikoli šťastnou náhodou definovali reprezentanta $R_i \in I_i$ tak, aby vždy $V(T_i) = V(Q_i)$.

Odkaz: A skutečně, tzv. **věta o střední hodnotě integrálního počtu** (my máme $f(x, y)$ nejen spojitou, ale navíc požadujeme $f(x, y) > 0$) zaručuje existenci aspoň jednoho takového bodu $R^* \in M$, kde množina M může být např. podstavou válcového tělesa T z obr. 6.2, aby platila **rovnost objemů** $V(T) = f(R^*) \cdot P(M)$, v níž $P(M)$ je obsah množiny M . Číslo $f(R^*)$ je tzv. **střední hodnota**, přičemž $f(R^*) \cdot P(M)$ je objem (kolmého) válce [načrtněte jej po odhadnutí výšky $f(R^*)$] nad podstavou M s výškou $f(R^*)$. Pro těleso T z obr. 6.2 **by se ona věta dala geometricky interpretovat jako věta o střední hodnotě výšky** $f(R^*)$ **válcového tělesa** T **nad podstavou** M **a pod grafem funkce** $f(x, y)$.

Praktickou cestou jak numericky dosáhnout co nejpřesnějšího výsledku v našich úvahách prozatím zůstává postupné zhušťování neboli **zjemňování sítě**, a to především v okolí těch bodů obdélníka I , kde se funkce f „hodně mění“, což bychom analyticky mohli uskutečnit limitním přechodem v součtech napravo v (6.6). Avšak každý numerický postup, má-li být korektně definován, musí mít mj. především zaručeny jisté teoretické postačující podmínky pro konvergenci k přesnému výsledku, zde tedy k výpočtu objemů $V(T)$ obou znázorněných typů těles nebo i komplikovanějších. Na formulování oněch podmínek a obecně vybudování základů klasického integrálního počtu se podíleli zvláště německý matematik G. F. B. Riemann (1826-1866) a francouzský matematik A. L. Cauchy (1789-1857).

6.1.9 Fyzikální motivace pro dvojný integrál tkví ve snaze vypočítat **hmotnost** $H(I)$ velmi tenkého nehomogenního materiálu ve tvaru obdélníka I , takže můžeme hovořit o určení hmotnosti **plechu** či **velmi tenké desky** nebo **rovinné skořepiny** I . Přitom se předpokládá, že funkcí $h(x, y)$ je v každém bodě (x, y) zadána **plošná hustota** (v měřící jednotce $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$). Postupem zcela shodným s předešlým článkem i stejným obr. 6.3, jen místo $f(x, y)$ je $h(x, y)$ a místo objemů $V(\cdot)$ se uvažují příslušné hmotnosti $H(\cdot)$, lze hmotnost obdélníkového plechu aproximovat součtem

$$H(I) = \sum_{i=1}^n H(I_i) \approx \sum_{i=1}^n h(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i. \quad (6.7)$$

¹⁰⁾Kolmým průmětem tělesa T do roviny xy je M .

¹¹⁾používá se mj. při numerických výpočtech dvojných integrálů, při řešení úloh z aplikací, které vedou na řešení parciálních diferenciálních rovnic na dvojrozměrných oborech metodou sítě apod.

¹²⁾což je množina bodů, nazývaných **uzly sítě**, která vznikne průnikem dvou systémů přímek rovnoběžných se souřadnicovou osou x nebo y , jež jsou v obecném případě **neekvidistantní**, tj. nestejně vzdálené

6.1.10 Dvojný integrál na obdélníku jako limita integrálních součtů

- a) Mějme dvojměrný (kompaktní) interval, tj. **obdélník** $I = [a, b] \times [c, d]$, v \mathbb{E}_2 . Uvažujme **dělení** $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_n\}$ obdélníka I (Viz 6.1.3) na **dílčí obdélníky** I_1, \dots, I_n (se stranami o délkách $\Delta x_1, \Delta y_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n$). Nechť $\|\mathcal{D}\|$ je (Viz 6.1.5) **norma dělení**¹³⁾ obdélníka I . Nechť $\mu(I)$ je (Viz 6.1.6) dvojměrný objem obdélníka I , tj. jeho obsah (označený též $P(I)$).

• Množinu bodů $\mathcal{V} = \{R_1, \dots, R_n\}$ nazveme **výběr reprezentantů** dílčích intervalů I_1, \dots, I_n dělení \mathcal{D} , přičemž **reprezentant** $R_i \in I_i$ dílčího intervalu I_i , $i = 1, \dots, n$, je pojmenování pro jeho libovolný bod.¹⁴⁾

• Vytvoříme-li na daném obdélníku I posloupnost $\{\mathcal{D}_k\}_{k=1}^\infty$ dělení \mathcal{D}_k , kterou stručně zapisujeme $\{\mathcal{D}_k\}$, vždy tak, že jejich odpovídající normy $\|\mathcal{D}_k\|$ tvoří číselnou posloupnost $\{\|\mathcal{D}_k\|\}$ konvergující k nule¹⁵⁾, pak se taková posloupnost dělení nazývá **normální posloupnost**, což stručně zapišeme (a pro pohodlí přejdeme k indexu n) takto

$$\bullet \{\mathcal{D}_n\} \text{ je } \textit{normální} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_n\| = 0 \text{ nebo stručněji } \|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+ . \quad (6.8)$$

O normální posloupnosti též říkáme, že se *zhušťuje* či *zjemňuje*.¹⁶⁾

- b) Mějme funkci $f(X)$ **ohraničenou** na zmíněném obdélníku I a mějme dělení $\mathcal{D}_n = \{I_1, \dots, I_n\}$ obdélníka I s příslušným výběrem \mathcal{V}_n reprezentantů R_1, \dots, R_n . Symbolem $s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n)$ označený číselný součet

$$s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n) := \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \mu(I_i) = \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i = f(R_1) \cdot \Delta x_1 \Delta y_1 + \dots + f(R_n) \cdot \Delta x_n \Delta y_n \quad (6.9)$$

se nazývá Cauchy-Riemannův součet nebo jen Riemannův součet nebo **integrální součet** funkce f pro dělení \mathcal{D}_n obdélníka I a výběr \mathcal{V}_n reprezentantů R_1, \dots, R_n .¹⁷⁾

- c) Řekneme, že integrální součet $s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n)$ má pro normu dělení $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+$ za limitu (reálné) číslo \int , právě když pro každou normální posloupnost dělení $\{\mathcal{D}_n\}$ intervalu I a pro každou posloupnost odpovídajících výběrů $\{\mathcal{V}_n\}$ reprezentantů **konverguje odpovídající posloupnost integrálních součtů** $\{s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n)\}$ k číslu \int , což vyjádříme dvěma často používanými zápisy limity \int

$$\lim_{\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+} s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n) = \int = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \quad (6.10)$$

nebo takto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{D} \forall \mathcal{V} : \|\mathcal{D}\| < \delta \Rightarrow |s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) - \int| < \varepsilon . \quad (6.11)$$

• **Existuje-li číslo (vlastní limita)** \int , pak se nazývá Riemannův nebo stručně dvojměrný nebo nejčastěji **dvojný integrál** funkce f na obdélníku I , přičemž říkáme, že **dvojný integrál existuje** a podrobněji jej rozešíme

$$\int = \iint_I f(X) dX \text{ nebo } \int = \iint_I f(x, y) dx dy \text{ nebo } \int = \iint_I f dP \text{ nebo } \int = \int_I f \quad (6.12)$$

(resp. neexistuje-li takové číslo, pak říkáme, že integrál *neexistuje*). Říkáme pak, že **funkce f je** (resp. *není*) **integrovatelná (integrace schopná) na obdélníku I** (v Riemannově smyslu).

6.1.11 Dvojný integrál závisí na funkci a na obdélníku, avšak toto číslo nezávisí na dělení obdélníka ani na výběru bodů v dílčích obdélnících.

6.1.12 Příklad integrovatelné konstantní funkce $f(x, y) = k$ (k je číslo) na libovolném $I \subset \mathbb{E}_2$. Pro libovolné dělení \mathcal{D} obdélníka I a libovolný výběr \mathcal{V} bodů R_1, \dots, R_n v dílčích obdélnících I_1, \dots, I_n je totiž integrální součet $s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n k \cdot \mu(I_i) = k \cdot \mu(I) \equiv k \cdot P(I)$. Platí

$$\iint_I f dX = \iint_I k dX = k \iint_I dx dy = kP(I),$$

což pro $k > 0$ je v souladu s geometrickou (Viz 6.1.8) i fyzikální motivací (Viz 6.1.9) pro dvojný integrál.

¹³⁾zde je $\|\mathcal{D}\|$ největší z průměrů dílčích obdélníků, tj. nejdelší z jejich úhlopříček. Nic by se nestalo, kdybychom jako normu $\|\mathcal{D}\|$ dělení \mathcal{D} definovali nejdelší ze stran dílčích obdélníků, tj. $\max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$

¹⁴⁾Takových výběrů \mathcal{V} reprezentantů pro dané dělení \mathcal{D} jistě existuje nekonečně mnoho.

¹⁵⁾tj. $\|\mathcal{D}_k\|$ je *nulová posloupnost*

¹⁶⁾Je zřejmé, že velikost normy $\|\mathcal{D}\|$ je číslo, jež dává informaci, jak „jemné“ je dělení \mathcal{D} neboli jak „jemná“ je síť příslušných uzlových bodů. Termín *zjemnění dělení* lze přesně definovat.

¹⁷⁾Je zřejmé, že k danému n existuje nekonečně mnoho integrálních součtů s_n , protože lze nekonečně mnoha způsoby zvolit dělení \mathcal{D}_n a pro něj též nekonečně mnoha způsoby vybrat množinu \mathcal{V}_n reprezentantů.

6.1.13 Příklad na neexistenci dvojného integrálu ohraničené funkce na obdélníku lze ukázat podobně, jako se uvádí neexistence (Riemannova) určitého integrálu *Dirichletovy*¹⁸⁾ **funkce** $\chi(x)$ na jakémkoli intervalu $[a, b]$ v \mathbb{E}_1 . Lze ukázat, že funkce

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ 1 & \text{pro } x \text{ racionální,} \end{cases}$$

kteřá není **elementární**, není integrovatelná dokonce na žádném obdélníku $I \subset \mathbb{E}_2$. (Přitom ale $\iint_I |\psi(x, y)| dx dy = P(I)$.)

6.1.14 Příklad na neexistenci dvojného integrálu konstantní funkce Především příklad motivuje k uvedení jedné z takových ohraničených množin v \mathbb{E}_2 , že ani konstantní, tedy opět ohraničená funkce na ní není integrovatelná. Lze např. ukázat, že množina M všech bodů libovolného (kompaktního) obdélníka I , jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla, není měřitelná. Příklad dokládá možná překvapující poznatek, že

Tvrzení: Podmnožina měřitelné množiny (např. obdélníka) nemusí být měřitelná.

6.1.15 Dvojný integrál na ohraničené množině $M \subset \mathbb{E}_2$ ohraničené funkce $f(x, y)$ na M nám už umožní např. vypočítat objem tělesa T z obr. 6.2 (kde je $f > 0$). Množinu M vnoříme do libovolného (kompaktního) obdélníka I (tj. $M \subseteq I$) se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, tj. do **souřadnicového obdélníka** I , a definujeme **rozšíření** f_M **funkce** f nulou vně množiny M na obdélník I , tj.

$$f_M(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } (x, y) \in M \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in I \setminus M. \end{cases} \text{ } ^{19)}$$

Je-li rozšíření f_M funkce integrovatelná na (kompaktním) obdélníku I , pak **dvojný integrál** funkce f **na množině** M v \mathbb{E}_2 označujeme a definujeme takto

$$\iint_M f dX = \iint_I f_M dX,$$

a říkáme, že f je **integrovatelná** na množině M , přičemž f se nazývá **integrand** a množina M **integrační obor** či **obor integrace** v \mathbb{E}_2 .²⁰⁾

6.1.16 Geometrický a fyzikální význam dvojného integrálu je zřejmý z obsahu článků 6.1.8, resp. 6.1.9 o geometrické, resp. fyzikální motivaci pro dvojný integrál, jež jsme tam uvažovali sice „jen“ na obdélníku I , ale podle předešlého odstavce můžeme vyslovit závěry platné rovněž **na ohraničené množině** M v \mathbb{E}_2 , jak situaci znázorňuje obr. 6.2. Pak **objem** $V(T)$ tam znázorněného válcového tělesa T lze **definovat** vzorcem

$$V(T) = \iint_M f(x, y) dx dy, \quad (6.13)$$

kde $f > 0$ je **funkce integrovatelná** na $M \subset \mathbb{E}_2$. Později poznáme, že lze vypočítat objemy těles mnohem rozmanitějších tvarů, přičemž můžeme použít i trojný integrál.

• Speciálně, je-li $f = 1$, nabízí se **možnost definovat obsah** $P(M)$ uvažované **ohraničené množiny** M (použitím obsáhlejšího pojmu tzv. **měřitelné množiny**, viz dále), neboť T bude válec o výšce rovné jedné, jehož dolní podstavou (v rovině xy) je M , a rovněž horní podstavou je M (načrtněte si jej). Platí rovnosti čísel (za předpokladu, že M je **měřitelná množina**, viz dále)

$$V(T) = \iint_M 1 \cdot dx dy =: \mu(M) \equiv P(M) \Rightarrow P(M) = \iint_M dx dy. \quad (6.14)$$

• Podobně pro **hmotnost** $H(M)$ **plechu** M v \mathbb{E}_2 s plošnou hustotou $h(x, y)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) máme

$$H(M) = \iint_M h(x, y) dx dy. \quad (6.15)$$

Uvedené definiční vzorce pro objem, resp. obsah či hmotnost uvažovaných, již dosti obecných, ohraničených množin v \mathbb{E}_3 , resp. v \mathbb{E}_2 dávají tušit, že v nich máme k dispozici mocný prostředek k popisu, popř. k řešení úloh z mnoha oborů.

¹⁸⁾Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805-1859), německý matematik.

¹⁹⁾tj. f je zúžení funkce f_M z I na M , což zapisujeme $f_M|_I = f$

²⁰⁾Zvolte si a načrtněte dvě zmíněná rozšíření f na obdélníky I_1, I_2 . Uvědomme si, že takových rozšíření je nekonečně mnoho, ale takto definovaný **dvojný integrál** $\iint_M f dX$ na M vůbec **nezávisí na volbě obdélníků**.

6.1.17 Měřitelná množina. Jordanova-Peanova míra v \mathbb{E}_2 V příkladu 6.1.13 jsme poznali, že ani ohraničená funkce, a dokonce na kompaktním obdélníku, nemusí být integrovatelná. Aby náš integrál existoval pro dostatečně širokou třídu funkcí použitelných v aplikacích, **musíme příliš širokou třídu ohraničených množin zúžit**. Ukazuje se, že **o existenci integrálu rozhoduje též geometrie hranice**²¹⁾ ∂M množiny M . Našeho cíle, integrovat na v praxi použitelných množinách, dosáhneme následující definicí tzv. měřitelné množiny v \mathbb{E}_2 (stručně řečeno jsou to množiny, jejichž obsah $P(M)$ je dán vzorcem (6.14)). Tím též doplníme zcela formální uvedení vzorce (6.14) pro $P(M)$, kde jsme měřitelnost množiny M mlčky předpokládali.

Definice Řekneme, že **množina M ohraničená v \mathbb{E}_2 je měřitelná v \mathbb{E}_2** (v Jordanově²²⁾-Peanově²³⁾ smyslu), **existuje-li dvojný integrál konstantní funkce $f(x, y) = 1$ na M . Jeho hodnotu označujeme $\mu_2(M)$ nebo jen $\mu(M)$, tj.**

$$\mu(M) = \iint_M dx dy \quad (6.16)$$

a nazýváme **dvojměrná (Jordan-Peanova) míra množiny M** .²⁴⁾

6.1.18 Interpretace míry v $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$ Je-li $M \subset \mathbb{E}_2$ měřitelná množina, je zřejmé, že její dvojměrná **míra je nezáporné číslo**, tj. $\mu(M) \geq 0$, které interpretujeme jako **obsah** $P(M)$ této množiny. Doplníme, že jednorozměrnou mírou intervalu v \mathbb{E}_1 je **délka intervalu** a trojrozměrnou mírou množiny (tělesa) M v \mathbb{E}_3 budeme interpretovat jako **objem** $V(M)$.

V inženýrských aplikacích se nejčastěji setkáme s **ohraničenými** množinami, které jsou **měřitelné**, přičemž nejdůležitější z nich, **elementární množiny** a **regulární oblasti**, probereme dále.

6.1.19 Příklady měřitelných množin v $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$ s mírou, kterou umíme nebo budeme umět určit jsou: prázdná množina \emptyset , konečná množina bodů, ohraničený interval, elipsa, asteroida, obdélník, rovnoběžník, kruh, ohraničená šroubovice, ohraničený rotační paraboloid, elipsoid, kvádr, válec, kužel, koule apod.

6.1.20 Množiny míry nula neboli nulové míry jsou v \mathbb{E}_2 tedy ty, pro něž je $\iint_M dx dy = 0 = P(M)$, tj. mají nulový obsah. Hrají důležitou roli nejen v integrálním počtu, ale i v aplikacích. Matematicky nám je (dokonce v \mathbb{E}_n) přiblíží zejména následující věta, po které uvedeme větu 6.1.22, jež umožní určit, zda je množina měřitelná.

6.1.21 Věta (o množině nulové míry) Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ má (Jordan-Peanovu) míru nula, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečný systém k (kompaktních) n -rozměrných intervalů I_1, \dots, I_k takový, že

$$M \subset \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad \sum_{i=1}^k \mu(I_i) < \varepsilon. \quad \star$$

6.1.22 Věta (Nutná a postačující podmínka měřitelnosti množiny) Množina $M \subset \mathbb{E}_n$ je měřitelná, právě když je ohraničená a její hranice ∂M je množina nulové míry (tj. $\mu(\partial M) = 0$). \star

6.1.23 Věta Každá měřitelná množina $M \subset \mathbb{E}_n$ je ohraničená v \mathbb{E}_n a její míra je nezáporné číslo. \star

6.1.24 Věta Prázdná množina a také každá konečná množina bodů v \mathbb{E}_n má míru nula v \mathbb{E}_n . \star

6.1.25 Věta (o sjednocení množin nulové míry) Sjednocení konečně mnoha množin míry nula v \mathbb{E}_n je množina míry nula v \mathbb{E}_n . \star

6.1.26 Věta Podmnožina množiny míry nula v \mathbb{E}_n má míru nula v \mathbb{E}_n . \star

²¹⁾Hranici množiny jsme definovali na str. 49.

²²⁾Jordan (čti: *žordan*), Camille (1838-1922), francouzský matematik.

²³⁾Peano, Giuseppe (1858-1932), italský matematik.

²⁴⁾Poznamenejme, že n -rozměrná míra $\mu_n(M)$ nebo jen $\mu(M)$ množiny M v \mathbb{E}_n je zobecněním n -rozměrného objemu n -rozměrného intervalu (kvádru) I , který jsme definovali v 6.1.5, a vlastně je na pojmu n -rozměrného intervalu I konstruována, takže jsme použili stejné označení jak pro objem, tak pro míru příslušných množin. Zmíněná konstrukce, tzv. **prodloužení míry**, je myšlenka použitá už starořeckými matematiky v řadě speciálních případů. Spočívá v tom, že danou množinu M , jejíž míru hledáme, aproximujeme „zvenitř“, resp. „zvnějšku“ množinou M^* , resp. M^{**} , jejíž míru známe, tj. $M^* \subset M \subset M^{**}$.

²⁵⁾Stručně řečeno: Množina má **míru nula**, právě když může být pokryta konečným počtem kompaktních n -rozměrných intervalů (tj. v \mathbb{E}_2 uzavřených obdélníků) s libovolně malým součtem jejich n -rozměrných objemů (tj. v \mathbb{E}_2 obsahů).

6.1.27 Příklady množin nulové míry v $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$

- a) V \mathbb{E}_1 má (jednorozměrnou) míru nula každá konečná množina bodů.²⁶⁾
- b) V \mathbb{E}_2 mají míru 0 konečné množiny bodů a navíc **křivky** tvořené grafy spojitých funkcí $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$ na kompaktních (tj. ohraničených a uzavřených) intervalech nebo obecněji (definice uvedeme dále) tzv. **jednoduché hladké** (rovinné) křivky jako je např. **kružnice** nebo **její část** či tzv. **jednoduché po částech hladké** (rovinné) křivky jako je křivka složená z **hranice** ∂I **obdélníka** I , která má čtyři hladké části, jimiž jsou strany obdélníka nebo je to např. **asteroida**. Obecně můžeme uvažovat i množiny tvořené konečně mnoha křivkami v \mathbb{E}_2 (tj. rovinnými) všech zmíněných typů.
- c) V \mathbb{E}_3 mají nulovou míru konečné množiny bodů a navíc množiny tvořené konečným počtem prostorových útvarů, které vzápětí uvedeme, a z nich ty, jež ve svém názvu obsahují slovo křivka nebo plocha, budeme definovat později. Z prostorových křivek je to **šroubovice**, prostorový **polygon** (tj. lomená čára). Dále plochy, které jsou grafy spojitých funkcí dvou proměnných $z = \varphi(x, y)$ či $y = \psi(x, z)$ nebo $x = \chi(y, z)$ definovaných na kompaktních množinách v \mathbb{E}_2 , jako je v obecné poloze ohraničená **rovina** nebo ohraničený **rotační paraboloid** $z = x^2 + y^2$, což jsou tzv. **hladké plochy**. Dále jsou to tzv. **po částech hladké plochy**, kam můžeme přiřadit **hranice** (neboli hraniční plochy) **kvádrů**, **čtyřstěnu** nebo **kulovou plochu – sféru**.
Čtenář si jistě všiml, že pro nulovost míry množiny je podstatné říci, jakou dimenzi n má uvažovaný euklidovský prostor \mathbb{E}_n neboli kolikarozměrnou mírou měříme danou množinu.

6.1.28 Úmluva o vlastnosti skoro všech bodů Platí-li nějaká vlastnost (či tvrzení) pro všechny body množiny M v \mathbb{E}_n s výjimkou bodů tvořících v M množinu míry nula, budeme říkat, že uvažovaná vlastnost platí **skoro všude na** M (nebo že platí na M až na množinu míry nula v M).

6.2 Existence dvojného a trojného integrálu. Vlastnosti vícerozměrných integrálů

6.2.1 Poznámka k termínům a označování v článku 6.2 Uvedeme některé z četných společných vlastností dvojného integrálu $\iint_M f(x, y) dx dy$, resp. trojného integrálu $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$, jejichž formulace je v mnohém analogií už probraného určitého integrálu, takže tyto vlastnosti nebudeme u trojného integrálu opakovat. Slovo dvojný či trojný budeme vynechávat a mluvit jen o integrálu, přičemž oba typy integrálů označíme jen $\int_M f$. Použijeme-li v celém článku označení \mathbb{E}_n , půjde nám především²⁷⁾ o dimenzi $n = 2$, resp. $n = 3$. Připomeňme, že výroky „integrál $\int_M f$ existuje“ a „funkce f je integrovatelná na M “ mají stejný význam.

6.2.2 Věta (Kritérium existence n -rozměrného integrálu) Jestliže M je měřitelná množina v \mathbb{E}_n a funkce f je na M ohraničená a **skoro všude** na M spojitá,²⁸⁾ pak integrál $\int_M f$ existuje. ★

6.2.3 Věta Funkce f integrovatelná na množině $M \subset \mathbb{E}_n$ je integrovatelná na každé její měřitelné podmnožině. ★

6.2.4 Některé věty o vlastnostech integrálu

- a) **Linearita integrálu** Jsou-li funkce f, g, f_1, \dots, f_k integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_n$ a $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, pak funkce $f + g, \alpha f$ a $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$ jsou na M integrovatelné a platí

$$\int_M (f + g) = \int_M f + \int_M g, \quad \star$$

aditivita²⁹⁾

$$\int_M \alpha \cdot f = \alpha \cdot \int_M f, \quad \star$$

homogenita

(a matematickou indukci se odtud dá odvodit)

$$\int_M (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 \int_M f_1 + \dots + \alpha_k \int_M f_k. \quad \star$$

linearita

- b) **Integrovatelnost součinu funkcí** Jsou-li funkce f_1, \dots, f_k integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, pak jejich součin $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ je funkce integrovatelná na M . ★

²⁶⁾ Uvedme, že **množina všech racionálních bodů** v \mathbb{E}_1 z každého intervalu nenulové délky už **není množina míry nula**, zatímco množina bodů $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\}$ má míru nula.

²⁷⁾ Mohlo by se obecně též jednat o n rozměrný integrál, zmíněný v odstavci 6.1.1.

²⁸⁾ tj. nemusí být např. spojitá na části nebo i celé hranici ∂M množiny M , což jsou v různých úlohách praxe dost časté případy

²⁹⁾ aditivita integrálu vzhledem k integrandům

- c) **Aditivita integrálu vzhledem k oboru integrace** Je-li funkce f integrovatelná na měřitelných množinách M_1, M_2 v \mathbb{E}_n , pak je integrovatelná na jejich sjednocení $M = M_1 \cup M_2$. Jsou-li navíc M_1, M_2 skoro všude disjunktí (tj. $\mu(M_1 \cap M_2) = 0$)³⁰⁾, pak nastane

$$\int_{M_1 \cup M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f. \star$$

aditivita

- d) **Monotonie integrálu** Jsou-li funkce f, g integrovatelné na množině $M \subset \mathbb{E}_n$ a na M je $g \leq f$, pak

$$\int_M g \leq \int_M f. \star$$

Speciálně, jestliže na M je $0 \leq f$, pak

$$0 \leq \int_M f. \star$$

- e) **Nulový integrál ohraničené funkce na množině nulové míry** Je-li funkce f ohraničená na množině $M \subset \mathbb{E}_n$, která má míru nula v \mathbb{E}_n , pak je integrovatelná na M a

$$\int_M f = 0. \star$$

- f) **Invariantnost (neměnnost) integrálu vzhledem ke změně hodnot funkce na množině míry nula při zachování ohraničenosti funkce** Je-li funkce f integrovatelná na množině $M \subset \mathbb{E}_n$ a funkce g je ohraničená na M , přičemž platí $g = f$ skoro všude na M , pak je g na M integrovatelná a platí

$$\int_M g = \int_M f. \star$$

invariantnost

6.2.5 Důsledky invariantnosti integrálu jsou teoretického a pro nás i praktického rázu. Při řešení různých úloh totiž buď samotná integrovatelná (a tedy ohraničená) funkce je např. **nespojité** na jisté množině M_0 nebo, obecně řečeno, **nejsou splněny předpoklady potřebných vět na množině M_0** , kde M_0 je „naštěstí“ jen **nulové míry**. Množinou M_0 bývají izolované body nebo část či celá hranice ∂M integračního oboru M . Např. v \mathbb{E}_2 u obdélníka mohou být množinou nulové míry některé z jeho vrcholů nebo stran. Při integraci je pak zcela jedno, zda integrujeme na obdélníku otevřeném $(0, 1) \times (0, 2)$ nebo uzavřeném $[0, 1] \times [0, 2]$, neboť jeho hranice má míru nula, avšak integrovaná funkce na ní musí být ohraničená. **Při integraci můžeme vlastně z oboru M vynechat množinu M_0 míry nula a původní integrál počítat jen na oboru integrace $M \setminus M_0$, přičemž výsledek bude díky invariantnosti integrálu stejný.**

6.2.6 Věta o střední hodnotě integrálního počtu Je-li M měřitelná množina v \mathbb{E}_n a f je funkce integrovatelná na M , pak existuje číslo, které označíme symbolem $\langle f \rangle$ nebo \bar{f} , takové, že platí

$$\int_M f = \langle f \rangle \cdot \mu(M), \quad \inf f(M) \leq \langle f \rangle \leq \sup f(M), \quad (6.17)$$

kde $\mu(M)$ je míra množiny M v \mathbb{E}_n . \star

6.2.7 Poznámky k větě o střední hodnotě

- a) Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině $M \subset \mathbb{E}_n$ s mírou $\mu(M) \neq 0$, pak se číslo

$$\langle f \rangle := \frac{1}{\mu(M)} \int_M f \quad (6.18)$$

nazývá **střední hodnota funkce f na množině** (nenulové míry).

- b) Je-li speciálně funkce $f(x, y) > 0$ spojitá na kompaktní oblasti $M \subset \mathbb{E}_2$ o obsahu $P(M)$, pak má věta formulaci klasické věty o střední hodnotě integrálního počtu, jak ji známe i u funkce jedné proměnné. Tj. *existuje (aspoň jeden) bod $R^* \in M$ tak, že platí*

$$\int_M f(x, y) dx dy = f(R^*) \cdot P(M) \quad (6.19)$$

V tomto případě je $\langle f \rangle = f(R^*)$ a rovnost objemů v (6.19) interpretujeme podle odkazu v 6.1.8c).

S jistou nadsázkou řečeno, věta nám dodatečně ospravedlňuje myšlenku vytváření integrálních součtů, započatou už v 6.1.8b).

³⁰⁾tj. překrývají se nejvýše na množině nulové míry

6.3 Fubiniova věta a výpočet dvojného integrálu dvojnásobnou integrací

6.3.1 Elementární množiny (elementární uzavřené oblasti) v \mathbb{E}_2 Uzavřená oblast v \mathbb{E}_2 se nazývá *elementární množina* nebo *elementární obor integrace vzhledem k ose x* , popř. *typu (x, y)* , a označíme ji M^x , platí-li (Viz obr. 6.4 *křivočarého lichoběžníka*)

$$M^x = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge m_1(x) \leq y \leq m_2(x)\},$$

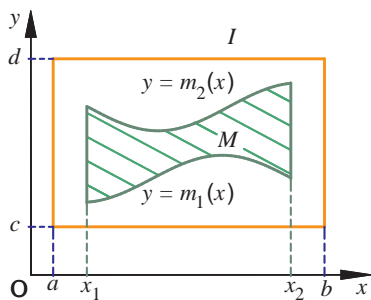
přičemž $x_1 < x_2$ jsou čísla, $m_1(x) < m_2(x)$ pro všechna $x \in (x_1, x_2)$, kde funkce $m_1(x), m_2(x)$ jsou spojité na uzavřeném intervalu $[x_1, x_2]$ neboli $m_1, m_2 \in C[x_1, x_2]$.

• Podobně, uzavřená oblast v \mathbb{E}_2 se nazývá *elementární množina* nebo *elementární obor integrace vzhledem k ose y* , popř. *typu (y, x)* , a označíme ji M^y , platí-li (obr. 6.5)

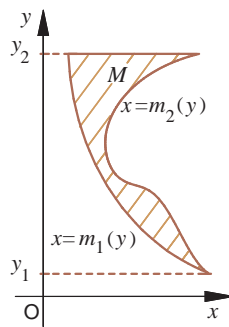
$$M^y = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y_1 \leq y \leq y_2 \wedge m_1(y) \leq x \leq m_2(y)\},$$

přičemž $y_1 < y_2$ jsou čísla, $m_1(y) < m_2(y)$ pro všechna $y \in (y_1, y_2)$, kde $m_1, m_2 \in C[y_1, y_2]$.

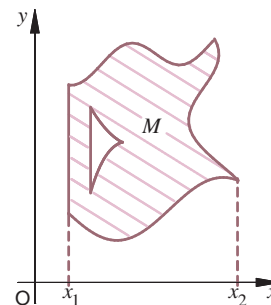
• **Uzavřená oblast M v \mathbb{E}_2 se nazývá elementární množina v \mathbb{E}_2 či elementární obor integrace v \mathbb{E}_2** , je-li možné ji rozdělit na konečně mnoho elementárních množin typu M^x nebo M^y , přičemž průnik každých dvou z těchto množin je množina míry nula³¹⁾ (obr. 6.6). Přitom křivka $y = m_1(x)$ či $x = m_1(y)$ se nazývá *dolní (hraniční) křivka elementární množiny M^x či M^y* , kdežto křivka $y = m_2(x)$ či $x = m_2(y)$ se nazývá *horní (hraniční) křivka elementární množiny M^x či M^y* (Hraniční křivku ∂M elementárního oboru M lze rozdělit na konečný počet křivek, jež lze vyjádřit některou z rovnic $y = \varphi(x), x = \psi(y)$).



Obr. 6.4



Obr. 6.5



Obr. 6.6

6.3.2 Věta o elementárních množinách Elementární množiny v \mathbb{E}_n jsou měřitelné množiny v \mathbb{E}_n . ★

6.3.3 Poznámka Již v odstavci 6.1.18 jsme předeslali, že v aplikacích se nejčastěji vyskytují *elementární obory integrace*. Ty „nezlobí“, neboť jsou „z jednoho kusu“, neobsahují izolované body apod., jsou *to oblasti uzavřené a ohraničené*, tj. *kompaktní*, které jsou *měřitelné* (Viz dále).

• **Hranice ∂M elementární množiny M** , kde M není nutně *jednoduše souvislá* (uzavřená) oblast [tj. může mít ve vnitřku M° konečný počet „děr“ jako v ementálském sýru ohraničených uzavřenými hraničními tzv. *vnitřními křivkami*, na obr. 6.6 je vnitřní křivkou množiny M hranice křivočarého trojúhelníka, označíme ji \mathcal{H}_2], je tvořena *disjunktním sjednocením* nejvýše konečného počtu *vnitřních* (uzavřených) *křivek a vždy jediné hraniční*, tzv. *vnější* (uzavřené) *křivky*, označíme ji \mathcal{H}_1 , jejíž „*vnitřek*“ $\text{int } \mathcal{H}_1$ obsahuje M° jako vlastní část, tj. $M^\circ \subset \text{int } \mathcal{H}_1$ (Zde $\partial M = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$). V našem případě řekneme, že *oblast je dvojnásobně*, obecněji pak, že *je k -násobně souvislá, je-li těchto hraničních křivek k ($k \geq 1$), neboli je vícenásobně souvislá a při $k = 1$ jednoduše souvislá*. Korektní definici vícenásobně souvislé oblasti i obrazce založenou na pojmu křivka, podáme až u křivkového integrálu v 7.5.8 při zobecnění Greenovy věty na vícenásobně souvislé oblasti.

• Je zřejmé, že každá ze zmíněných k *hraničních (uzavřených) křivek* tvořících hranici ∂M elementární oblasti M může být ještě rozdělena na konečný počet křivek konečných délek *určených grafy spojitých funkcí* (včetně konstantních) na (konečně mnoha) uzavřených intervalech, jež lze explicitně vyjádřit některou z rovnic $y = \varphi(x), x = \psi(y)$. Říkáme, že každá z k hraničních křivek je tvořena **po částech** (neboli v konečném počtu) grafy *spojitých* explicitních funkcí. *Spojitosť* zmíněných funkcí tvořících hranici ∂M elementární množiny M je *postačující* podmínkou *pro nulovou míru hranice ∂M v \mathbb{E}_2* , tj. že $\mu(\partial M) = 0$. Vzhledem k *ohraničenosti* M je podmínka $\mu(\partial M) = 0$ (podle věty 6.1.22) *nutnou i postačující podmínkou měřitelnosti elementární množiny M* . Později u křivkového integrálu (odstavce 7.5.7, 7.5.8), pro větší obecnost připustíme, aby každá z k hraničních křivek *elementární množiny*, popř. *obrazce* (Viz

³¹⁾neboli žádné dvě různé z těchto oblastí nemají společné vnitřní body

dále) mohla být tvořena jistou třídou **parametricky** vyjádřených křivek, tzv. **jednoduchých po částech hladkých křivek**.

• V příkladech ověřujeme měřitelnost nějaké množiny $M \subset \mathbb{E}_n$ tak, že ji rozdělíme na konečný počet elementárních množin, z nichž každé dvě mají nejvýše společnou část své hranice ∂M .

6.3.4 Věta Fubiniova³²⁾ pro dvojný integrál

Je-li $f(x, y)$ funkce spojitá na oboru integrace $M \subset \mathbb{E}_2$ (tj. $f \in C(M)$), kde M je elementární obor integrace vzhledem k ose x , resp. y , pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{m_1(x)}^{m_2(x)} f(x, y) dy, \quad (6.20)$$

resp.

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{m_1(y)}^{m_2(y)} f(x, y) dx. \quad \star \quad (6.21)$$

Důkaz: podáme speciálně pro případ, že $M = M^x$ je kompaktní oblast vnořená (obr. 6.4) v obdélníku $I = [a, b] \times [c, d]$. Na M je f ohraničená, neboť je tam spojitá (podle zobecněné Weierstrassovy věty o ohraničenosti funkce v 4.6.11 na str. 74). Dodefinujeme-li funkci f nulou vně M na její **rozšíření** f_M způsobem popsaným v 6.1.15, platí³³⁾

$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= \iint_I f_M(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_M(x, y) dy = \\ &= \int_a^{x_1} dx \int_c^d f_M(x, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^d f_M(x, y) dy + \int_{x_2}^b dx \int_c^d f_M(x, y) dy = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^d f_M(x, y) dy, \end{aligned}$$

neboť pro $x \in [a, x_1]$ a pro $x \in (x_2, b]$ je $f_M(x, y) = 0$, tedy i příslušný integrál funkce f_M je roven nule. Stručně lze psát

$$\int_c^d f_M(x, y) dy = \int_c^{y=m_1(x)} + \int_{y=m_1(x)}^{y=m_2(x)} + \int_{y=m_2(x)}^d = \int_{y=m_1(x)}^{y=m_2(x)} f(x, y) dy,$$

neboť $f_M(x, y) = 0$ pro $y \in [c, m_1(x))$ a pro $y \in (m_2(x), d]$, kdežto $f_M(x, y) = f(x, y)$ pro $y \in [m_1(x), m_2(x)]$ a $x \in [x_1, x_2]$. Tím dostáváme (6.20). ♣

6.3.5 Poznámky Fubiniova věta umožňuje dvojný integrál vypočítat tak, že integrujeme dvakrát po sobě, např. je-li $M = M^x$, nejprve integrujeme přes proměnnou y – tzv. **vnitřní (parciální) integrace**, a pak přes x – **vnější (parciální) integrace**. Proto se oba integrály ve vzorcích vpravo nazývají **dvojnásobné integrály**. Obecně to neznamená nějaké násobení integrálů (jde o skládání zobrazení).

- Integrační meze vnějšího integrálu v dvojnásobném integrálu jsou vždy konstanty.
- Místo přívlastku **elementární** se též používá **základní, normální, regulární** (množina) atd.
- Je-li $M = M^x$, resp. $M = M^y$, je z příslušných obrázků zřejmé, že každá rovnoběžka s osou y , resp. x jdoucí vnitřním bodem $x \in (x_1, x_2)$, resp. $y \in (y_1, y_2)$ protíná hranici ∂M množiny M elementární vzhledem k ose x , resp. y , **právě ve dvou bodech**, přičemž v krajních bodech intervalu mohou tyto rovnoběžky splývat s hranicí ∂M podél úsečky (obr. 6.4).

6.3.6 Pojem obrazce Elementární množina $M \subset \mathbb{E}_2$ jakožto uzavřená oblast $M \subset \mathbb{E}_2$, která je měřitelná v \mathbb{E}_2 (tj. umíme určit její obsah $P(M)$), tedy je ohraničená v \mathbb{E}_2 , tj. M je **měřitelná kompaktní oblast** v \mathbb{E}_2 s hranicí charakterizovanou v odstavci 6.3.3, bude dále často nazývána **OBRAZEC**. Tento termín (jenž zobecníme v definici 7.5.8) používáme od dětských let. Je to např. trojúhelník, obdélník, kruh, mezikruží včetně vnitřní i vnější hraniční kružnice.

6.3.7 Pojem tělesa Nechť $z = f_1(x, y)$ a $z = f_2(x, y)$ jsou funkce spojitě na obrazci M (tj. $f_1, f_2 \in C(M)$), přičemž $f_1(x, y) < f_2(x, y)$ na M° , tj. na **vnitřku** množiny M . Pak **uzavřená** množina³⁴⁾ s označením T^{xy} nebo jen T

$$T^{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

³²⁾Fubini, Guido (1879-1943), italský matematik.

³³⁾Čtenář si s plným porozuměním může přečíst důkaz až po procvičení použité symboliky na několika prvních příkladech.

³⁴⁾Lze ukázat, že je to měřitelná množina

se nazývá *elementární těleso*, též *elementární množina* v \mathbb{E}_3 (*uzavřená elementární oblast* v \mathbb{E}_3) *vzhledem k rovině* xy , a podrobněji toto *těleso* nazýváme *typu* (x, y, z) , resp. *typu* (y, x, z) , je-li obrazec M typu (x, y) , resp. (y, x) . (Připomeňme, že někdy se místo *elementární* používá slovo *regulární*.) Objem $V(T)$ tělesa T definujeme³⁵⁾ vzorcem

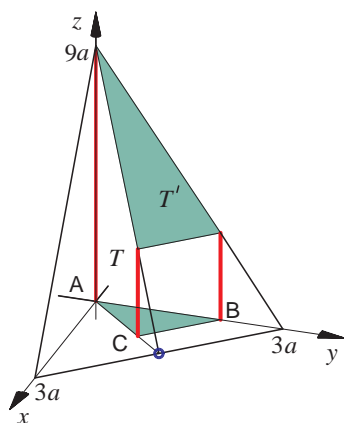
$$V(T) = \iint_M [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy, \quad (6.22)$$

přičemž graf funkce $f_1(x, y)$, resp. $f_2(x, y)$ na M se nazývá *dolní*, resp. *horní plocha* či *podstava tělesa* T . Toto (kolmé válcové) těleso si představíme při pohledu na obr. 6.2 nebo 6.3, kde dolní plocha $f_1(x, y)$ obecně není rovinná a je vždy pod $f_2(x, y)$. Jejich (kolmým) průmětem do roviny xy je obrazec M . Čtenář si snadno vysloví definici těles T^{xz} , T^{yz} , popř. všech dalších typů změnou příslušných termínů a vzorců.

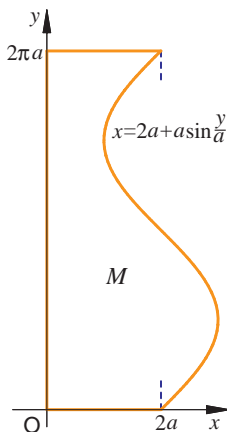
• *Elementární těleso* nebo stručně **TĚLESO** T je *měřitelná kompaktní oblast* v \mathbb{E}_3 , kterou (ve shodě s 6.3.3) lze rozdělit na konečný počet těles T^{xy} nebo T^{xz} nebo T^{yz} , z nichž každá dvě mají nejvýše společnou část své hranice.

• Vzorec platí, i když na M je $f_1 \leq f_2 \leq 0$.

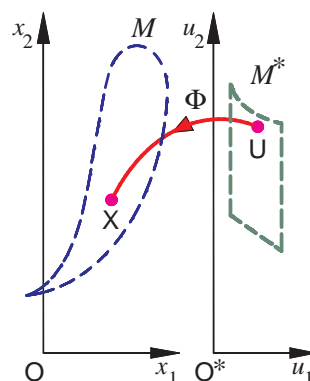
• Později definovaný pojem „*regulární oblast*“ v \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 bude *zobecněním pojmu elementární množina* v \mathbb{E}_2 (obrazec), resp. v \mathbb{E}_3 (těleso) v tom smyslu, že hranici ∂G regulární oblasti G v \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 (jako otevřené množiny, kdy obecně $\partial G \not\subset G$) bude tvořit konečný počet hraničních „*křivek*“, resp. hraničních „*ploch*“ (obecně v parametrickém tvaru) konečné délky, resp. konečného plošného obsahu. Tedy hranice takových oblastí nebude tvořena jen částmi grafů spojitých explicitních funkcí, což nám u dvojného, resp. trojného integrálu stačilo.



Obr. 6.7



Obr. 6.8



Obr. 6.9

6.3.8 Příklad Vypočítejme, popř. interpretujme integrál $\iint_M (9a - 3x - 3y) dx dy$, kde $a > 0$, M je trojúhelník s vrcholy $A(0, 0)$, $B(0, 2a)$, $C(a, a)$. Načrtněte si M .

Řešení: $M = M^x = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq 2a - x\}$ nebo $M = M_1^y \cup M_2^y = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y\} \cup \{a \leq y \leq 2a, 0 \leq x \leq 2a - y\}$. Druhý způsob je pracnější.³⁶⁾ Po ověření předpokladů nám první část Fubiniovy věty dává

$$\begin{aligned} \iint_M f(x, y) dx dy &= 3 \int_0^a dx \int_x^{2a-x} (3a - x - y) dy = 3 \int_0^a dx [3ay - xy - \frac{1}{2}y^2]_{y=x}^{y=2a-x} = \\ &= 3 \int_0^a \{3a(2a - 2x) - x(2a - 2x) - \frac{1}{2}[(2a - x)^2 - x^2]\} dx = \\ &= 3 \int_0^a (2x^2 - 6ax + 4a^2) dx = 5a^3. \end{aligned}$$

Protože všude spojitá funkce $f(x, y) = 9a - 3x - 3y$ je kladná na M , vyjadřuje výsledek $5a^3$ objem $V(T)$ neboli míru $\mu(T)$ (válcového) tělesa T (obr. 6.7), elementárního vzhledem k rovině xy (tedy typu (x, y, z)), tj. průmět T do ní je trojúhelník M , a ten je totožný s jeho dolní podstavou, přičemž jeho horní plocha je jistý trojúhelník T' v rovině $z = 9a - 3x - 3y$. Můžeme přitom přirozeně předpokládat, že a je přímo v měřicí jednotce délky, tj. v metrech (a tedy též souřadnice x, y, z). Za tohoto předpokladu lze náš výsledek interpretovat i fyzikálně nejpohodlněji tak, že místo funkce f zavedeme kladnou funkci $h(x, y) = \alpha \cdot f(x, y)$, kde konstanta α je v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pak výsledek $5\alpha a^3$ (kg) je hmotnost $H(M) = \iint_M h(x, y) dx dy$ nehomogenního trojúhelníkového plechu M s plošnou hustotou $h(x, y)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$), jejíž růst by na M graficky vyjadřoval jistý trojúhelník $T''' = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M \wedge z = \alpha(9a - 3x - 3y)\}$.

³⁵⁾snadno se odvodí, že $V(T)$ je trojrozměrná míra $\mu(T)$ tělesa

³⁶⁾neboť podle principu aditivity vzhledem k oboru integrace M (Viz 6.2.2c)) je $\int_M = \int_{M_1^y} + \int_{M_2^y}$ a museli bychom počítat dva integrály

6.3.9 Příklad Vypočítejme *statický moment* $U_y(M) = \iint_M x \cdot h(x, y) dx dy$ *vzhledem k ose y* homogenního plechu M o dané hmotnosti $H(M)$, kde $h(x, y) = h$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) je konstantní plošná hustota. Množina M je určena vztahy $0 \leq y \leq 2\pi a$, $0 \leq x \leq 2a + a \sin \frac{y}{a}$, kde konstanta $a > 0$ je v metrech.

Řešení: Uvažujeme (obr. 6.8) $M = M^y$. Hustota $h = \frac{H(M)}{P(M)}$. Obsah plechu je

$$P(M) = \iint_M dx dy = \int_0^{2\pi a} dy \int_0^{2a+a \sin \frac{y}{a}} dx = \int_0^{2\pi a} (2a + a \sin \frac{y}{a}) dy = a[2y - a \cos \frac{y}{a}]_0^{2\pi a} = 4\pi a^2.$$

Pak $U_y(M) = h \int_0^{2\pi a} dy \int_0^{2a+a \sin \frac{y}{a}} x dx = \frac{ha^2}{2} \int_0^{2\pi a} dy (2 + \sin \frac{y}{a})^2 = \frac{ha^2}{2} \int_0^{2\pi a} (4 + 4 \sin \frac{y}{a} + \sin^2 \frac{y}{a}) dy =$
 $|\sin^2 \frac{y}{a} = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2y}{a})| = \frac{ha^2}{2} [4y - 4a \cos \frac{y}{a} + \frac{1}{2}(y - \frac{a}{2} \sin \frac{2y}{a})]_0^{2\pi a} = \frac{ha^2}{2} \cdot \frac{9}{2}[y]_0^{2\pi a} =$
 $\frac{9}{8}H(M) \cdot a$ ($\text{kg} \cdot \text{m}$).

6.3.10 Příklad Určeme míru (objem) tělesa určeného vztahy $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq e^{-y^2}$.

Řešení: Průmětem tělesa T elementárního vzhledem k rovině xy do roviny xy je trojúhelník M elementární jak vzhledem k ose x (tj. $M = M^x$), tak y ($M = M^y$). Objem $V(T) = \iint_M e^{-y^2} dx dy$. Při $M = M^x$ (tj. množině typu (x, y)) **integrál** $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$ **neumíme vypočítat**, neboť vnitřní integrál $\int e^{-y^2} dy$ nelze vyjádřit jako elementární funkci (v konečném tvaru). Při $M = M^y$ (tj. množině typu (y, x)) je $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y$, $V(T) = \iint_M f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} y dy = | -\frac{1}{2} y^2 = t, dy = -\frac{1}{2} dt | = -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^t dt = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e}) \doteq 0,3$ (j^3), kde j je nějaká měřicí jednotka délky.

6.4 Transformace vícerozměrných integrálů

neboli substituce ve dvoj- a vícerozměrných integrálech má za cíl, podobně jako u jednorozměrného integrálu, jednak zjednodušit integrand $f(\mathbf{X})$, avšak navíc chceme zjednodušit též obor integrace $M \subset \mathbb{E}_n$.

6.4.1 Připomeňme jednorozměrný integrál $\int_a^b f(x) dx$ na intervalu $I = [a, b] \subset \mathbb{E}_1$. Pro jednoduchost, ať je f spojitá na I , tj. $f \in C(I)$. Proměnnou t jsme zavedli vhodnou substitucí $x = \varphi(t)$ při splnění podmínek

$$\varphi \in C^1(I^*), \quad \boxed{\varphi(I^*) = I}, \quad \text{kde } I^* = [\alpha, \beta], \quad \varphi'(t) \neq 0 \text{ pro } t \in I^*.$$

Protože φ' je na I^* spojitá a nenulová, je buď kladná nebo záporná, tj. funkce φ je **prostým zobrazením**, tedy je to funkce rostoucí nebo klesající, takže je buď $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a platí

$$\int_I f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{I^*} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

nebo při klesající funkci je $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, takže máme

$$\int_I f(x) dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_{I^*} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt.$$

V obou případech tedy platí transformační vzorec

$$\boxed{\int_I f(x) dx = \int_{I^*} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt, \text{ kde } I = \varphi(I^*)}, \quad (6.23)$$

přičemž se v integrálu někdy místo I^* používá symbol $\varphi^{-1}(I)$, který se nazývá **vzor (proobraz) intervalu**. Je to množina definovaná takto $\varphi^{-1}(I) = \{t \in I^* = [\alpha, \beta] \mid \varphi(t) \in I\}$ (Viz 4.2.3 str. 62).

6.4.2 Transformace integrálů především v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3 . Jacobián zobrazení Uvedené pojmy probere společně pro vícerozměrné integrály v \mathbb{E}_n , tak jak jsme to provedli už na několika místech. Symbol \int_M bude opět reprezentovat (Viz 6.2.1) především dvojný \iint_M , resp. trojný integrál \iiint_M , přičemž je výhodné používat indexování, takže bod $\mathbf{X} \in \mathbb{E}_n$ má tvar $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $d\mathbf{X}$ má tvar $d\mathbf{X} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

- a) Předpokládejme, že počítáme integrál $\int_M f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$ na „komplikovaném“ oboru integrace $M \subset \mathbb{E}_n$, a přitom každý bod $\mathbf{X} \in M$ lze jistým zobrazením Φ vyjádřit ve tvaru $\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{U})$, kde body $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)$ probíhají nějakou „méně komplikovanou“ množinu $M^* \subset \mathbb{E}_n$. Jinými slovy, množina M^* je **vzor (proobraz) $\Phi^{-1}(M)$ množiny M** v zobrazení Φ , tj. platí

$$M^* \equiv \Phi^{-1}(M) = \{\mathbf{U} \in M^* \mid \Phi(\mathbf{U}) \in M\}. \quad (6.24)$$

(Připomeňme, že symbol $\Phi^{-1}(M)$ je nerozdělitelný a má smysl i tehdy, když neexistuje *inverzní zobrazení* Φ^{-1}). Podstatu poměrně obtížné problematiky nastíníme u transformace dvojného integrálu při přechodu (transformaci) od kartézského systému souřadnic v proměnných x_1, x_2 do nových proměnných u_1, u_2 v nové soustavě (obecně) křivočarých souřadnic, jakými jsou např. známé polární souřadnice (ϱ, φ) .

- b) Speciálně, nechť $M^* \subset \mathbb{E}_2$ je oblast (tj. otevřená a souvislá množina) a Φ , kde $\Phi(M^*) = M \subset \mathbb{E}_2$, je zobrazení definované soustavou dvou nelineárních rovnic (Viz obr. 6.9. Pro pohodlí kreslíme obě nové osy O^*u_1, O^*u_2 k sobě kolmé)

$$x_1 = \phi_1(u_1, u_2), \quad x_2 = \phi_2(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) = U \in M^*. \quad (6.25)$$

Tuto soustavu můžeme s přihlédnutím k již dříve uvedenému odstavci 5.8.3 na str. 129 chápat jako vektorovou rovnici $\vec{g}(\vec{u}) = \vec{0}$ pro (vektorovou) neznámou $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$, kde $\vec{0} = (0, 0)^T$, a rozepsat ji po složkách

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2; u_1, u_2) &= -x_1 + \phi_1(u_1, u_2) = 0, \\ g_2(x_1, x_2; u_1, u_2) &= -x_2 + \phi_2(u_1, u_2) = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Řešení u_1, u_2 dané implicitně rovnicemi v (6.26) při zvoleném počátečním bodě $({}^0x_1, {}^0x_2; {}^0u_1, {}^0u_2) \in M \times M^*$ [volíme však jen bod $({}^0u_1, {}^0u_2) = U_0 \in M^*$, neboť bod $X_0 = ({}^0x_1, {}^0x_2)$ umíme vyjádřit z (6.25), tj. $X_0 = \Phi(U_0)$] **existuje**,³⁷⁾ jsou-li funkce g_1, g_2 třídy (aspoň) C^1 , tj. jsou-li funkce ϕ_1, ϕ_2 třídy C^1 , a determinant – **jacobián**

$$J(U) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \quad (6.27)$$

zobrazení $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ je v bodě U_0 nenulový, tj. $J(U_0) \neq 0$.

- Pak lze řešení soustavy (6.26), tj. i soustavy (6.25) na jistém okolí $\mathcal{O}(X_0)$ bodu X_0 , tedy jen lokálně, zapsat ve tvaru

$$u_1 = \phi_1^{-1}(x_1, x_2), \quad u_2 = \phi_2^{-1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) = X \in \mathcal{O}(X_0), \quad (6.28)$$

kde funkce ϕ_1^{-1}, ϕ_2^{-1} , jakožto složky inverzního zobrazení $\Phi^{-1} = (\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1})$, jsou též třídy C^1 (na příslušném okolí).

- Uvedené tvrzení má jen lokální platnost. Ukazuje se nutnost požadovat, aby jacobián $J(U) \neq 0$ pro každý bod $U \in M^*$. Naše úvahy opět posuňme do obecnější úrovně.

6.4.3 Jacobián zobrazení Nechť $G^* \subset \mathbb{E}_n$ je oblast a $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ je zobrazení v G^* definované rovnicemi

$$x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n), \quad (6.29)$$

jehož složky mají v G^* 1. parciální derivace podle všech proměnných. Pak z těchto 1. derivací sestavený (funkcionální) determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \quad (\text{pro } n = 2) \text{ nebo obecně} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \quad (6.30)$$

se nazývá **Jacobiův determinant** (čti: *jakobiův*), stručně **jacobián** zobrazení Φ . Označujeme jej J_Φ , $\frac{D(\phi_1, \dots, \phi_n)}{D(u_1, \dots, u_n)}$, $J(u_1, \dots, u_n)$, $J(U)$, nebo jen J , a jeho hodnotu pro $U_0 \in \mathbb{E}_n$ např. $J(U_0)$. Příslušná **Jacobiova matice** se označuje J_Φ , $J(U)$ apod. (Viz též 5.8.3 na str. 129).

6.4.4 Příklad Speciálně, pro funkci $\varphi(t)$ jednoho argumentu ($n = 1$) je $\frac{D(\varphi)}{D(t)} = \varphi'(t)$, pro $n = 2$ je při našem označení $\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(u_1, u_2)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial u_1}$. Je zřejmé, že J závisí na bodu $U \in G^*$.

6.4.5 Regulární zobrazení v oblasti $G^* \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá takové zobrazení Φ dané rovnicemi (6.29), jehož složky jsou funkce třídy C^1 v G^* a³⁸⁾ navíc jeho jacobián je nenulový v G^* (tj. $J_\Phi(U) \neq 0 \forall U \in G^*$).

³⁷⁾ podle tzv. věty o implicitních funkcích, která je zobecněním již dříve uvedené věty 5.5.9 na str. 116

³⁸⁾ tj. $\phi_i(u_1, \dots, u_n)$ mají spojité všechny parciální derivace v G^* , tedy jde o tzv. **zobrazení třídy** C^1 v G^* , čili **hladké zobrazení** 1. řádu v $G^* \Rightarrow \phi_i, i \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce, tudíž Φ je **spojité** zobrazení v G^*

6.4.6 Vlastnosti regulárního zobrazení lze snadno ukázat. Platí

1. **Vlastnost** Regulární zobrazení Φ v oblasti G^* je tam **spojité**.
2. **Vlastnost** Jacobián regulárního zobrazení Φ v G^* tam má **stejně znaménko**.
3. **Vlastnost** Regulární zobrazení Φ v G^* je **vzájemně jednoznačné (bijektivní)**³⁹⁾ zobrazení **jen lokálně v M^*** , tj. v dostatečně malém okolí $O(U_0)$ každého vnitřního bodu U_0 z oblasti G^* .

6.4.7 Pro transformaci integrálů potřebujeme zobrazení regulární i prosté. Bohužel tato poslední vlastnost je jen lokální, tedy **regulární zobrazení** Φ množiny $M^* \subset G^*$ na množinu $M = \Phi(M^*)$ (a tedy surjektivní) **ještě nemusí být globálně** (tj. všude v M^*) **prosté zobrazení** (injektivní). Lze se o tom snadno přesvědčit např. u vzpomenutého zobrazení definovaného v polárních souřadnicích, kdy se dva body z M^* zobrazí do jediného bodu v M . Poznamenejme, že už v 6.4.1 jsme u substituce $x = \varphi(t)$ v určitém integrálu $\int_a^b f(x)dx$ museli požadovat $\varphi'(t) \neq 0$ (tj. podle 6.4.4 vlastně nenulovost jacobíanu $J_\varphi(t)$ (jednosložkového) zobrazení φ) pro každý bod $t \in I^* = [\alpha, \beta]$.⁴⁰⁾

6.4.8 Shrnující a doplňující poznámka k difeomorfismu Připomeňme, že na začátku našich úvah o transformaci integrálu $\int_M f(X)dX$ v 6.4.2a) jsme vzali zobrazení Φ oblasti $M^* \subset \mathbb{E}_n$ tak, že $\Phi(M^*) = M$, $M \subset \mathbb{E}_2$, přičemž jsme dospěli k poznání, že Φ musí být injekce. Tedy každý bod $U \in M^*$ má právě jeden obraz, tj. bod $X \in M$, a takovými obrazy je množina M vyčerpána. Φ je tedy zobrazení množiny M^* na M , čili surjekce. Protože je Φ **injektivní (prosté) a surjektivní, je bijektivní**, což obvykle zapíšeme $\Phi : M^* \leftrightarrow M$, a existuje pak inverzní bijekce $\Phi^{-1} : M \leftrightarrow M^*$. Regulární bijekce Φ mezi otevřenými množinami M^* , M se spojitou inverzní bijekcí Φ^{-1} se nazývá **difeomorfní zobrazení**, stručně **difeomorfismus**.

6.4.9 Věta o transformaci n -rozměrného integrálu

Nechť zobrazení Φ dané rovnicí $X = \Phi(U)$ je regulární a prosté zobrazení oblasti $G^* \subset \mathbb{E}_n$ na jistou oblast v \mathbb{E}_n . Nechť $M^* \subset G^*$, $M = \Phi(M^*)$ jsou měřitelné množiny a $f(X)$ je integrovatelná funkce na M . Pak platí

$$\int_M f(X)dX = \int_{M^*} f(\Phi(U)) \cdot |J(U)|dU, \quad (6.31)$$

kde $J(U)$ je jacobíán zobrazení Φ . ★

Důkaz: patří k obtížnějším a my jsme jeho myšlenku naznačili v předešlých odstavcích.

6.4.10 Důležité poznámky k příkladům

Věta platí, jestliže regularita a bijektivita zobrazení Φ platí jen **skoro všude** na oblastech M^* a M , pokud integrand f je ohraničená funkce, tj. **přidáním nebo odebráním množiny nulové míry** k množině M , resp. M^* **neovlivníme** při výpočtech **existenci ani hodnotu integrálu**. V příkladech bude totiž výchozím integračním oborem M v kartézském systému souřadnic nikoli otevřená elementární oblast (tj. měřitelná), jak postačuje ve větě o transformaci, ale bude to obvykle **obor uzavřený**, tedy obsahující i svou hranici ∂M . V \mathbb{E}_2 proto bude M **obrazec** a v \mathbb{E}_3 (**elementární**) **těleso**, obvykle označené T .

- Už v 6.3.3 jsme předeslali, že měřitelnost množiny $M \subset \mathbb{E}_n$, tedy i tělesa $T \subset \mathbb{E}_3$, ověřujeme v příkladech tak, že ji rozložíme na končený počet elementárních množin (těles T^{xy}, T^{xz}, T^{yz} , viz 6.3.7), z nichž každé dvě mají nejvýše společnou část své hranice ∂M (tj. ∂T).

- Integrační meze vnějšího integrálu (je psán jako první a počítán jako poslední) jsou vždy konstanty.
- Všiměme si formální shody vzorců (6.23) a (6.31).

³⁹⁾tj. **surjektivní (zobrazení na)** a **injektivní (prosté)** zobrazení

⁴⁰⁾Přece jen připomeňme, řekneme, že Φ je **zobrazení prosté (injektivní, injekce)** v množině $G^* \subset \mathbb{E}_n$, když platí

$$U_1, U_2 \in G^*, U_1 \neq U_2 \Rightarrow \Phi(U_1) \neq \Phi(U_2) \text{ nebo}$$

ekvivalentně, s využitím logického **zákona kontrapozice (transpozice)** bývá někdy snadnější ukázat, že platí

$$U_1, U_2 \in G^*, \Phi(U_1) = \Phi(U_2) \Rightarrow U_1 = U_2.$$

6.4.11 Pojem element určované veličiny Pro zapamatování si některých vzorců i jejich rychlejší zavedení (ne přesné odvození), stručně řečeno, jelikož nelze vždy všechno a hned přesně definovat, je účelné zavést pojem *element určované veličiny* (též *diferenciál určované veličiny*). Víme, že dvojný integrál $\iint_M dx dy$ vyjadřuje (dvojměrnou) míru $\mu(M)$ měřitelné (např. elementární) množiny M v \mathbb{E}_2 , tj. její (plošný) obsah $P(M)$. Výraz $dx dy$ nazveme *element obsahu* v \mathbb{E}_2 . Element $dx dy$ tak např. může vyjadřovat obsah každého dvojměrného intervalu I , tj. obdélníka v kartézské rovině Oxy se stranou o délce dx resp. dy , která je rovnoběžná s osou Ox , resp. Oy . Podobně v trojném integrálu výraz $dx dy dz$ nazveme *element objemu* v \mathbb{E}_3 a může např. vyjadřovat objem každého trojměrného intervalu I , tj. kvádru, v kartézském prostoru $Oxyz$ s hranou o délce dx , resp. dy , resp. dz , která je rovnoběžná s osou Ox , resp. Oy , resp. Oz . Konečně výraz $dx_1 dx_2 \dots dx_n$ nebo dX v n -rozměrném integrálu nazveme *element objemu* v \mathbb{E}_n a může reprezentovat n -rozměrný objem $\mu(I)$ (Viz 6.1.5) n -rozměrného (kompaktního) intervalu (kvádru) I , definovaného v analogii s 6.1.2.

• Zdůrazněme, že žádný uvedený *element určované veličiny*, popř. dalších, které uvedeme, **nelze chápat jako „nekonečně malou veličinu“**.⁴¹⁾

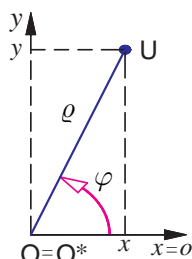
• Poznamenejme, že mnohé elementy, např. *element objemu*, lze abstraktně definovat jako jistou *diferenciální formu* prostředky diferenciální geometrie (matematické analýzy na *varietách*).

• Z věty 6.4.9 plyne mnemotechnické pravidlo, říkájící, že element objemu dX se transformuje podle vzorce

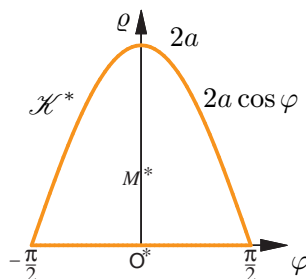
$$dX = |J(U)| \cdot dU, \quad \text{tj.} \quad dx_1 dx_2 \dots dx_n = |J(u_1, \dots, u_n)| \cdot du_1 du_2 \dots du_n. \quad (6.32)$$

6.5 Transformace dvojného integrálu do polárních a zobecněných polárních souřadnic

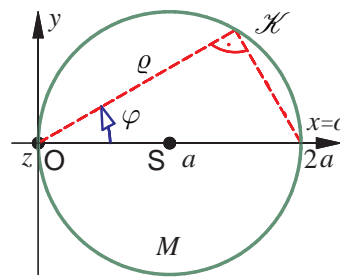
6.5.1 Polární souřadnice Polohu bodu U (obr. 6.10) lze v rovině určit tzv. *polárními souřadnicemi* ϱ, φ , kde souřadnice ϱ je *polární vzdálenost* bodu U ležícího ve zvolené *základní rovině* σ od pevně zvoleného počátku $O^* \in \sigma$ *soustavy polárních souřadnic* zvaného *pól*, souřadnice φ je *polární úhel*. Je to orientovaný úhel, který svírá úsečka O^*U s pevně zvolenou polopřímku $o \in \sigma$ (mající počáteční bod rovněž v O^*), tzv. *polární poloosou*. Chceme-li dosáhnout vzájemné jednoznačnosti při přiřazení bodů v rovině k dvojicím čísel (ϱ, φ) (s výjimkou pólu O^* , který vyhovuje nekonečně mnoha bodům roviny, pro něj je $\varrho = 0, \varphi \in \mathbb{R}$), musíme volit $\varrho > 0, \varphi_0 \leq \varphi < \varphi_0 + 2\pi$, kde φ_0 je libovolné reálné číslo. Nejčastěji volíme buď $0 \leq \varphi < 2\pi$ nebo $-\pi \leq \varphi < \pi$.



Obr. 6.10



Obr. 6.11



Obr. 6.12

6.5.2 Polární transformace Tzv. *polární transformace*, tj. kdy zobrazení $\Phi : \mathbb{E}_2 \supset M^* \rightarrow \mathbb{E}_2$ přiřadí⁴²⁾ každému bodu $U = (\varrho, \varphi)$ v *polárních* (křivočarých) *souřadnicích* (ϱ, φ) z množiny $M^*(\varrho, \varphi)$ bod $X = (x, y)$ v kartézských souřadnicích (x, y) z množiny $M(x, y)$ předpisem $X = \Phi(U)$, tj. $M = \Phi(M^*)$, je určena zobrazením Φ definovaným transformačními rovnicemi

$$\Phi : \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad (6.33)$$

přičemž jacobíán zobrazení Φ je

$$J(\varrho, \varphi) \equiv \frac{D(x, y)}{D(\varrho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi, & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi, & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho. \quad (6.34)$$

⁴¹⁾Současné geometrii není znám „nekonečně malý obdélník nebo kvádr“. Rovněž **neexistuje nekonečně malé kladné číslo**. Proto je nejasné, je-li při odvozování číselných vzorců v aplikacích obsahujících integrál uvedeno: „výsledek získáme jako součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin“, není-li dodáno, co se tím přesně myslí.

⁴²⁾pro znázorněnou situaci, kdy počátek O kartézské souřadnicové soustavy splývá s tzv. *pólem* O^* soustavy polárních souřadnic $O^*\varrho\varphi$, přičemž jsme naznačili obě kartézské osy Ox, Oy a kladnou část osy Ox nechali splýnout s polární poloosou o

Máme tedy mnemotechnické pravidlo pro transformaci elementu obsahu $dP = dx dy$ v \mathbb{E}_2 do polárních souřadnic

$$\boxed{dx dy = \rho d\rho d\varphi}. \quad (6.35)$$

• Poznamenejme, že transformace je výhodná, obsahuje-li integrand $f(x, y)$ výrazy $(x^2 + y^2)$, popř. je-li výchozím integračním oborem M kruh nebo jeho vhodná část, např. výseč mezikružší apod.⁴³⁾

6.5.3 Záměna pořadí souřadnic v příkladech Často se v polárních souřadnicích (ρ, φ) podaří najít závislosti typu $\rho = f(\varphi)$, tedy že oblast M^* je typu (φ, ρ) a vyjádříme ji např. takto $M^{*\varphi\rho} = \{(\varphi, \rho) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, f_1(\varphi) \leq \rho \leq f_2(\varphi)\}$ (viz obr. 6.11). Co ovlivníme touto záměnou proměnných? Vymění se dva řádky v jacobianu, takže vyjde $J(\varphi, \rho) = -\rho \Rightarrow |J| = \rho > 0$. Integrál zůstane týž. Uvědomme si, že počítáme v soustavě polárních souřadnic $O^*\varphi\rho$.⁴⁴⁾

6.5.4 Příklad Určeme moment setrvačnosti $I_O(M) = \iint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y) dx dy$ vzhledem k počátku O soustavy souřadnic (a zároveň $I_z(M)$ vzhledem k ose z) homogenního plechu $M \subset \mathbb{E}_2$ o dané hmotnosti $H(M)$, jenž je ohraničen křivkou $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$.

Řešení: Uvedeme třemi způsoby. Křivkou je kružnice $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ se středem $S = (a, 0)$ a poloměrem a .

- a) Nechť pól $O^* \equiv S$, tj. má kartézské souřadnice $(a, 0)$, takže je posunut. Pak máme transformaci definovanou zobrazením $\Phi: x = a + \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Jacobian $J(\rho, \varphi) = \rho$ (Proč?). Vzorem $\Phi^{-1}(M) \equiv M^*$ kruhu M je obdélník (elementární obor) $M^*(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ten se tedy zobrazí na kruh $M(x, y): (x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ (Kde není zobrazení regulární, popř. prosté? Je to nejvýše množina míry nula?). Protože hustota je $h(x, y) = h = \frac{H}{\pi a^2}$, platí

$$\begin{aligned} \boxed{I_O(M) = I_z(M)} &= \iint_{M^*} (a^2 + 2a\rho \cos \varphi + \rho^2) h \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ h \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} (a^2 \rho + 2a\rho^2 \cos \varphi + \rho^3) d\varphi &= h \int_0^a d\rho [a^2 \rho + 2a\rho^2 \sin \varphi + \rho^3 \varphi]_0^{2\pi} = \\ \frac{3}{2} \pi h a^4 &= \frac{3}{2} H(M) a^2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

- b) **Věta Steinerova** Moment setrvačnosti I_p (i nehomogenního) tělesa vzhledem k dané přímce p je roven momentu setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k přímce r rovnoběžné s p a procházející těžištěm tělesa zvětšeném o $a^2 H$, kde H je hmotnost tělesa a a je vzdálenost přímek p a r , tj. $\boxed{I_p = I_r + a^2 H}$. ★

U nás je přímkou p osa z kolmá k rovině xy a promítající se do počátku $O(0, 0)$, tj. $I_p = I_z = I_O$. Přímkou r je přímka kolmá k rovině xy promítající se do středu $S(a, 0)$ kruhu M , vzdálená od r o a . Tedy $I_r = I_O$. Platí $I_O = I_S + a^2 H$. Posuneme-li opět pól O^* do S , je definováno zobrazení $\Phi: x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ na obdélníku $M^*: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a$. Pak $I_S = \iint_M (x^2 + y^2) h dx dy = \iint_{M^*} \rho^2 h \cdot \rho d\varphi d\rho = h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} H a^2$. Odtud $I_O(M) \equiv I_z(M) = \frac{1}{2} H a^2 + a^2 H = \frac{3}{2} H(M) a^2$.

- c) Často uvažujeme pól $O^* = O$. Pak máme zobrazení $\Phi: x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Podle obr. 6.12 je $\frac{\rho}{2a} = \cos \varphi$, tj. $\rho = 2a \cos \varphi$ je rovnice vzoru \mathcal{K}^* v polárních souřadnicích zadané kružnice \mathcal{K} . Kruh M se tedy transformuje na „kosinusovou úseč“ (obr. 6.11) $M^*: -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$ (Má Φ porušení regularitu, popř. injektivitu nejvýše na množině nulové míry?). **Využitím symetrie oboru M^* a aditivity** integrálu vzhledem k oboru integrace získáme nulovou dolní mez u vnějšího integrálu, tj. $I_O = \iint_{M^*} \rho^2 h \cdot \rho d\varphi d\rho = h \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^3 d\rho = 8ha^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi =$
 $\left| \int \cos^4 \varphi d\varphi = \int (\cos^2 \varphi)^2 d\varphi = \int \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{1}{4} \int (1+2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)) d\varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi\right) + C = \frac{3}{8}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi + C \right| = 8ha^4 \cdot \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} H(M) a^2$.

6.5.5 Příklad Najdeme souřadnice těžiště $T = (x_T, y_T)$ homogenní tenké desky ve tvaru $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \geq a^2, (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$ (Viz obr. 6.13) podle vzorce

$$x_T = \frac{U_y(M)}{H(M)}, \text{ kde } \boxed{U_y(M) = \iint_M x \cdot h(x, y) dx dy}$$

je statický moment desky M vzhledem k ose y ⁴⁵⁾ a $H(M)$ je jeho hmotnost.

Řešení: Evidentně $y_T = 0$. Hustota $h(x, y) = h = \text{const}$. Platí $\tan \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{3}$. S využitím

⁴³⁾ podrobněji, je-li vzor M^* množiny M obor, který je elementární typu (ρ, φ) , resp. (φ, ρ)

⁴⁴⁾ podrobněji o tom a souvislosti s tzv. **vektory lokální báze** viz 6.9.1 v poznámce pod čarou

⁴⁵⁾ známý z příkladu 6.3.9

příkladu 6.5.4c) máme

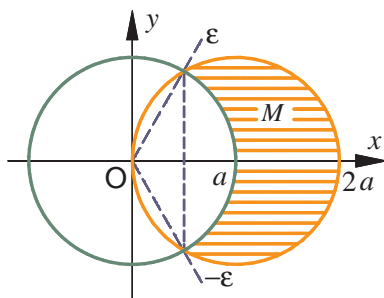
$$H(M) = \iint_M h dx dy = h \iint_{M^*} \varrho d\varphi d\varrho = h \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_a^{2a \cos \varphi} \varrho d\varrho = ha^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2(1 + \cos 2\varphi) - 1) d\varphi = ha^2 [\varphi + \sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{3}} = (\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) ha^2. \text{ Dále je } U_y(M) = \iint_{M^*} \varrho \cos \varphi h \cdot \varrho d\varphi d\varrho = h \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \varphi d\varphi \int_a^{2a \cos \varphi} \varrho^2 d\varrho = \frac{2ha^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (8 \cdot \underbrace{\cos^4 \varphi - \cos \varphi}) d\varphi = \frac{2ha^3}{3} [3\varphi + 2 \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi - \sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2ha^3}{3} [\pi + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}] = (\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}) ha^3.$$

Tedy $x_T \doteq 1,321a$, takže $T = (1,321a; 0)$.

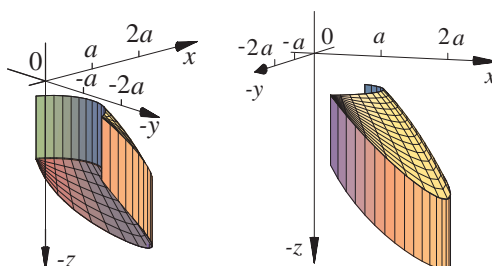
6.5.6 Příklad Vypočítejme míru $\mu(T)$ tělesa T (Viz obr. 6.14), jehož průmětem do roviny xy je obrazec M z příkladu 6.5.5,⁴⁶⁾ a dále je ohraničeno grafy funkcí $z_1(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $z_2(x, y) = -\frac{1}{3a}(x^2 + y^2)$, $a > 0$.

Řešení: Plochy z_1 , resp. z_2 , tj. rotační kuželová plocha (dolní část), resp. rotační paraboloid s osami v ose z , jsou otevřeny proti směru osy z a mají vrchol v počátku $O(0, 0, 0)$. Určíme průnik ploch: $z_1 = z_2$, tj. $-\sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{1}{3a}(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{9a^2}(x^2 + y^2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (3a)^2$. Průnikem ploch z_1, z_2 ať je kružnice \mathcal{K} s poloměrem $3a$ a středem $S(0, 0, -3a)$ ležící v rovině $z = -3a$, jejím (kolmým) průmětem do roviny xy ať je kružnice \mathcal{K}_1 . Tato kružnice je hranicí kruhu M_1 v rovině xy se středem v O a poloměrem $3a$, uvnitř něhož je M . Protože zřejmě pro body kruhu M_1 , a tedy i obrazce M , je $z_1 \leq z_2$, je z_1 , resp. z_2 dolní, resp. horní plocha tělesa T . S využitím symetrie tělesa T vypočítáme jeho objem

$$\begin{aligned} \mu(T) \equiv V(T) &= \iint_M [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy = \iint_M [-\frac{1}{3a}(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy = \iint_{M^*} (-\frac{\varrho^2}{3a} + \varrho) \cdot \varrho d\varphi d\varrho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_a^{2a \cos \varphi} (-\frac{\varrho^3}{3a} + \varrho^2) d\varrho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi [-\frac{\varrho^4}{12a} + \frac{\varrho^3}{3}]_a^{2a \cos \varphi} = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{4}{3} \cos^4 \varphi + \frac{8}{3} \cos^3 \varphi - \frac{1}{4}) d\varphi = \\ &= 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + C \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2a^3 [-\frac{4}{3} (\frac{3}{8} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi) + \frac{8}{3} (\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi) - \frac{1}{4} \varphi]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2[-\frac{3}{4} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{24} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{9} \frac{3\sqrt{3}}{8}] a^2 = \frac{1}{2} (\frac{41}{12} \sqrt{3} - \pi) a^3 \doteq 1,388a^3. \end{aligned}$$



Obr. 6.13



Obr. 6.14

6.5.7 Transformace do zobecněných polárních souřadnic neboli do *semipolárních souřadnic* (z kartézských souřadnic x, y) je dána rovnicemi

$$x = a \cdot \varrho \cos \varphi, \quad y = b \cdot \varrho \sin \varphi, \quad (6.37)$$

kde a, b jsou zvolené kladné konstanty. Tyto souřadnice opět označíme (ϱ, φ) a je zřejmé, že míra změny ϱ ve směru osy x , resp. y se obecně liší.

• **Transformace je výhodná**, obsahuje-li integrand $f(x, y)$ **výrazy** typu $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$, popř. je-li výchozím integračním oborem M **vnitřek elipsy** nebo vnitřek její vhodné části, např. **výseč elipsy** apod. Snadno se odvodí, že pro **jacobián**, resp. transformaci **elementu obsahu** $dP = dx dy$ v \mathbb{E}_2 nebo vhodných výrazů platí

$$\boxed{J(\varrho, \varphi) = ab\varrho}, \quad \boxed{dx dy = ab\varrho \cdot d\varrho d\varphi}, \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varrho^2}.$$

6.5.8 Příklad Odvoďme vzorec pro obsah $P(E_{\varphi_0})$ **eliptické výseče** elipsy (v tradiční **osové poloze**) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, která je určena středovým úhlem φ_0 měřeným od kladné části osy x ($0 < \varphi_0 \leq 2\pi$).

Řešení: Horní mez pro ϱ není geometricky zřejmá. Pro body na a uvnitř elipsy je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{(a\varrho \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(b\varrho \sin \varphi)^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varrho \leq 1$. Proto $P(M) = \iint_M dx dy = \iint_{M^*} ab\varrho d\varrho d\varphi = ab \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^1 \varrho d\varrho = \frac{1}{2} ab\varphi_0 \Rightarrow$

$\boxed{P(E_{\varphi_0}) = \frac{1}{2} ab\varphi_0}$. Pro obsah vnitřku elipsy pak máme $P(E) = \pi ab$.

⁴⁶⁾neboli jde o část prostoru $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 \geq a^2 \wedge (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$

6.6 Vybrané fyzikální aplikace dvojného integrálu

jsme již poznali v některých příkladech, kdy fyzikálním *modelem měřitelné množiny* M v \mathbb{E}_2 byla nehomogenní velmi tenká rovinná deska, stručně *deska, plech* M o plošné hustotě $h(x, y)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$), jejichž některé mechanické charakteristiky počítáme takto:

hmotnost desky

$$H(M) = \iint_M h(x, y) dx dy, \text{ kde zavádíme } \textit{element hmotnosti} \quad dH = h(x, y) dx dy, \quad (\text{kg})$$

statický moment vzhledem k ose x , k ose y

$$U_x(M) = \iint_M y \cdot h(x, y) dx dy, \quad U_y(M) = \iint_M x \cdot h(x, y) dx dy \quad (\text{kg} \cdot \text{m})$$

souřadnice těžiště $T(x_T, y_T)$

$$x_T = \frac{U_y(M)}{H(M)}, \quad y_T = \frac{U_x(M)}{H(M)} \quad (\text{m})$$

moment setrvačnosti vzhledem k ose x, y, z nebo počátku $O(0, 0)$

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \cdot h(x, y) dx dy, \quad I_y(M) = \iint_M x^2 \cdot h(x, y) dx dy$$

$$I_z(M) = I_O(M) = \iint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y) dx dy = I_x(M) + I_y(M) \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

kinetická energie při rotaci konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}) kolem osy z

$$E_z(M) = \frac{1}{2} \omega^2 I_z(M) = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y) dx dy \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}).$$

6.7 Trojný integrál stručně

6.7.1 Shrnutí Trojný (trojrozměrný, též objemový) integrál je podobně jako dvojný integrál jisté zobrazování, které funkci $u = f(x, y, z)$ tří proměnných a množině $T \subseteq D_f \subseteq \mathbb{E}_3$ přiřadí reálné číslo, popř. slovo „neexistuje“. Definuje se obdobně jako dvojný integrál, bohužel s tím geometrickým omezením pro naši představivost, že hodnoty funkce f jsou čtvrtou souřadnicí bodů tvořící její graf už v \mathbb{E}_4 . Proto nastupují především fyzikální interpretace. Místo obdélníka je základem úvah trojrozměrný interval, tj. kvádr $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Např. chceme určit jeho hmotnost, je-li v něm hmota rozložena s danou nekonstantní hustotou $h = f(x, y, z)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Provedeme **dělení** $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_n\}$ kvádrů I na dílčí kvádry I_1, \dots, I_n pomocí pravoúhlé nepravidelné sítě rovin (rovnoběžných se souřadnicovými rovinami) při **normě** $\|\mathcal{D}\|$ dělení, kterou bývá nejdelší z (tělesových) úhlopříček dílčích kvádrů nebo **nejdelší z jejich hran**, tj.

$$\|\mathcal{D}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i\}. \quad (6.38)$$

Provedeme libovolný **výběr** $\mathcal{V} = \{R_1, \dots, R_n\}$ **reprezentantů** (tj. bodů) $R_i \in I_i$ ($i = 1, \dots, n$) z dílčích intervalů I_i . Vytvoříme **normální posloupnost** $\{\mathcal{D}_n\}$ dělení \mathcal{D}_n , tj. kdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_n\| = 0$, stručněji $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+$, s odpovídající posloupností výběrů $\{\mathcal{V}_n\}$ reprezentantů.

• Pak, ve shodě s podrobnější formulací v 6.1.10c), jestliže pro ohraničenou funkci f na kvádrů I a pro každou normální posloupnost $\{\mathcal{D}_n\}$ dělení kvádrů I a pro každou posloupnost $\{\mathcal{V}_n\}$ odpovídajících reprezentantů **konverguje** odpovídající **posloupnost** Riemannových **integrálních součtů** $\{s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n)\}$, kde

$$s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n) := \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \mu(I_i) = \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad (6.39)$$

a kde $\mu(I_i)$, resp. $\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ je objem (míra) i -tého kvádrů I_i , k číslu f , tj. platí-li

$$\lim_{\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+} s(f, \mathcal{D}_n, \mathcal{V}_n) = f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(R_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad (6.40)$$

nazývá se toto číslo (tato vlastní limita) \int **trojný integrál** funkce f na kvádrů I (ve smyslu Riemanna). Podrobněji, jak víme, jej místo \int rozepisujeme např. $\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz$.

• Analogicky jako v 6.1.15 definujeme trojný integrál $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ rozšířením f_M funkce f nulou vně ohraničené množiny M .

• Pojem ohraničené množiny je příliš široký a zahrnuje ještě i takové množiny, např. množinu všech bodů libovolného kompaktního kvádrů, jejichž některá ze souřadnic je racionální číslo, že na nich neexistuje ani integrál z konstantní (tj. ohraničené) funkce. Pro účely úloh z převážné části aplikací se omezíme na měřitelné množiny.

Definice Řekneme, že ohraničená množina M v \mathbb{E}_3 je **měřitelná** v \mathbb{E}_3 (v Jordan-Peanově smyslu),

existuje-li trojný integrál konstantní funkce $f(x, y, z) = 1$ na M . Jeho hodnotu označujeme $\mu_3(M)$ nebo jen $\mu(M)$, tj.

$$\mu(M) = \iiint_M dx dy dz \quad (6.41)$$

a nazýváme **trojrozměrná (Jordan-Peanova) míra množiny M** .

- **Trojrozměrná míra $\mu(M)$** definuje objem měřitelné množiny, nejčastěji elementárního tělesa T

$$V(T) = \iiint_T dx dy dz, \text{ kde } dV := dx dy dz$$

se nazývá **element objemu** v \mathbb{E}_3 . Vztahem (6.40) jsme limitou integrálních součtů vlastně definovali hmotnost $H(I)$ sice jen nehomogenního kvádrů, avšak principem rozšíření f_M funkce f nulou dospějeme k hmotnosti měřitelné množiny, nejčastěji elementárního tělesa T s hustotou $h(x, y, z)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)

$$H(T) = \iiint_T h(x, y, z) dx dy dz.$$

- Příklady měřitelných množin v \mathbb{E}_3 jsme uvedli v 6.1.19 a další pojmy, jako **množina míry nula** a vlastností měřitelných množin i integrálů jsme formulovali nejčastěji v \mathbb{E}_n a je dobré si je přečíst. Zvlášť připomeňme pojem **elementárního tělesa** v 6.3.7 na str. 153, **větu o transformaci integrálu** 6.4.9 str. 157 a za ní následující **důležité poznámky k příkladům** 6.4.10 na str. 157.

6.8 Fubiniova věta pro trojný integrál

6.8.1 Věta Fubiniova pro trojný integrál

Je-li $f(x, y, z)$ funkce spojitá na oboru integrace $T \subset \mathbb{E}_3$ (tj. $f \in C(T)$), kde T je elementární těleso T^{xy} vzhledem k rovině xy , podrobněji, nechť T je těleso typu (x, y, z) , kde $(x, y) \in M^x$, M^x je obrazec typu (x, y) (Viz 6.3.7, 6.3.6 a 6.3.1), tj.

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x_1 \leq x \leq x_2, m_1(x) \leq y \leq m_2(x), f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}, \quad (6.42)$$

pak platí

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{M^x} dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{m_1(x)}^{m_2(x)} dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad \star \quad (6.43)$$

Důkaz: je podobný jako pro f v \mathbb{E}_2 . Čtenář ať si zformuluje věty pro pět zbývajících typů těles.

6.8.2 Poznámka První rovnost ve Fubiniově větě převádí trojný integrál na vnější dvojný a vnitřní jednoduchý integrál nebo opačně. (Posledním případem se nebudeme zabývat). Další rovnost dá tzv. **trojnásobný integrál**.

6.8.3 Příklad Odvoďme, kolik ještě zbylo tekutiny ve sklenici tvaru válce o poloměru a a výšce v poté, co po vylití zůstala nakloněná tak, že v ní hladina prochází středem dna a dotýká se okraje.

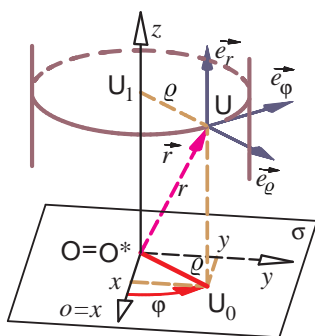
Řešení: $T = T^{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq \frac{v}{a}y\}$, $V(T) = \int_T dx dy dz = 2 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\frac{v}{a}y} dz = \frac{2v}{a} \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y dy = \frac{v}{a} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{v}{a} [a^2x - \frac{x^3}{3}]_0^a = \frac{2}{3}a^2v$. Nebo transformováním do polárních souřadnic $V(T) = \iint_M dx dy \int_0^{\frac{v}{a}y} dz = \frac{v}{a} \iint_M y dx dy = \frac{v}{a} \iint_{M^*} \varrho^2 \sin \varphi d\varphi d\varrho = \frac{v}{a} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^a \varrho^2 d\varrho = \frac{1}{3}a^2v \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3}a^2v$.

6.9 Transformace trojného integrálu do cylindrických a zobecněných cylindrických souřadnic

6.9.1 Transformace trojného integrálu do cylindrických neboli válcových souřadnic Přiřazení souřadnic bodům prostoru je vzájemně jednoznačné bez výjimky jen v pravoúhlé soustavě. V cylindrických, sférických i dalších souřadnicích, které uvedeme, tomu tak není. Všechny body na ose z jsou tzv. **singulární body** těchto soustav. Souřadnice φ pro ně může být zvolena zcela libovolně. Avšak tyto body jsou jednoznačně určeny již ostatními dvěma souřadnicemi.

• **Ortogonalní křivočará⁴⁷⁾ soustava souřadnic**, tj. uspořádaná trojice čísel označovaných (ϱ, φ, z) , se nazve **cylindrická soustava souřadnic** v \mathbb{E}_3 a s využitím obr. 6.15 se zavede dvěma kroky. Nejprve v \mathbb{E}_3 zvolíme bod O^* za **počátek** souřadnicové soustavy a vedeme jím tzv. **základní rovinu** σ . Bodem O^* vedeme přímkou **kolmou** k rovině σ a nazveme ji **osa** z . V rovině σ zavedeme **polární souřadnice** s pólom v O^* a polární poloosou o . Druhým krokem je, že každému bodu $U \in \mathbb{E}_3$ **neležícímu** na ose z přiřadíme uspořádanou trojici čísel (ϱ, φ, z) následovně. Kolmý průmět bodu U do roviny σ označíme U_0 . **Polární souřadnice** průmětu U_0 v rovině σ označíme tradičně ϱ a φ , tj. ϱ je **polární vzdálenost** bodu U_0 od O^* a φ je příslušný **polární úhel**. Pak promítneme bod U kolmo na osu z a získáme bod U_1 , jenž má na ose z **kartézskou** souřadnici z . Bodu U po těchto dvou krocích přiřadíme uspořádanou trojici čísel (ϱ, φ, z) a píšeme $U = U(\varrho, \varphi, z)$. Uvedeným způsobem získaná uspořádaná trojice (ϱ, φ, z) **cylindrických souřadnic** se nazývá **pravotočivá cylindrická** nebo **válcová soustava souřadnic** (neboť na zmíněném obrázku jsou v příslušném pořadí **vektory lokální báze** $\{\vec{e}_\varrho(U), \vec{e}_\varphi(U), \vec{e}_z(U)\}$ vždy navzájem **kolmé** a tvoří lokální **pravotočivou bázi** – tvoří **pravotočivý trojhran**). Zřejmě je $0 < \varrho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

• Zavedeme-li do \mathbb{E}_3 **kartézskou soustavu souřadnic** $Oxyz$ tak jak na zmíněném obrázku, vidíme,



Obr. 6.15

že příslušná transformace do cylindrických souřadnic je dána zobrazením $\Phi: \mathbb{E}_3 \supset T^* \rightarrow \mathbb{E}_3$, které každému bodu $U(\varrho, \varphi, z)$ v cylindrických souřadnicích (ϱ, φ, z) z (elementárního) tělesa $T^*(\varrho, \varphi, z)$ přiřadí bod $X(x, y, z)$ v **kartézských souřadnicích** (x, y, z) z tělesa $T(x, y, z)$ předpisem $X = \Phi(U)$, tj. $T = \Phi(T^*)$, podrobněji

$$\Phi: \quad x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (6.44)$$

přičemž jacobian zobrazení Φ , jak lze snadno z (6.30) v 6.4.3 určit, je

$$J(\varrho, \varphi, z) = \frac{D(x, y, z)}{D(\varrho, \varphi, z)} = \varrho. \quad (6.45)$$

• Máme tedy mnemotechnické pravidlo pro transformaci elementu objemu $dV = dx dy dz$ do cylindrických souřadnic

$$dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz, \quad \text{přičemž } x^2 + y^2 = \varrho^2. \quad (6.46)$$

Transformaci do cylindrických souřadnic provádíme při $\varrho > 0$, φ vybíráme z libovolného intervalu délky 2π , $z \in \mathbb{R}$.

• **Transformace je výhodná**, obsahuje-li integrand $f(x, y, z)$ **výrazy** $(x^2 + y^2)$, popř. je-li výchozím integračním oborem T **rotační válec** nebo jeho vhodná část, např. **rotační kužel** apod. Aplikací věty 6.4.9 o transformaci, v tomto případě trojného integrálu, získáme vzorec

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z) \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz. \quad (6.47)$$

6.9.2 Připomínka Ve shodě s 6.4.10 připomeňme, že vzorec (6.47) platí, jestliže regularita a bijektivita zobrazení Φ platí jen **skoro všude** na tělesech T^* a T , přičemž však integrand f je ohraničená funkce. Je tomu tak i při transformacích do dalších souřadnic, které uvedeme.

6.9.3 Příklad Vypočítejme kinetickou energii $E_z(T) = \frac{\omega^2}{2} \iiint_T (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dx dy dz$ tělesa T rotujícího kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}) a s hustotou úměrnou souřadnici z , tj. $h(x, y, z) = \alpha \cdot z$ (α je v $kg \cdot m^{-4}$). T je ohraničeno plochami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = a$, kde $a > 0$ (je v metrech).

Řešení: Těleso $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq a\}$ je rotační kužel s vrcholem v počátku a výškou a . Jeho vzor – těleso T^* v zobrazení $\Phi: x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi, z = z$ definujícím transformaci do cylindrických souřadnic (ϱ, φ, z) , chceme určit. Podle obr. 6.16 mají vzory hraničních ploch $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, resp. $z = a$ tělesa T v cylindrických souřadnicích rovnice $z = \varrho$, resp. $z = a$, což jsou roviny ohraničující těleso T^* . Polární úhel φ z důvodu jednoznačnosti vymejíme dalšími zvolenými hraničními rovinami, např. $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Rovina $\varrho = 0$ získaná transformací kartézské osy z ohraničuje T^* již ze všeobecné podmínky $\varrho \geq 0$.

⁴⁷⁾ **Ortogonalní křivočará soustava souřadnic** v \mathbb{E}_3 je taková **křivočará soustava souřadnic** (u_1, u_2, u_3) [Poznamenejme, že když každému bodu $U \in \mathbb{E}_3$ přiřadíme uspořádanou trojici čísel (u_1, u_2, u_3) a obráceně, každé takové trojici odpovídá právě jeden bod v \mathbb{E}_3 , říkáme, že jsme do prostoru \mathbb{E}_3 zavedli (obecně křivočarou) soustavu souřadnic o **křivočarých souřadnicích** u_1, u_2, u_3 , u níž tzv. (jednotkové) **vektory lokální báze** $\{\vec{e}_{u_1}(U), \vec{e}_{u_2}(U), \vec{e}_{u_3}(U)\}$ v bodě $U \in \mathbb{E}_3$ [což je uspořádaná trojice lineárně nezávislých **tečných** vektorů k příslušným tzv. **souřadnicovým křivkám** $\mathcal{K}(u_1), \mathcal{K}(u_2), \mathcal{K}(u_3)$ v bodě U , přičemž tyto vektory, vázané na bod U , jsou orientovány ve směru rostoucí hodnot souřadnic u_1, u_2, u_3] jsou navzájem kolmé. Poznamenejme, že zatímco v **křivočarých souřadnicích** se směr vektorů **lokální báze** mění se změnou polohy bodu U , v **kartézských souřadnicích** (resp. v obecných **přímočarých** souřadnicích na afinním prostoru, viz str. 19) jsou vektory lokální báze **konstantní** neboli v každém bodě $X \in \mathbb{E}_3$ jsou rovny vektorům $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Kolmým průmětem T^* do roviny $\varrho\varphi$ dostaneme obdélník M^* . Platí $T^* = \{(\varrho, \varphi, z) \in \mathbb{E}_3 \mid 0 \leq \varrho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \varrho \leq z \leq a\}$. $E_z(T) = \frac{\omega^2}{2} \iiint_{T^*} \varrho^2 \alpha z \cdot \varrho d\varrho d\varphi dz = \frac{\omega^2 \alpha}{2} \iint_{M^*} d\varrho d\varphi \int_{\varrho}^a \varrho^3 dz = \frac{\omega^2 \alpha}{4} \iint_{M^*} \varrho^3 (a^2 - \varrho^2) d\varrho d\varphi = \frac{\omega^2 \alpha}{4} \int_0^a (a^2 \varrho^3 - \varrho^5) d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi \omega^2 \alpha}{2} \left[\frac{a^2 \varrho^4}{4} - \frac{\varrho^6}{6} \right]_0^a = \frac{\pi}{24} \alpha a^6 \omega^2$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \text{J}$).

6.9.4 Transformace trojného integrálu do zobecněných cylindrických souřadnic je dána zobrazěním Φ v \mathbb{E}_3

$$\boxed{\Phi : x = a\varrho \cos \varphi, y = b\varrho \sin \varphi, z = cu}, \quad (6.48)$$

kde a, b, c jsou zvolené kladné konstanty. Souřadnice označíme (ϱ, φ, u) , tj. první dvě jsou polární, třetí je lineární funkcí proměnné z , přičemž platí následující vztahy pro jacobíán, transformaci elementu objemu, resp. vhodných výrazů

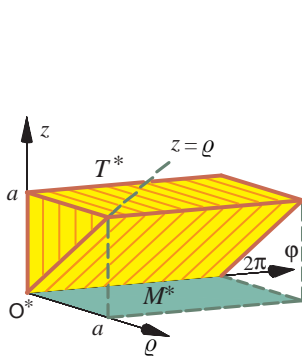
$$\boxed{J(\varrho, \varphi, u) = abc\varrho}, \quad \boxed{dx dy dz = abc\varrho d\varrho d\varphi du}, \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varrho^2}.$$

• **Transformace je výhodná**, obsahuje-li integrand $f(x, y, z)$ výrazy $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ nebo transformované těleso T je ohraničeno **eliptickou** válcovou, kuželovou či parabolickou **plochou**, resp. jejich vhodnou částí.

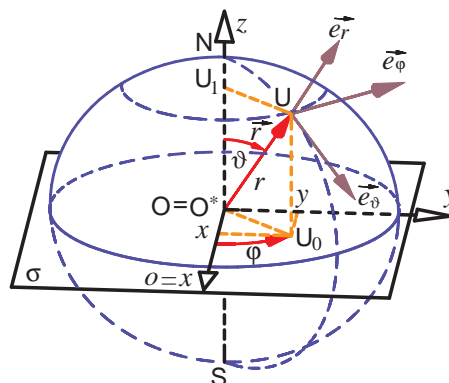
6.9.5 Příklad Určeme těžiště $T(x_T, y_T, z_T)$ homogenního tělesa T ohraničeného plochami $z = c(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$, $z = 0$, $a, b, c > 0$.

Řešení: T vyplňuje **úseč eliptického paraboloidu** s vrcholem v bodě $(0, 0, c)$, přičemž je zřejmé, že $x_T = y_T = 0$. Platí vzorec $\boxed{z_T = \frac{U_{xy}(T)}{H(T)}}$, kde U_{xy} , resp. H je statický moment, resp. hmotnost tělesa T . Nechť hustota tělesa je $h(x, y, z) = h$. Pro transformaci (6.48) je průmětem T do roviny xy elipsa včetně svého vnitřku, neboť $c(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varrho^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varrho \leq 1$. Položíme $\frac{z}{c} = u$. Pak $\boxed{H(T) = \iiint_T h(x, y, z) dx dy dz} = h \iiint_T dx dy dz = h \cdot V(T) = abch \int_0^1 \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\varrho^2} du = 2\pi abch \int_0^1 (\varrho - \varrho^3) d\varrho = \frac{\pi}{2} abch$. Platí vzorec $\boxed{U_{xy}(T) = \iiint_T z \cdot h(x, y, z) dx dy dz} = h \iiint_{T^*} cu \cdot abc\varrho d\varrho d\varphi du = abc^2 h \int_0^1 \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\varrho^2} u du = \pi abc^2 h \int_0^1 \varrho (1 - \varrho^2)^2 d\varrho = \frac{\pi}{6} abc^2 h$. Tedy $z_T = \frac{1}{3}c$.

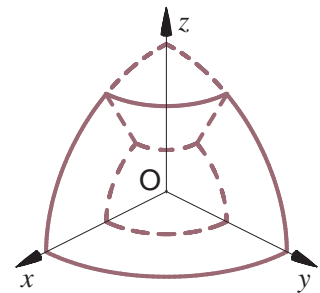
6.10 Transformace trojného integrálu do sférických a zobecněných sférických souřadnic



Obr. 6.16



Obr. 6.17



Obr. 6.18

6.10.1 Transformace trojného integrálu do sférických neboli kulových souřadnic bude podána stručně s odkazem na obr. 6.17, popř. předěšlý článek 6.9. Opět zvolíme **počátek** $O^* \in \mathbb{E}_3$, vedeme jím **základní rovinu** σ a přímku z kolmou k σ . Každému bodu $U \in \mathbb{E}_3$, $U \neq O^*$ přiřadíme uspořádanou trojici čísel (φ, r, ϑ) , které nazveme **sférické souřadnice** v \mathbb{E}_3 , a je jimi určena **pravotočivá sférická** neboli **kulová soustava souřadnic**.⁴⁸⁾ (Často bývá psána v pořadí (r, φ, ϑ) a čtenář si promyslí, jaký vliv to má na orientaci takové soustavy souřadnic, jacobíán a na transformační vzorec.) Volíme-li $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$, $0 < \vartheta < \pi$, je zobrazení Φ (Viz dále) vzájemně jednoznačné a třídy C^1 na T^* , přičemž příslušný jacobíán bude nenulový. Číslo φ je **polární úhel kolmého průmětu** U_0 bodu U do roviny σ a při

⁴⁸⁾ patří mezi **ortogonální křivočaré soustavy souřadnic** vzhledem k tomu, že příslušné **vektory lokální báze** $\{\vec{e}_\varphi(U), \vec{e}_r(U), \vec{e}_\vartheta(U)\}$ tvoří v bodě $U \in \mathbb{E}_3$ **ortonormální pravotočivou bázi**

transformaci volíme φ z libovolného intervalu délky 2π , r je **vzdálenost bodu** U od počátku O^* a ϑ je velikost úhlu, který svírá úsečka O^*U s **kladnou poloosou** z . Transformační rovnice zobrazení $\Phi: \mathbb{E}_3 \supset T^* \rightarrow \mathbb{E}_3$ jsou

$$\Phi: \boxed{x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta}. \quad (6.49)$$

Platí

$$\boxed{J(\varphi, r, \vartheta) = r^2 \sin \vartheta}, \quad \boxed{dx dy dz = r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta}, \quad \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}, \quad (6.50)$$

$$\boxed{\iiint_T f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \iiint_{T^*} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta}. \quad (6.51)$$

• **Transformace je výhodná**, pokud integrand $f(x, y, z)$ obsahuje výrazy $(x^2 + y^2 + z^2)$ nebo transformované těleso je **koule** se středem v počátku nebo její vhodná část, jako např. **kulová výseč** apod.

6.10.2 Příklad Těleso T je v 1. oktantu ohraničeno plochami $x^2 + y^2 + z^2 = a_1^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = a_2^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, kde $0 < a_1 < a_2$. Určeme v \mathbb{E}_3 jeho míru.

Řešení: Počítáme objem $V(T)$ **osminy duté koule** v prvním oktantu s vnitřním, resp. vnějším poloměrem a_1 , resp. a_2 , která je ohraničena částí rotační kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Obr. 6.18). Platí $V(T) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a_1}^{a_2} r^2 dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta = -(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{12} (a_2^3 - a_1^3)$.

6.10.3 Transformace trojného integrálu do zobecněných sférických souřadnic je dána zobrazením Φ v \mathbb{E}_3

$$\Phi: \boxed{x = ar \cos \varphi \sin \vartheta, y = br \sin \varphi \sin \vartheta, z = cr \cos \vartheta}, \quad (6.52)$$

kde a, b, c jsou zvolené kladné konstanty. Souřadnice označíme (φ, r, ϑ) a platí následující vztahy pro jacobíán, transformaci elementu objemu, resp. vhodných výrazů

$$\boxed{J(\varphi, r, \vartheta) = abcr^2 \sin \vartheta}, \quad \boxed{dx dy dz = abcr^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta}, \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2}.$$

• **Transformace je výhodná**, obsahuje-li integrand $f(x, y, z)$ výrazy $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})$ nebo transformované těleso T je **elipsoid** se svým vnitřkem (s osami rovnoběžnými s kartézskými souřadnicovými osami, pak φ volíme např. $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$), resp. jeho vhodné části.

6.10.4 Příklad Transformací do zobecněných sférických souřadnic určíme kinetickou energii

$E_z(T) = \frac{\omega^2}{2} \iiint_T (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dx dy dz$ homogenního tělesa T rotujícího kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}), jímž je **horní polovina trojosého elipsoidu**⁴⁹⁾ $(\frac{x^2}{a^2})^2 + (\frac{y^2}{b^2})^2 + (\frac{z^2}{c^2})^2 = 1$ se svým vnitřkem o známé hmotnosti $H(T)$ (kg).

Řešení: T má konstantní hustotu $h = \frac{H(T)}{V(T)}$. Čtenář si jako samostatné cvičení ověří, že objem uvažovaného tělesa je $V(T) = \frac{2}{3}\pi abc$. Protože $x^2 + y^2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) r^2 \sin^2 \vartheta$, $dx dy dz = abcr^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$, je $E_z(T) = \frac{\omega^2 abch}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) d\varphi \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{\omega^2 abch}{2} \cdot \pi (a^2 + b^2) \cdot \frac{1}{5} \cdot [-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} H(T) (a^2 + b^2) \omega^2$ (J).

6.11 Vybrané fyzikální aplikace trojného integrálu

jsme již poznali v řadě příkladů, kdy fyzikálním **modelem měřitelné množiny** T v \mathbb{E}_3 bylo **těleso** T o hustotě $h(x, y, z)$ v $kg \cdot m^{-3}$, jehož některé mechanické charakteristiky, označíme-li **element objemu** v \mathbb{E}_3 $dx dy dz$, stručně dV , definujeme a počítáme takto:

hmotnost tělesa

$$\boxed{H(T) = \iiint_T h(x, y, z) dx dy dz}, \quad \text{při } \textit{elementu hmotnosti} \quad \boxed{dH = h(x, y, z) dx dy dz = h(\mathbf{X}) dV} \quad (\text{kg})$$

statický moment vzhledem k rovině xy , k rovině xz , yz

$$\boxed{U_{xy}(T) = \iiint_T z \cdot h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{U_{xz}(T) = \iiint_T y \cdot h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{U_{yz}(T) = \iiint_T x \cdot h(\mathbf{X}) dV} \quad (\text{kg} \cdot \text{m})$$

souřadnice těžiště $T(x_T, y_T, z_T)$

$$\boxed{x_T = \frac{U_{yz}(T)}{H(T)}}, \quad \boxed{y_T = \frac{U_{xz}(T)}{H(T)}}, \quad \boxed{z_T = \frac{U_{xy}(T)}{H(T)}} \quad (\text{m})$$

moment setrvačnosti vzhledem k rovině xy , xz , yz ; resp. k ose x , y , z ; k počátku $O(0, 0, 0)$

⁴⁹⁾tj. jeho část ležící v prvních čtyřech oktantech

$$\boxed{I_{xy}(T) = \iiint_T z^2 h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{I_{xz}(T) = \iiint_T y^2 h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{I_{yz}(T) = \iiint_T x^2 h(\mathbf{X}) dV}; \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\boxed{I_x(T) = \int_T (y^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{I_y(T) = \int_T (x^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dV}, \quad \boxed{I_z(T) = \int_T (x^2 + y^2) h(\mathbf{X}) dV}; \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\boxed{I_O(T) = \int_T (x^2 + y^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dV} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

kinetická energie při rotaci konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}) kolem osy z

$$\boxed{E_z(T) = \frac{1}{2} \omega^2 I_z(T) = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_T (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dx dy dz} \quad (\text{J}).$$

6.12 Cvičení

A) Obor integrace v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3 . Existence dvojného, resp. trojného integrálu

1 Načrtněte interval ${}^2I = [1, 3] \times [1, 2]$ v \mathbb{E}_2 , resp. interval ${}^3I = [0, 4] \times [-1, 0] \times [1, 2]$ v \mathbb{E}_3 . Určete jeho **průměr** a n -rozměrný **objem**, tj. (Jordan-Peanovu) **míru** v \mathbb{E}_n . {neuvádíme}

2 Načrtněte množinu $M \subset \mathbb{E}_2$, jejíž hranici tvoří dané křivky a rozhodněte, zda M je **elementární množina** (**obor**) M^x nebo M^y

a) $x = -1, x = 2, y = e^{-x}, y = e^x$ {není⁵⁰}

b) $x = 0, y = 0, y = e, y = \ln x$. { $M = M^y$ }

3 Zobrazte a zapište oblast, resp. obrazec či těleso, jestliže tato množina je

a) obdélník ABCD : A(1, 2), B(4, 2), C(4, 5) {neuvádíme}

b) trojúhelník ABC : A(1, 0), B(4, 3), C(4, 5) {neuvádíme}

c) rovnoběžník ABCD : A(2, 1), B(4, 4), C(4, 7) { $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 2 \leq x \leq 4 \wedge \frac{3}{2}x - 2 \leq y \leq \frac{3}{2}x + 1\}$ }

d) lichoběžník ABCD : A(1, 1), B(2, 1), C(4, 2), D(2, 2) { $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 1 \leq y \leq 2 \wedge y \leq x \leq 2y\}$ }

e) ohraničená křivkami $y = 1, y = 5 - x^2$ { $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 5 - x^2\}$ }

f) ohraničená křivkami $x = 1, y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ { $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ }

g) otevřená a ohraničená křivkou $y^2 = 2x$ a přímkou jdoucí body A(1, -3), B(5, 1) { $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid -2 < y < 4 \wedge \frac{y^2}{2} < x < y + 4\}$ }

h) **elipsoid** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ včetně vnitřku

$$\{T^{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq y \leq 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \wedge -4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} \leq z \leq 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\}$$

i) ohraničená plochami $y = 0, y = \sqrt{x}, z = 0, x + z = 1$.

$$\{T^{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 0 \leq z \leq 1 - x\}$$

4 Ověřte, zda existuje (Riemannův) dvojný, resp. trojný integrál na daném oboru integrace. Použijte k tomu větu 6.2.2 a zadání

a) $\iint_M \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}, M : x^2 + y^2 \leq 1$

b) $\iint_M \frac{\sin(x^2 + y^2) dx dy}{x^2 + y^2}, M = [-1, 1] \times [-1, 2]$

c) $\iint_M \frac{y dx dy}{x^2 + y^2}$, kde $M_1 : x^2 + y^2 \leq 1$, resp. $M_2 : x^2 + y^2 > 1$

d) $\iint_M \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}, M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid |x| + |y| < 2\}$, tj. vnitřek čtverce s úhlopříčkami o délce 4, které leží na souřadnicových osách

e) $\iiint_T \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}} dx dy dz, T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1\}$

f) $\iiint_T (x + y + z) dx dy dz, T : 1 \leq x \leq y^2, z \geq 1$.

a) {ano, funkce $\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ je spojitá dokonce v \mathbb{E}_2 a M je měřitelná (je ohraničená a $\mu(M) = 0$, tj. má míru 0)}

b) {ano, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$ }

c) {neexistuje, neboť neexistuje $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x^2 + y^2}$, resp. neexistuje, neboť M_2 není měřitelná v \mathbb{E}_2 }

d) {ne}

e) {ano}

⁵⁰)ale je např. sjednocením dvou **elementárních oborů integrace** typu (x, y) , tj. $M = M_1^x \cup M_2^x$

f) $\{\{ne^{51})\}$

B) Dvojný integrál

5] Dvojným integrálem určete v \mathbb{E}_2 Jordan-Peanovu míru, tj. obsah množin ze cvičení 3a) až 3g).
 $\{\{a)\}-b)\}$ neuvádíme; c) 6; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{32}{3}$; f) $\frac{2}{3}$; g) 18}

6] Dvojným integrálem určete obsah množin, které jsou ohraničeny křivkami

a) $y = x^3, y = \sqrt{x}$ $\{\{\frac{5}{12}\}$ b) $xy = 1, x = 2, y = x$ $\{\{\frac{3}{2} - \ln 2\}$ c) $y = -1, y = 1, y = x + 1, y^2 = x$. $\{\{\frac{8}{3}\}$

7] Množina M je ohraničena parabolou $y = 1 - ax^2, a > 0$ a osou x . Najděte parametr b tak, aby parabola $y = bx^2$ rozdělila M na dvě části stejného obsahu. $\{\{b = 3a\}$

8] Dvojným integrálem určete v \mathbb{E}_3 Jordan-Peanovu míru, tj. objem V množiny, která je ohraničena

a) souřadnicovými rovinami, rovinami $x = 1, y = 1$ a **rotačním paraboloidem** $z = x^2 + y^2 + 1$

$$\{\{\iint_M (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 + 1) dy = \frac{5}{3}(j^3), j \text{ je měřicí jednotka délky}\}$$

b) plochami $y = 1, y = x^2, z = 0, z = x^2 + y^2$ $\{\{\frac{88}{105}\}$ c) **hyperbolickým paraboloidem** $z = xy$ (charakterizovaným v 4.9 6b) na str. 81) rovinou $z = 0$ a jsou stanoveny podmínky $x \geq 0, y \geq 0, y \leq \sqrt{4 - x^2}$ $\{\{2\}$ d) plochami $z = y, z = 0$ a jsou stanoveny podmínky $x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ $\{\{\frac{1}{3}ab^2\}$ e) plochami $z = \sin y^2, z = 0$ a jsou stanoveny relace $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
 $\{\{\text{nutno vzít } M = M^y, \text{ pak } V = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{\pi^2}{4}) \doteq 0,89; \text{ postup } M = M^x \text{ vede na neurčitý integrál } \int \sin y^2 dy, \text{ jenž nelze vyjádřit jako elementární funkci (v konečném tvaru)}^{52})\}$ f) rovinami $z = -3(x + y), z = 0$ a jsou stanoveny podmínky $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$ $\{\{2\}$ g) plochami $z = \frac{x^2}{y^2}, z = 0, x = 2, y = x, xy = 1$ $\{\{\frac{9}{4}\}$ h) plochami $az = 4a^2 - y^2 (a > 0), 2ay = x^2, z = 0$ $\{\{\frac{256}{21}a^3\}$ i) rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ a identifikujte ji. $\{\{\frac{1}{6}abc; \text{čtyřstěn (trojboký jehlan)}\}$

9] Najděte moment setrvačnosti $I_z(M) = \iint_M (x^2 + y^2)h(x, y) dx dy$ vzhledem k ose z homogenního plechu $M \subset \mathbb{E}_2$ o hmotnosti $H(M)$ s hranicí ∂M o rovnici $\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1, a, b \in \mathbb{R}^+$. Načrtněte si M .

$\{\{M \text{ je kosočtverec se středem v počátku s úhlopříčkami o délkách } 2a, 2b \text{ na souřadnicových osách; s využitím symetrie } I_z(M) = \frac{1}{6}H(M)(a^2 + b^2)\}$

C) Transformace a další aplikace dvojného integrálu

10] Určete jacobíán zobrazení

a) $x = u + v, y = \frac{uv}{2}$ $\{\{J(u, v) = \frac{u-v}{2}\}$ b) $x = uv, y = u^2 - v^2$ $\{\{J(u, v) = -2(u^2 + v^2)\}$ c) $x = \arctan \frac{u}{v}, y = \frac{u^2 + v^2}{2}$ $\{\{J(u, v) = 1\}$ d) při němž v termodynamice místo daných souřadnic p (tlak), V (objem), používaných v p - V **diagramech**, zavedete nové souřadnice x, y rovnicemi $x = pV, y = pV^\gamma$, kde konstanta $\gamma > 1$.

$$\{\{J(x, y) = \begin{vmatrix} p'_x & p'_y \\ V'_x & V'_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x'_p & x'_V \\ y'_p & y'_V \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} V & p \\ V^\gamma & \gamma p V^{\gamma-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\gamma-1)pV^\gamma} = \frac{1}{(\gamma-1)y}\}\}$$

11] Dvojným integrálem odvoďte obsah množiny (použijte polární souřadnice)

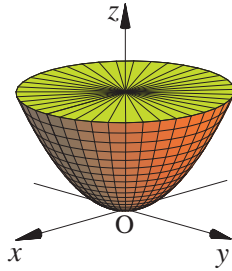
a) jíž je výseč mezikruží $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \alpha = \frac{3}{4}\pi$ $\{\{\frac{9}{8}\pi\}$ b) ohraničené **kosou lemniskátou** $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. $\{\{a^2\}$

12] Dvojným integrálem určete objem $V(T)$ tělesa T ,

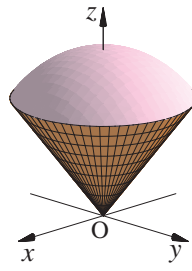
a) kde T je úseč **rotačního paraboloidu** ohraničená plochami $az = (x^2 + y^2), z = a (a > 0$ též v dalších cvičeních) $\{\{T \text{ je na obr. 6.19, } V(T) = \frac{\pi}{2}a^3\}$ b) ohraničeného plochami $z = 0, z = a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ $\{\{\text{neuvádíme, jde o analogii předešlého cvičení}\}$

⁵¹⁾neboť T je množina, která není měřitelná v \mathbb{E}_3

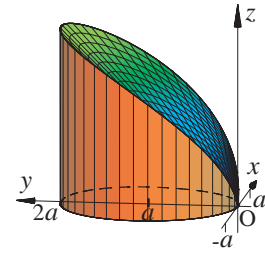
⁵²⁾podobně jako v 6.3.10



Obr. 6.19



Obr. 6.20



Obr. 6.21

- c) určeného vztahy $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{18 - x^2 - y^2}$
 $\{\{\text{objem } V(T) = 36(\sqrt{2} - 1)\pi (j^3), T \text{ připomíná zmrzlinu v kornoutu (Obr. 6.20)}\}\}$
- d) je-li průnikem dvou **rotačních válcových prostorů** $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x^2 + z^2 \leq a^2$. Výpočet proveďte též bez transformace
 $\{\{V(T) = \frac{16}{3}a^3; \text{ situaci částečně vystihuje obr. 8.32 na str. 231}\}\}$
- e) ohraničeného **Gaussovým kloboukem**⁵³⁾ $z = e^{-(x^2+y^2)}$ a plochami $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$
 $\{\{V(T) = \frac{e^3 - 1}{e^4} \pi\}\}$
- f) definovaného vztahy $x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2$, $x^2 + y^2 \leq a^2$
 $\{\{V(T) = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})\pi a^3\}\}$
- g) ohraničeného plochami $z = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $z = 0$, $z = 9$
 $\{\{V(T) = \pi \ln 10\}\}$
- h) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{x}\}$
 $\{\{V(T) = \frac{8}{15}\}\}$
- i) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq x\}$
 $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- j) při $z \geq 0$ ohraničeného plochami $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$.
 $\{\{\frac{28}{9}\}\}$

13 Určete objem \mathcal{T} vody, který proteče za sekundu řečištěm, jehož plošný průřez M ohraničuje dolní polovina elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, jestliže na M je velikost v **rychlostního pole** \vec{v} dána parabolickým rychlostním profilem $v = v_{\max}(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})$, kde v_{\max} je velikost maximální rychlosti proudu uprostřed hladiny. K výpočtu \mathcal{T} , tzv. **objemového průtoku**,⁵⁴⁾ použijte vzorec $\mathcal{T} = \iint_M v dx dy$.
 $\{\{\mathcal{T} = \frac{\pi}{4} ab v_{\max}\}\}$

14 Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního plechu $M \subset \mathbb{E}_2$ o hustotě h ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$), kde M je
 a) kruh o poloměru a , vzhledem k tečné přímce $\{\{\frac{5}{4}\pi h a^4\}\}$
 b) kruh o poloměru a , vzhledem k bodu na hranici kruhu $\{\{\frac{3}{2}\pi h a^4\}\}$
 c) kde M je vnitřek elipsy s délkami poloos a, b , vzhledem k jejímu středu. $\{\{\frac{1}{4}\pi h ab(a^2 + b^2)\}\}$

15 Odvoďte hmotnost plechu ve tvaru kruhu o poloměru a , jehož hustota h je úměrná vzdálenosti bodů od hranice, víme-li, že $h(0, 0) = h_0$.
 $\{\{\frac{1}{3}\pi h_0 a^2\}\}$

16 Vypočítejte souřadnice těžiště homogenní velmi tenké desky M , jde-li o
 a) kruhovou výseč o poloměru a se středovým úhlem 2α $\{\{\text{ve vzdálenosti } \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha} \text{ od středu}\}\}$
 b) část vnitřku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $y \geq 0$. $\{\{(0, \frac{4}{3\pi}b)\}\}$

17 Vypočítejte práci W při **Carnotově cyklu**, je-li v **termodynamice** dána obsahem rovinné plochy v pV -**diagramu**, která je v pV -rovině ohraničena hyperbolami $pV = RT_1$, $pV = RT_2$ a křivkami $pV^\gamma = c_1$, $pV^\gamma = c_2$ ($R, T_1 < T_2, c_1 < c_2, \gamma > 1$ jsou konstanty), jestliže $W = \iint_M dp dV$. Při výpočtu transformujte ze souřadnic (p, V) do souřadnic (x, y) zavedených ve cvičení **10d**, je-li jacobíán transformace $J(x, y) = \frac{1}{(\gamma-1)y}$.
 $\{\{W = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) \ln \frac{c_1}{c_2}\}\}$

D) Trojný integrál, jeho transformace a aplikace

18 Trojným integrálem určete objemy těles, která byla zadána pro výpočet dvojným integrálem. Jde o cvičení **8** a **12**. Kde je výhodné, transformujte do vhodných souřadnic.

19 Trojným integrálem vyjádřete a vypočítejte objem kváдру $T : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$.
 $\{\{\iiint_T dx dy dz = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz = 8 \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = 8abc\}\}$

20 Stanovte objem tělesa určeného podmínkami $0 \leq z \leq k\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 2ay$, $k, a \in \mathbb{R}^+$.
 $\{\{\frac{32}{9}ka^3; \text{ situaci naznačuje obr. 6.21}\}\}$

⁵³⁾známým z 4.9 **6c** ze str. 81 a z obr. 4.16 ze str. 84

⁵⁴⁾ \mathcal{T} je zde speciálním případem tzv. **toku** vektorového pole, jež definujeme plošným integrálem v 8.5.3.

- 21** Dvojným či trojným integrálem najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z = 0, z = 4a - \frac{1}{4a}(x^2 + y^2), a > 0$. $\{\{32\pi a^3\}\}$
- 22** Najděte objem tělesa ohraničeného plochami $z = 0, z = kx$, při podmínce $x^2 + y^2 \leq 2ax, k, a \in \mathbb{R}^+$. $\{\{\pi k a^3\}\}$
- 23** Určete objem tělesa vyhovujícího relacím $x^2 + y^2 + z^2 \leq (2a)^2, x^2 + y^2 \geq a^2$ nejprve pomocí cylindrických a poté sférických souřadnic. $\{\{4\sqrt{3}\pi a^3\}\}$
- 24** Pomocí sférických souřadnic odvoďte vzorec pro objem **kulové výseče** s poloměrem R a středovým úhlem 2α . $\{\{\frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha)\}\}$
- 25** Určete hmotnost tělesa ohraničeného plochami $2x + z = 2a, x + z = a, y^2 = ax, y = 0$, při podmínce $y > 0$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, je-li hustota v každém bodě úměrná jeho y -ové souřadnici s koeficientem λ v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4}$. $\{\{\frac{1}{12}\lambda a^4 (\text{kg})\}\}$
- 26** Odvoďte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního **čtyřstěnu** (trojbokého jehlanu) s hustotou h ohraničeného rovinami $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$. $\{\{\frac{1}{60}habc(a^2 + b^2)\}\}$
- 27** Stanovte těžiště homogenního tělesa ohraničeného **parabolickými válcovými plochami** $y = \sqrt{ax}, y = 2\sqrt{ax}$ a rovinami $x + z = a, z = 0, a \in \mathbb{R}^+$. $\{\{V(T) = \frac{4}{15}a^3; T = (\frac{3}{7}, \frac{15}{16}, \frac{2}{7})\}\}$
- 28** Najděte hmotnost válce $T : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b$, je-li v každém jeho bodě (x, y, z) hustota $h = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$, kde λ je v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-5}$. $\{\{\frac{\pi}{6}\lambda a^2 b(3a^2 + 2b^2) (\text{kg})\}\}$
- 29** Odvoďte momenty setrvačnosti homogenního válce T s hustotou h , ohraničeného **rotační válcovou plochou** $x^2 + y^2 = a^2$ a rovinami $z = 0, z = b$, vzhledem k souřadnicovým rovinám. $\{\{I_x(T) = \frac{\pi h a^2 b}{12}(3a^2 + 4b^2) = I_y(T), I_z(T) = \frac{\pi h a^4 b}{2}\}\}$
- 30** Vypočítejte souřadnice těžiště homogenního **rotačního kužele** o poloměru a a výšce b , jehož vrchol je v počátku soustavy souřadnic a jehož osa leží na ose z . $\{\{T = (0, 0, \frac{3}{4}b)\}\}$
- 31** Homogenní těleso T představované **úsečí rotačního paraboloidu** $4az = 16a^2 - x^2 - y^2$ a rovinou $z = 0$ má objem $V = 32\pi a^3$ a hmotnost H . Určete jeho moment setrvačnosti $I_z(T)$ vzhledem k ose z a těžiště. $\{\{I_z(T) = \frac{16}{3}Ha^2, T = (0, 0, \frac{4}{3}a)\}\}$
- 32** Najděte těžiště poloviny homogenní úseče rotačního paraboloidu $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2), 0 < z < a, x > 0$. $\{\{V = \frac{\pi}{4}a^3; T = (\frac{16}{15\pi}a, 0, \frac{2}{3}a)\}\}$
- 33** Stanovte těžiště poloviny průniku dvou **rotačních válcových prostorů** $x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 + z^2 \leq a^2$. Situaci částečně vystihuje obr. 8.32 na str. 231. $\{\{T = (0, 0, \frac{3}{8}a)\}\}$
- 34** Vypočítejte kinetickou energii homogenního **eliptického válce** $T : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 < z < v$ o hmotnosti H rotujícího kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω . $\{\{\frac{1}{8}H(a^2 + b^2)\omega^2\}\}$
- 35** Odvoďte souřadnice těžiště homogenního tělesa ohraničeného **eliptickou kuželovou plochou** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ a rovinou $z = c$. $\{\{T = (0, 0, \frac{3}{4}c)\}\}$
- 36** Vypočítejte hmotnost koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, jejíž hustota v každém bodě je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti toho bodu od středu koule. $\{\{h = \frac{\lambda}{x^2 + y^2 + z^2}, H = 4\pi\lambda a\}\}$
- 37** Odvoďte moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R a hmotnosti H vzhledem k ose procházející jejím středem. $\{\{\frac{2}{5}HR^2\}\}$
- 38** Určete kinetickou energii homogenní duté koule s hustotou h , vnitřním poloměrem R_1 a vnějším R_2 , která rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející jejím středem. $\{\{\frac{4}{15}\pi h(R_2^5 - R_1^5)\omega^2\}\}$
- 39** Určete moment setrvačnosti homogenní **kulové úseče** s výškou v a hustotou h vzhledem k její ose. $\{\{\frac{\pi h v^3}{30}(20R^2 - 15Rv + 3v^2)\}\}$
- 40** Najděte těžiště osminy homogenní koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ v prvním oktantu. $\{\{T = (\frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R, \frac{3}{8}R)\}\}$
- 41** Vypočítejte kinetickou energii homogenního tělesa s hmotností H , ohraničeného **trojosým elipsoidem**, jestliže rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy x, y, z . $\{\{\frac{2}{5}H(b^2 + c^2), \frac{2}{5}H(a^2 + c^2), \frac{2}{5}H(a^2 + b^2)\}\}$

7 Křivkový integrál

7.1 Jednoduchá hladká, popř. po částech hladká křivka v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3

7.1.1 Motivace pro jednoduchou hladkou, popř. po částech hladkou křivku Je známo, že mnohé fyzikální a technické pojmy, např. práce v silovém poli, potenciál, elektrické napětí, entropie atd., jsou založeny na křivkovém integrálu. Poprvé jej použil ve své práci v r. 1743 při určování tvaru naší planety francouzský matematik Alexis Claude Clairaut (čti: *kleró*) (1713–1765). Integračním oborem křivkového integrálu je křivka. Definovat obecný pojem křivka v rovině \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 , tj. pojem, který si intuitivně představujeme jako „čáru“, se matematickými prostředky podařilo až ve 20. letech 20. století ukrajinskému matematikovi Pavlu Samuiloviči Urysonovi (viz str. 54 3.4.14 až 3.4.17).

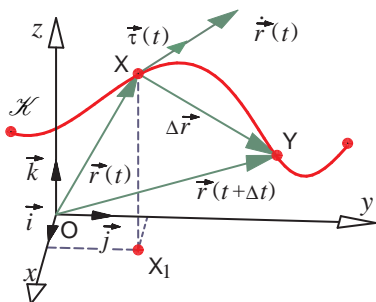
- Křivku \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 , resp. v \mathbb{E}_3 jako **geometrický model** můžeme vytvořit **elastickou deformací** původně rovné struny nebo drátu do požadovaného tvaru, což je realizace jistého „skoro všude“ **hladkého zobrazení** Φ uzavřeného intervalu konečné délky $I = [a, b]$ reálné osy \mathbb{E}_1 do euklidovského prostoru \mathbb{E}_2 , resp. \mathbb{E}_3 , tj. $\Phi : I \rightarrow \mathbb{E}_n$, $\mathcal{K} = \Phi(I) = \{\Phi(t) \mid t \in I\}$. Tedy Φ je zobrazení **typu** (1, 2), resp. (1, 3), proměnná t se nazývá **parametr**.

- **Z fyzikálního pohledu (souvislou) křivku** neboli **cestu** \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 , resp. \mathbb{E}_2 , můžeme vytvořit pohybem hmotného bodu X v **čase** t z daného intervalu $I = [a, b]$ s popisem $X = \Phi(t)$ této jeho cesty.

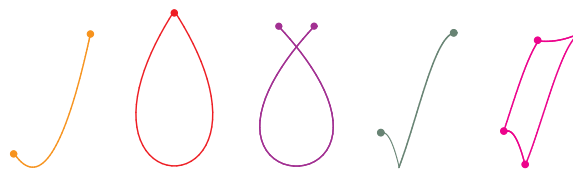
- Dlouhý vývoj pojmů **spojitosti** (zobrazení) a **souvislosti** (množiny, a tedy i křivky) ovlivnil samotné základy matematiky. My se v celé této kapitole zaměříme na geometrickou názornost výkladu. Pro naše účely bude stačit, jestliže se omezíme na křivky, které lze složit z částí, jež jsou **jednoduché** neboli **neprotínající se** a **hladké** neboli mají **spojitě se měnící tečnu**. Prostředkem k tomu je zmíněné zobrazení Φ jistých vlastností, které uvedeme dále, tzv. **parametrizace**.

- Vraťme se ještě ke křivce, jejíž každý bod X je hodnotou **bodového zobrazení**, též **bodové funkce** či skalární funkce Φ , tj. $X = \Phi(t)$ (Viz 4.2.6 na str. 63).

Úmluva Někdy je účelné, a v této kapitole tak učiníme i my, že při geometrických, popř. fyzikálních úvahách, ztotožníme euklidovský prostor \mathbb{E}_n s jeho zaměřením \mathbb{V}_n , $n = 2, 3$.



Obr. 7.1



Obr. 7.2 Obr. 7.3 Obr. 7.4 Obr. 7.5 Obr. 7.6

K tomu stačí **zvolit pevný systém kartézských souřadnic**. **Rádusvektor** \vec{r} bodu X pak je **tožný s bodem** $X = O + \vec{r}$, tedy formálně $X \equiv \vec{r}$ ve smyslu rovnosti souřadnic bodu X i vektoru \vec{r} . Proto, je-li např. zmíněné zobrazení Φ typu (1, 3) dáno třemi složkami (souřadnicovými funkcemi), $X = \Phi(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$, můžeme libovolný bod $X = (x, y, z)$ křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 zapsat nejen třemi (skalárními) **parametrickými rovnicemi křivky**

$$\Phi : x = \phi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \text{ kde } t \in I, \quad (7.1)$$

ale můžeme jej zapsat též **v polokartézském tvaru**

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (7.2)$$

nehrozí-li záměna s označováním souřadnicových os (Viz obr. 7.1), přičemž $\vec{r}(t)$ je **vektorová funkce**, stručně **rádusvektor** bodu $X \in \mathcal{K}$. To vede k tomu, že se často používá též označení $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- Přitom si uvědomme, a ze zmíněného obrázku je to rovněž zřejmé, že **derivate** $\dot{\Phi}$ **bodové funkce** Φ **podle t je vektorová funkce** (existuje-li), která **má tečný směr ke křivce** \mathcal{K} pro každé $t \in [a, b]$, je to její **tečný vektor**. Označení derivace funkce tečkou, je-li argumentem t čas, je obvyklé ve fyzice, kde jej zavedl I. Newton. Tam tato **časová derivate** funkce polohy vyjadřuje **vektor okamžité rychlosti** $\vec{v}(t)$ pohybu po cestě, který **má** v každém okamžiku t **tečný směr k cestě** \mathcal{K} . Platí

$$\dot{\Phi} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t). \quad (7.3)$$

Můžeme psát **souřadnicově**, resp. **polokartézsky** (zápisy vpravo)

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}(t) &= (\dot{\phi}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\chi}(t)) = \dot{\phi}(t)\vec{i} + \dot{\psi}(t)\vec{j} + \dot{\chi}(t)\vec{k}, \\ \vec{r}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k},\end{aligned}$$

popř. definujeme příslušné **diferenciály bodové**, resp. **vektorové funkce**

$$d\vec{\Phi}(t) = \dot{\vec{\Phi}}(t)dt, \text{ resp. } d\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)dt = \vec{i}dx(t) + \vec{j}dy(t) + \vec{k}dz(t),$$

(kde $dx(t) = \dot{x}(t)dt$ atd.), přičemž **jsou to vektory** a pouze estetické hledisko nás vede k tomu, že nebudeme psát $\overrightarrow{d\Phi(t)}$, resp. $\overrightarrow{dr(t)}$. Vedle označení $\dot{\vec{\Phi}}$ se používá též $\frac{d\vec{\Phi}}{dt}$.

• Uvědomme si ještě, že **křivka** může být zapsána nekonečně mnoha parametrickými vyjádřeními, **má nekonečně mnoho parametrizací**. Jednu křivku může totiž hmotný bod proběhnout (respektujíc vlastnosti jisté parametrizace Φ) jedním i opačným směrem, různě se měnící rychlostí i v různých intervalech času t .¹⁾

7.1.2 Definice jednoduché hladké křivky – oblouku Množina $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_n$ ($n = 3$ nebo $n = 2$) se nazývá **jednoduchá hladká křivka** v \mathbb{E}_n definovaná na intervalu $[a, b]$, existuje-li **spojité** zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_n$ (uzavřeného, ohraničeného intervalu $[a, b] \subset \mathbb{E}_1$ do \mathbb{E}_n) takové, že $\Phi([a, b]) = \mathcal{K}$,²⁾ přičemž

- 1) $\Phi(t)$ je na $[a, b]$ **prosté**,³⁾ s možnou výjimkou, kdy $\Phi(a) = \Phi(b)$, (Viz dále)
- 2) $\Phi(t)$ má na otevřeném intervalu (a, b) derivaci $\dot{\vec{\Phi}}$, která je zde **spojitá** [tj. Φ je **hladké**⁴⁾ zobrazení na (a, b) neboli Φ je třídy C^1 na (a, b)], **ohraničená** a **nenulová** [tj. $\dot{\vec{\Phi}}(t) \neq \vec{0} \forall t \in (a, b)$, $\vec{0} \in \mathbb{V}_n$, čímž vyloučíme různé **singularity** (výjimečnosti), např. „křivku“ redukující se na bod $x \equiv a, y \equiv b$ apod.]

Takové zobrazení Φ se nazývá **parametrizace** jednoduché hladké **křivky** \mathcal{K} a proměnná $t \in [a, b]$ se nazývá **parametr** této křivky. Ve zmíněném případě, kdy $\Phi(a) = \Phi(b)$, se \mathcal{K} nazývá **uzavřená (jednoduchá) křivka**, resp. \mathcal{K} se nazve **uzavřená jednoduchá hladká křivka** (např. elipsa), když navíc (ve smyslu **spojité prodloužitelnosti zobrazení** Φ) na hranici $\{a, b\}$ intervalu (a, b) existují jednostranné derivace a platí jejich rovnost $\dot{\vec{\Phi}}(a+) = \dot{\vec{\Phi}}(b-)$. V případě, že $\Phi(a) \neq \Phi(b)$, nazývá se \mathcal{K} **otevřená** nebo **neuzavřená**. Není-li předem stanoveno jinak (orientací), pak se bod $A = \Phi(a)$, resp. $B = \Phi(b)$, nazývá **počáteční**, resp. **koncový bod** neuzavřené křivky (daný růstem parametru), a píšeme $\Phi(a) = p.b. \mathcal{K}$, resp. $\Phi(b) = k.b. \mathcal{K}$.

Pojem **oblouk** \widehat{AB} (jenž v literatuře není ustálen) použijeme pro označení neuzavřené jednoduché hladké křivky (konečné délky) s $p.b. A$ a $k.b. B$.

Regulární bod křivky (též **obecný bod** křivky) nazveme ten její bod, jenž bez výjimky vyhovuje části 1) i 2) této definice, tj. v němž a jeho nejbližším okolí existuje **jediný spojitě se měnící tečný vektor** $\dot{\vec{\Phi}}(t)$ (**tečna**) – viz 7.1.10. Každý jiný bod na \mathcal{K} se nazývá **singulární bod** křivky.

• Zda je bod regulární či singulární, může záviset na zvolené parametrizaci Φ . Mluvíme pak o **odstranitelné singularitě**.

7.1.3 Úmluva Budeme-li dále mluvit o křivce, budeme mít na mysli jednoduchou hladkou křivku, a to až do místa, kdy vyslovíme definici jednoduché po částech hladké křivky, která pak roli křivky převezme (je totiž jejím zobecněním).

¹⁾Úsečku v rovině danou body $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$ můžeme parametrizovat např. jako $\Phi_1 : x = t, y = t$, kde $t \in [0, 1]$ nebo $\Phi_2 : x = 1 - u, y = 1 - u$, kde $u \in [0, 1]$ nebo $\Phi_3 : x = 2v, y = 2v$, kde $v \in [0, \frac{1}{2}]$ atd.

²⁾Jednoduchá hladká křivka je **souvislá** množina, neboť je **spojitým** obrazem v \mathbb{E}_n uzavřeného intervalu $[a, b]$ (Každý interval v \mathbb{E}_1 vedle jednobodové množiny je tam souvislá množina) z jisté množiny (tzv. „**ekvivalentních**“ parametrizací). Plyne to z věty 3.4.15 o zachování souvislosti množiny spojitým zobrazením (str. 54). Zmíňme ještě tzv. **obloukovou souvislost**, která je podstatně silnější (speciálnější) vlastností, jak uvedeme. Řekneme, že body $X, Y \in M \subset \mathbb{E}_n$ lze spojit čarou ležící v M [Nepoužili jsme místo čára termín „oblouk“ ani „křivka“ ani „cesta“, neboť u nich budeme navíc předpokládat i jejich jednoduchost neboli **prostotu** definujícího zobrazení Φ – viz rejstřík], existuje-li **spojité** zobrazení $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_n$ takové, že $\Phi(a) = A$, $\Phi(b) = B$ a $\Phi([a, b]) \subset M$.

Definice Neprázdná množina $M \subset \mathbb{E}_n$ se nazývá **obloukově souvislá**, jestliže libovolné její body A, B lze spojit čarou ležící v M . Lze ukázat, že **obloukově souvislá množina (metrický prostor) je vždy souvislá**. Obráceně, souvislý metrický prostor není nutně obloukově souvislý – např. je-li složen ze svislé uzavřené úsečky v rovině s krajními body $(0, -1)$, $(0, 1)$ a z grafu funkce $\sin \frac{1}{x}$ pro $x > 0$. Graf funkce je znázorněn v obr. 3.10 na str. 55.

³⁾přičemž k tomu, aby bylo Φ na $[a, b]$ **prosté** neboli **injektivní** stačí, aby aspoň jedna ze složek ϕ, ψ, χ byla **ryze monotónní** funkce na $[a, b]$. Injektivnost zobrazení vyjadřuje **jednoduchost** křivky, což znamená, že křivka se neprotíná.

⁴⁾čímž se zajistí, že **oblouk má spojitě se měnící tečnu**

7.1.4 Některé geometrické pojmy Ještě uvedme, že na obr. 7.2 a 7.3 jsou v rovině jednoduché hladké křivky, zatímco jimi nejsou útvary na obr. 7.4, 7.5, 7.6.

Pojmy, které se vztahují ke křivce a nezávisí na její parametrizaci Φ , jsou **geometrické pojmy**, např. **krajní bod** křivky, **okraj** křivky, **jednotkový tečný vektor** křivky, **délka** křivky. Pojem „cesta“ není geometrický pojem.

Krajními body křivky jsou takové body A, B , že pro některou parametrizaci $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_n$ křivky \mathcal{K} je $\Phi(a) = A$, $\Phi(b) = B$. Množina $\partial\mathcal{K} = \{A, B\}$ se nazývá **okraj** křivky, množina $\mathcal{K} \setminus \partial\mathcal{K}$ se nazývá (**geometrický**) **vnitřek křivky** \mathcal{K} (což, **pozor**, není (**topologický**) **vnitřek množiny** v \mathbb{E}_n , jak jsme jej definovali v 3.3.8 na str. 49, ten by byl prázdnou množinou).

7.1.5 Tečný vektor a orientace jednoduché hladké křivky Pojem **orientace křivky** \mathcal{K} znamená, stručně řečeno, že zvolíme jeden ze dvou směrů pohybu na křivce neboli, jinak řečeno, zvolíme jedno ze dvou uspořádání bodů křivky nebo tuto orientaci zvolíme umístěním šipky na křivku. **Orientovaná křivka** se někdy označí $\vec{\mathcal{K}}$. Zvolíme-li druhou možnost orientace, nazývá se tato **křivka nesouhlasně orientovaná** s předešlou křivkou nebo **opačně orientovaná** a značíme ji $-\mathcal{K}$, popř. $-\vec{\mathcal{K}}$. Orientace křivky \mathcal{K} úzce souvisí s volbou pole tečných vektorů. Zmínili jsme, že jednotkový tečný vektor křivky je geometrický pojem, který proto nezávisí na její parametrizaci Φ . Přitom v každém bodě jednoduché hladké křivky (obecně kromě krajních bodů, jde-li o oblouk, **což nebudeme stále zdůrazňovat**) existují právě dva navzájem opačné tečné vektory. Je-li Φ některá z parametrizací, snadno oba vypočítáme.

• Uvedli jsme, že ve všech bodech $X = \Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ křivky, které odpovídají svému vzoru – bodu $t = \Phi^{-1}(X) \in (a, b)$ při parametrizaci Φ , lze **tečný vektor křivky** \mathcal{K} vypočítat (nebyla-li už předtím určena opačná orientace křivky, a tím i jeho opačný směr v každém bodě křivky – viz dále) ze vztahu

$$\vec{\tau} = \dot{\Phi}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Podrobnější zápis je $\vec{\tau}(X) = \dot{\Phi}(\Phi^{-1}(X))$ pro $X \in \mathcal{K}$ (kde Φ^{-1} zde označuje inverzní zobrazení k parametrizaci Φ , jehož existence vyplývá z definice křivky). Tím jsme definovali spojité vektorové pole – **pole tečných vektorů** $\vec{\tau}$ na křivce \mathcal{K} a vztahem (rozepsaným)

$$\vec{\tau}^o = \frac{\dot{\Phi}(t)}{\|\dot{\Phi}(t)\|} \equiv \frac{\dot{\Phi}(\Phi^{-1}(X))}{\|\dot{\Phi}(\Phi^{-1}(X))\|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \text{ pro } t \in (a, b), \quad (7.4)$$

pak spojité vektorové **pole jednotkových tečných vektorů** $\vec{\tau}^o$ na křivce \mathcal{K} , tj. $\vec{\tau}^o : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$.⁵⁾ Podobně můžeme definovat **pole jednotkových tečných vektorů** $\vec{\tau}^o$ vztahem

$$\vec{\tau}^o = -\frac{\dot{\Phi}(t)}{\|\dot{\Phi}(t)\|}, \text{ pro } t \in (a, b).$$

- 1) Zvolíme-li **orientaci** jednoduché hladké **křivky** \mathcal{K} jednotkovým vektorem $\vec{\tau}^o$ podle 1. možnosti pomocí parametrizace Φ vztahem $\vec{\tau}^o = \dot{\Phi}/\|\dot{\Phi}\|$ ve všech bodech křivky $X = \Phi(t)$ odpovídajících bodům $t \in (a, b)$, chápeme takto orientovanou křivku jako uspořádanou dvojici $(\mathcal{K}, \vec{\tau}^o)$, někdy se označuje $\vec{\mathcal{K}}$, a říkáme, že křivka \mathcal{K} je **orientovaná** **souhlasně** s parametrizací neboli **parametrizace souhlasí s orientací křivky**, nebo že **orientace křivky je indukována parametrizací** Φ , nebo že orientace je dána **růstem parametru** dané parametrizace. Bod $\Phi(a)$, resp. $\Phi(b)$, se nazývá **počáteční**, resp. **koncový** bod křivky \mathcal{K} .
- 2) Zvolíme-li orientaci křivky \mathcal{K} jednotkovým tečným vektorem $\vec{\tau}^o$ podle 2. možnosti pomocí téže parametrizace Φ , avšak opačným vektorem k předchozímu, tj. $\vec{\tau}^o = -\dot{\Phi}/\|\dot{\Phi}\|$, chápeme opět takto orientovanou křivku jako uspořádanou dvojici $(\mathcal{K}, \vec{\tau}^o)$, nazveme ji **opačně orientovanou křivkou** a označíme $-\mathcal{K}$, popř. $-\vec{\mathcal{K}}$. Říkáme též, že křivka \mathcal{K} je **orientovaná** **nesouhlasně** s parametrizací Φ neboli **parametrizace nesouhlasí s orientací křivky**, přičemž další výše uvedené výroky z předešlé části stačí negovat a označení $\Phi(a)$ a $\Phi(b)$ si vymění místo.

• **Není-li křivka uzavřená**, tj. $\Phi(a) \neq \Phi(b)$ neboli krajní body nejsou totožné, pak lze její orientaci definovat jednoduše tím, že jeden z jejích krajních bodů **prohlásíme za počáteční** a druhý za **koncový** bod. Orientaci křivky v obrázcích vyznačujeme šipkou na ní umístěnou.

• **Je-li rovinná křivka uzavřená**, pak se názorně, např. ve fyzice, nazve **kladně**, resp. **záporně orientovaná**, je-li orientovaná **proti**, resp. **ve smyslu** otáčení hodinových ručiček. Přesná definice, která se

⁵⁾Přitom jmenovatel je pro $t \in (a, b)$ různý od nuly, neboť podmínka $\dot{\Phi}(t) \neq \vec{0}$ z definice 7.1.2 vyjadřuje, že $\|\dot{\Phi}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} > 0$.

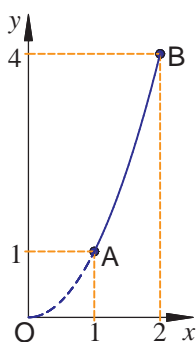
neopírá jen o naše smysly, je založena na **Jordanově větě** v \mathbb{E}_2 .

Definice Souhlasí-li parametrizace jednoduché hladké křivky se zvolenou orientací, nazývá se vektorové pole jednotkových tečných vektorů, jež je definováno vztahem

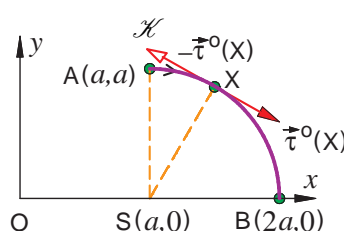
$$\vec{\tau}^\circ(\mathbf{X}) = \frac{\dot{\vec{\Phi}}(\Phi^{-1}(\mathbf{X}))}{\|\dot{\vec{\Phi}}(\Phi^{-1}(\mathbf{X}))\|}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{K}, \quad (7.5)$$

orientující pole křivky. Křivka \mathcal{K} se pak někdy označuje $(\mathcal{K}, \vec{\tau}^\circ)$, popř. $\vec{\mathcal{K}}$.

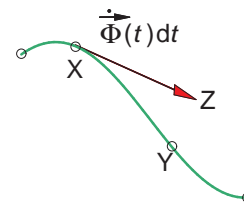
- K orientaci křivky stačí zadat tečný vektor $\vec{\tau}^\circ$ v **jednom** jejím **regulárním bodě**.
- Na křivce (nezávisle na výběru parametrizace Φ) existují **právě dvě její orientace**, a právě dvě navzájem **opačná** neboli **nesouhlasná pole** jednotkových tečných vektorů. Snadno lze totiž ukázat, že rovněž všechny **parametrizace** křivky můžeme rozdělit do **dvou různých tříd** tak, že dvě parametrizace $\Phi(t)$, $\Psi(u)$ jsou v téže třídě – tzv. třídě **ekvivalentních parametrizací**, právě když přechod od jedné ke druhé je dán rostoucí funkcí, a jsou v různých třídách, právě když přechod od jedné ke druhé je dán klesající funkcí mezi parametry t, u (příklad 7.1.6). Orientace křivky souhlasná s parametrizací jedné ze tříd parametrizací křivky indukuje **uspořádání bodů křivky**, které má všechny vlastnosti binární relace uspořádání v množině, známé z algebry.



Obr. 7.7



Obr. 7.8



Obr. 7.9

7.1.6 Příklad Graf funkce $y = x^2$ je pro $1 \leq x \leq 2$ jednoduchou hladkou křivkou (Ověřte) s krajními body $A = (1, 1)$, $B = (2, 4)$ (Viz obr. 7.7), a můžeme ji parametrizovat zobrazením Φ

$$\Phi: \quad x = \phi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t^2, \quad t \in [1, 2],$$

při němž orientace daná rostoucím parametrem t určuje pohyb po křivce od bodu A k bodu B, zatímco při parametrizaci (Ověřte podle definice)

$$\Psi: \quad x = \phi(u) = 3 - u, \quad y = \psi(u) = (3 - u)^2, \quad u \in [1, 2],$$

orientace určená souhlasně s touto parametrizací definuje pohyb po křivce od bodu B k bodu A. Všimněme si, že **vztah mezi parametry** $t = 3 - u$, $u \in [1, 2]$ je dán **klesající funkcí**, parametrizace Φ, Ψ křivky jsou tudíž **nesouhlasné**.

7.1.7 Příklad Je dána čtvrtkružnice \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 se středem $S(a, 0)$, a poloměrem a , parametrizací $\Phi: x = \phi(t) = a + a \cos t$, $y = \psi(t) = a \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. **Orientaci** této rovinné křivky \mathcal{K} zvolme „apriori“ (předem) **umístěním šipky** podle obr. 7.8, tj. za počáteční bod volíme bod $A = (a, a)$ a za koncový bod $B = (2a, 0)$. Určeme, zda vektorové pole $\vec{\tau}^\circ$ jednotkových tečných vektorů je orientující pole křivky \mathcal{K} .

Řešení: Tato známá parametrizace určuje růstem parametru t pohyb nesouhlasný s orientací. Po výpočtu musí platit $\dot{\vec{\Phi}}/\|\dot{\vec{\Phi}}\| = -\vec{\tau}^\circ$. Pro $\Phi(t) = (a + a \cos t, a \sin t)$ platí $\dot{\vec{\Phi}}(t) = a(-\sin t, \cos t)$, $\|\dot{\vec{\Phi}}(t)\| = a$, $\dot{\vec{\Phi}}(t)/\|\dot{\vec{\Phi}}(t)\| = (-\sin t, \cos t)$. V bodě $X = (x, y) \in \mathcal{K}$, jelikož $x = a(1 + \cos t)$, $y = a \sin t$, je $\frac{1}{\|\dot{\vec{\Phi}}\|}\dot{\vec{\Phi}} = (-\frac{y}{a}, \frac{x}{a} - 1) = -\frac{1}{a}(y, a - x) = -\vec{\tau}^\circ$. Pole $\vec{\tau}^\circ$ **není orientující pole**, tj. je orientováno nesouhlasně s parametrizací Φ . Navrhněte rovnice takové parametrizace Φ , která definuje orientující pole křivky \mathcal{K} .

7.1.8 Délka jednoduché hladké křivky a jejího oblouku \widehat{AB} Z integrálního počtu funkce jedné proměnné je pro parametrické vyjádření rovinné křivky \mathcal{K} znám vzorec pro její **délku** $s(\mathcal{K})$, který nyní zobecníme a předběžně uvedeme pro parametrizaci Φ (jednoduché hladké) křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 $\Phi(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$, tj. $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [a, b]$, ve tvaru

$$s(\mathcal{K}) \equiv \int_{\mathcal{K}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} := \int_a^b \sqrt{[\dot{\phi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\chi}(t)]^2} dt = \int_a^b \|\dot{\vec{\Phi}}\| dt. \quad (7.6)$$

Položme

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\Phi}(t)\| dt. \quad (7.7)$$

Potom

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \int_t^{t+\Delta t} \|\dot{\Phi}(t)\| dt \quad (7.8)$$

je **délka oblouku** (jednoduché hladké) **křivky mezi body** X a Y , jež po řadě odpovídají hodnotám parametru t a $(t + \Delta t)$ (Viz obr. 7.9). Je zřejmé, že **oblouk**, jakožto neuzavřená a neprázdná část hladké křivky \mathcal{K} , je rovněž jednoduchá hladká křivka. Jestliže je v předešlém vztahu Δt dostatečně malé, lze psát

$$\Delta s \approx \|\dot{\Phi}\| \Delta t, \quad (7.9)$$

což znamená, že uvedenou délku oblouku \widehat{XY} s krajními body X a Y lze aproximovat dostatečně přesně délkou úsečky XZ , tj. normou vektoru $\dot{\Phi}(t)\Delta t$. Přejdeme-li v (7.9) od diferencí k diferenciálům, dostaneme

$$ds = \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt \quad \text{neboli} \quad ds = \|\dot{\Phi}(t)\| dt \Rightarrow s(\mathcal{K}) = \int_A^B ds, \quad (7.10)$$

kde $A, B \in \mathcal{K}$ jsou krajní body oblouku \widehat{AB} křivky \mathcal{K} a kde ds je **diferenciál délky oblouku** křivky (jednoduché hladké) nebo **element délky oblouku** křivky, stručně jen **element oblouku** či **diferenciál oblouku**.⁶⁾

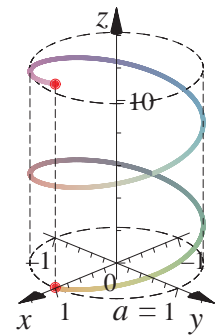
• Místo délka s oblouku je obvyklejší říkat jen **oblouk** s . Uvažuje-li se jako **parametr oblouk** s , pak se mnohé teoretické úvahy i vzorce zjednoduší (Pro praktické výpočty to však vhodné není). Např. podle (7.10) je délka vektoru $\left\| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\Phi(s)}{ds} \right\| = 1$, tj. jeho souřadnice jsou směrové kosiny tohoto jednotkového vektoru $\vec{r}' = \dot{\Phi}'(s) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, kde znak ' označuje derivaci bodové funkce Φ podle oblouku s , což je vektor.

• Zároveň jsme vysvětlili, že s v ds **neoznačuje u integrálu proměnnou, podle které se má integrovat, jak jsme byli dosud zvyklí**.

7.1.9 Příklad Množina $\mathcal{K} = \{(a \cos t, a \sin t, bt) \mid t \in [0, 4\pi], a > 0, b > 0\}$ je prostorová křivka, kterou tvoří dva závitů **pravotočivé kruhové šroubovice** (Viz obr. 7.10) na rotační válcové ploše s poloměrem a a osou v ose z . Ověřme, že její zadání určuje parametrizaci, určíme její délku, vektorovou rovnici její tečny $\vec{r}' = \dot{\vec{r}}(t)$ v libovolném bodě $t = t_0$ (existuje-li) i odchylku φ tečny a osy z .

Řešení: Zobrazení $\Phi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, přičemž $\dot{\Phi}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$, je zobrazení třídy C^1 a je pro každé t prosté, neboť jeho poslední souřadnicová funkce je prostá, konkrétněji, je to rostoucí funkce. Tedy Φ je parametrizace definující křivku pohybem, jenž si můžeme představit jako složení rovnoměrného kruhového pohybu kolem osy z (proti smyslu otáčení hodinových ručiček při pohledu proti směru osy z) ve vzdálenosti a a rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru osy z . Přitom $\|\dot{\Phi}(t)\| = (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Délka je $s(\mathcal{K}) = \int_A^B ds = \int_0^{4\pi} \|\dot{\Phi}(t)\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{4\pi} dt = 4\pi \sqrt{a^2 + b^2}$. Formálně je $\vec{r}(t) = \Phi(t)$, tedy i $\vec{r}'(t) = \dot{\Phi}(t)$. Odpovídá-li hodnotě t_0 rádiusvektor $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ (resp. dotykový bod $T = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{K}$), vektorová rovnice tečny je $\vec{r}'(t) = \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}t$ (resp. bodově $X = T + \dot{\vec{r}}_0 t$), $t \in \mathbb{R}$, tedy

$$\vec{r}'(t) = (a(\cos t_0 - t \sin t_0), a(\sin t_0 + t \cos t_0), b(t_0 + t)).$$



Obr. 7.10

Odchylka φ je vlastně neorientovaný konvexní úhel (přesněji jeho velikost, tj. $0 \leq \varphi \leq \pi$) tečného vektoru (směrového vektoru tečny) $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{r}'_0$ a jednotkového vektoru (na ose z) $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Proto $\cos \varphi = \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0) \cdot \vec{k}|}{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Odchylka je tedy ve všech bodech šroubovice konstantní.⁷⁾ Pro úplnost dodejme, že číslo $v = 2\pi|b|$ je tzv. **výška závitů** šroubovice.

Při $b < 0$ jde o levotočivou šroubovici (Náčrtněte si ji).

Je zajímavé, že geny jako jednotky genetické informace jsou uspořádány v podobě dvojité **pravotočivé šroubovice**.

⁶⁾ Prostřední vztah ihned vyplývá z (7.7), neboť funkce $s(t)$ je primitivní funkcí k funkci $\|\dot{\Phi}(t)\|$, takže $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|\dot{\Phi}(t)\|$. Předešlé odvození však bylo geometricky názornější.

⁷⁾ což je hned vidět na pravoúhlém trojúhelníku vzniklém rozvinutím válcové plochy, přičemž i délku křivky najdeme z Pythagorovy věty

7.1.10 Definice (orientované) jednoduché po částech hladké křivky. Pojem cesty

Nechť $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ jsou oblouky v \mathbb{E}_n ($n = 3$ nebo $n = 2$) takové, že

- 1) $k.b. \mathcal{K}_1 = p.b. \mathcal{K}_2$, $k.b. \mathcal{K}_2 = p.b. \mathcal{K}_3, \dots, k.b. \mathcal{K}_{k-1} = p.b. \mathcal{K}_k$,
- 2) žádné dva z oblouků $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ nemají jiný společný bod, kromě bodů uvedených v 1) tohoto odstavce a kromě případu, kdy $p.b. \mathcal{K}_1 = k.b. \mathcal{K}_k$.

Pak sjednocení $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{K}_i$ se nazývá **jednoduchá po částech hladká křivka** v \mathbb{E}_n , přičemž nebude-li uvedeno jinak, ve shodě s úmluvou 7.1.3 o ní budeme až do konce celého textu mluvit stručně jen jako o **křivce**. Konečná posloupnost (neorientovaných) oblouků se nazývá **rozklad křivky** \mathcal{K} .

Orientace křivky \mathcal{K} je dána orientací jejích jednotlivých jednoduchých hladkých částí (oblouků) $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ (tj. jejich $p.b.$ a $k.b.$). Přitom pro počáteční bod \mathcal{K} klademe $p.b. \mathcal{K} = p.b. \mathcal{K}_1$ a pro koncový bod \mathcal{K} $k.b. \mathcal{K} = k.b. \mathcal{K}_k$. Křivka \mathcal{K} se nazývá **uzavřená**, když $p.b. \mathcal{K} = k.b. \mathcal{K}$. To, že křivka \mathcal{K} je uvedeným způsobem vždy **orientovaná**, lze **zdůraznit** označením $\vec{\mathcal{K}}$, názvem **orientovaná křivka** nebo **součet orientovaných křivek** a zápisem $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$. Místo **jednoduchá po částech hladká orientovaná křivka** často použijeme název **jednoduchá cesta**, stručně **cesta**.⁸⁾ Sjednocení $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{K}_i$ se nazývá **trajektorie** (či **nosič cesty**). Zápis $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$ nevyjadřuje jen sjednocení množin \mathcal{K}_i , ale i pořadí probíhání pohybu hmotného bodu po obloucích. Je-li $p.b. \mathcal{K}_1 = k.b. \mathcal{K}_k$, nazývá se \mathcal{K} **uzavřená cesta** nebo **uzavřená orientovaná křivka**. Cesta $-\mathcal{K} = (-\mathcal{K}_k) + \dots + (-\mathcal{K}_1)$ se nazve **opačná cesta** k cestě $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$. **Cesta vyjadřuje dynamiku pohybu bodu a není to geometrický pojem.**

Křivku liší se od \mathcal{K} jen tím, že má nesouhlasnou (neboli opačnou) orientaci, označujeme $-\mathcal{K}$, popř. $\overleftarrow{\mathcal{K}}$. Ve vzorcích označení $\vec{\mathcal{K}}$ nebudeme používat. Bod $X \in \mathcal{K}$ se nazývá **regulární bod křivky** \mathcal{K} , existuje-li jeho okolí $\mathcal{O}(X)$ tak, že pro uzávěr $\overline{\mathcal{O}(X)}$ platí, $\overline{\mathcal{O}(X)} \cap \mathcal{K}$ je jednoduchá hladká křivka, v opačném případě se X nazývá **singulární bod křivky** \mathcal{K} . Singulárními body křivky \mathcal{K} mohou být nejvýše koncové body oblouků, zmíněné v částech 1), 2), definice 7.1.10.

• Příkladem uzavřené jednoduché po částech hladké křivky v rovině je známá **asteroida (hvězdice)**. Ta má čtyři hladké části „oddělené“ čtyřmi **singulárními body**, jež se nazývají **hroty**, a přitom ji lze celou v intervalu $[0, 2\pi]$ parametrizovat a orientovat jako **součet** čtyř orientovaných částí (oblouků).

7.1.11 Poznámka **Jednoduchá cesta** $\vec{\mathcal{K}}$ neboli orientovaná jednoduchá po částech hladká křivka $\vec{\mathcal{K}}$ z definice 7.1.10 může být **vytvořena** souvislým pohybem (tj. bez zastavení) tence kouřícího konce tyče opisujícího postupně její části (oblouky), aniž by některá z nich byla proběhnuta více než jednou, aniž bychom předešlé části protnuli nebo se jich dotkli, s možnou výjimkou pro uzavřenou křivku, kdy pohyb ukončíme v jeho počátku, přičemž při zmíněném pohybu neměníme nijak „ostře“ jeho směr ani velikost rychlosti pohybu.

• **Křivkou je** písmeno C, O (uzavřenou), Z, hranice trojúhelníka či obdélníka (jejich jednoduchými hladkými částmi jsou vnitřky jednotlivých stran), asteroida aj. **Křivkou není** bod, písmeno A, H, P, T, W, X, rovnoběžné úsečky atd.⁹⁾

• **Délkou křivky** \mathcal{K} s rozkladem $\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_k\}$ nazýváme číslo

$$s(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^k s(\mathcal{K}_i).$$

• **Křivka** v \mathbb{E}_n hladká nebo po částech hladká, přičemž (obecně se nemusíme omezit jen na $n = 2$ nebo $n = 3$) je **ohraničená měřitelná množina** v \mathbb{E}_n neboli je **ohraničená a má končnou délku** a její n -rozměrná míra je nula (tj. $\mu_n(\mathcal{K}) = 0$).

7.2 Křivkový integrál skalární funkce neboli 1. druhu

7.2.1 Fyzikální motivace pro integrál Uvažujme jednoduchou hladkou křivku \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 (podobně v \mathbb{E}_2) s parametrizací $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, tj. $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{E}_3$, a ať je na \mathcal{K} zadáno spojitě skalární pole $f(X) = f(x, y, z)$, kde $\Phi(t) = X = (x, y, z) \in \mathcal{K}$ je její libovolný bod, tj. $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{E}_1$. (Skalární) funkci f lze

⁸⁾ **Cesta** \mathcal{K} chápána jako časový průběh pohybu po křivce \mathcal{K} ve fyzice obecně **nemusi být jednoduchou křivkou**. Definuje se jako konečná posloupnost $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k\}$ takových **orientovaných** oblouků, že $k.b. \mathcal{K}_i = p.b. \mathcal{K}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k-1$). Tzn., že pohyb probíhá i tak, že jednotlivé oblouky mohou být protínány, oblouky mohou mít společné úseky, které jsou probíhány tam i zpět (opačnou orientací). Lze definovat součet, rozdíl cest (je-li výsledkem opět cesta). Např. je-li křivkou \mathcal{K} uzavřená kladně orientovaná kružnice, pak zápis $3\mathcal{K}$ vyjadřuje trojí její proběhnutí v uvedeném smyslu atd.

⁹⁾ přičemž uvedená písmena můžeme chápat i prostorově tak, že si je představíme napsána např. na válcové ploše

interpretovat např. jako **délkovou** (též *lineární*) **hustotu** $h(x, y, z) = f(\mathbf{X}) > 0$ (v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$) kusu obecně nehomogenního **drátu** či **struny** \mathcal{K} , přičemž chceme najít celkovou **hmotnost drátu** $H(\mathcal{K})$.

• Podobně jako při vyjádření a výpočtu hmotnosti tenké desky dvojným integrálem, resp. tělesa trojným integrálem, můžeme analogicky vyjádřit a vypočítat hmotnost zmíněného drátu \mathcal{K} jeho dělením – rozkladem na dílčí části (oblouky) \mathcal{K}_i , přičemž $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$. Detailní provedení těchto úvah by bylo poněkud zdouhavé. Proto, vzhledem k tomu, že hmotnost $H(\mathcal{K})$ drátu \mathcal{K} je **aditivní funkcí oblouku**, tj. pro dostatečně jemné **dělení** $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ drátu \mathcal{K} platí $H(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^n H(\mathcal{K}_i)$ [přičemž dělením $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ rozumíme konečnou posloupnost oblouků $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^n$, pro niž platí

$$1) \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i, \quad 2) s(\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j) = 0 \text{ pro všechna } i, j, i \neq j,$$

kde $s(\mathcal{K})$ je **délka** oblouku \mathcal{K} z 7.1.8], aspoň poznamenejme, že lze podobně jako u jednorozměrného integrálu v \mathbb{E}_1 sestavit Riemannovy integrální součty na drátu \mathcal{K}

$$s(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}), \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{R}_i) \cdot s(\mathcal{K}_i), \quad \mathbf{R}_i \in \mathcal{K},$$

(kde \mathcal{V} je **výběr reprezentantů** (bodů) \mathbf{R}_i pro dané dělení $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ drátu \mathcal{K}), které prostřednictvím parametrizace Φ přísluší známým Riemannovým integrálním součtům na intervalu $[a, b]$ tak, jak nyní uvedeme.

• Stačí tedy, když utvoříme známé **dělení** \mathcal{D} intervalu $[a, b]$, $\mathcal{D} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ s příslušnou **normou** $\|\mathcal{D}\|$ dělení \mathcal{D} , kde $\|\mathcal{D}\|$ je délka nejdelšího z podintervalů $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, tj. $\mathcal{D} = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$, a položíme $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$, zvolíme **výběr** \mathcal{V} libovolných bodů (čísel) – **reprezentantů** $r_i \in [t_{i-1}, t_i]$ pro dělení \mathcal{D} , přičemž indukci parametrizace Φ je zřejmě $\mathbf{R}_i = \Phi(r_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Definujme Riemannovy integrální součty na $[a, b]$

$$s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n f(\Phi(r_i)) \cdot \Delta s_i.$$

Přechodem k limitě pro $n \rightarrow +\infty$ těchto integrálních součtů příslušejících libovolné **normální posloupnosti** dělení intervalu $[a, b]$ (tj. takové posloupnosti dělení, že jim odpovídající číselná posloupnost $\{\|\mathcal{D}\|\}$ norem konverguje k nule, tj. stručně zapsáno $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+$), a zavedeme-li přitom **element (diferenciál)** dH **hmotnosti** $H(\mathcal{K})$ **křivky** – drátu \mathcal{K} o hustotě $h = f(\mathbf{X})$ vztahem

$$dH = f(\mathbf{X}) ds,$$

kde ds je element oblouku (viz 7.1.8), můžeme pro tuto limitu označenou jako $\int_{\mathcal{K}} f ds$ psát

$$H(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} dH = \int_a^b f(\Phi(t)) \cdot \|\dot{\Phi}\| dt.$$

7.2.2 Křivkový integrál skalární funkce (či skalárního pole) na jednoduché hladké křivce
Nechť \mathcal{K} je jednoduchá hladká křivka v \mathbb{E}_3 nebo \mathbb{E}_2 a Φ její parametrizace na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $f(\mathbf{X})$ je definovaná a **ohraňovaná** na křivce \mathcal{K} (tj. pro každý bod $\mathbf{X} = \Phi(t) \in \mathcal{K}$). Existuje-li Riemannův jednoduchý integrál $\int_a^b f(\Phi(t)) \cdot \|\dot{\Phi}(t)\| dt$, pak říkáme, že funkce f je **integrovatelná na křivce** \mathcal{K} , přičemž uvedený integrál označujeme $\int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{X}) ds$, $\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z) ds$ nebo jen $\int_{\mathcal{K}} f$ (místo ds , jejíž nazveme **neorientovaný element oblouku**, se píše též dr, dl), nazýváme jej **křivkový integrál skalární funkce** f nebo křivkový integrál 1. **druhu**, též **neorientovaný křivkový integrál na křivce** \mathcal{K} (orientace křivky se nikde nevyžadovala) a definujeme jej vztahem

$$\int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{X}) ds = \int_a^b f(\Phi(t)) \cdot \|\dot{\Phi}(t)\| dt. \quad (7.11)$$

Řekneme-li, že f je integrovatelná funkce na křivce \mathcal{K} , nebo že křivkový integrál f na \mathcal{K} existuje, míníme tím totéž.

• Je-li křivka \mathcal{K} reprezentována vektorovou rovnicí $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, lze při ztotožnění jejich bodů \mathbf{X} s příslušným rádiusvektorem $\vec{r}(t)$ psát též

$$\int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{X}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

• Zdůraznění integrace funkce f na **uzavřené** křivce \mathcal{K} učiníme zápisem $\oint_{\mathcal{K}} f ds$.

7.2.3 Poznámka Aby předešla definice měla smysl, **nesmí** existence ani hodnota integrálu na pravé straně definičního vzorce (7.11) **záviset na** (žádné z nekonečně mnoha možných) **parametrizaci** křivky \mathcal{K} . Důkaz, že tomu tak je, není obtížný, ale vynecháme jej. Tato vlastnost křivkového integrálu se nazývá **invariantnost integrálu vzhledem k parametrizaci**.

7.2.4 Délka křivky Položíme-li v (7.11) $f(\mathbf{X}) = 1$ pro každý bod $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, dostáváme ihned pro délku jednoduché hladké křivky vztahy

$$s(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} ds = \int_a^b \|\dot{\Phi}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (7.12)$$

které jsme předběžně zavedli v 7.1.8.

7.2.5 Obsah $S(\mathcal{S})$ úseku kolmé válcové plochy \mathcal{S} z obrázku, vzpomenutém již dříve v DP (v odstavci: **Geometrická interpretace vázaného extrému**), kde $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in \mathcal{K} \in \mathbb{E}_2, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ je plocha v \mathbb{E}_3 [předpokládáme, že funkce f je **nezáporná** a **spojitá**¹⁰⁾ (tj. ohraničená) na křivce \mathcal{K}], kterou vytvoříme, když ve všech bodech P **řídící** rovinné **křivky** \mathcal{K} (s krajními body A, B a ležící v rovině $z = 0$) vedeme rovnoběžky s osou z až po jejich průsečíky $f(P)$ s grafem $G(f)$ funkce $z = f(x, y)$, které vytváří průsečnici $\mathcal{K}_3 \subset G(f)$. Pak platí

$$S(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{K}} f(x, y) ds. \quad (7.13)$$

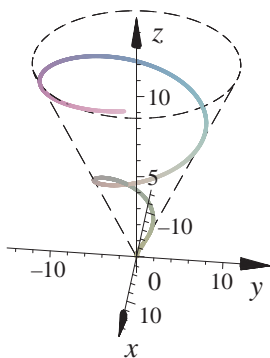
7.2.6 Křivkový integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké křivce Nechť \mathcal{K} je křivka (jednoduchá po částech hladká) v \mathbb{E}_3 (popř. \mathbb{E}_2), která se skládá z jednoduchých hladkých částí (oblouků) $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ (Viz 7.1.10). Nechť (skalární) funkce f definovaná a ohraničená na křivce \mathcal{K} , je integrovatelná na každé z křivek $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$. Pak říkáme, že f je **integrovatelná** na křivce \mathcal{K} . **Křivkový integrál** skalární funkce f na takové křivce \mathcal{K} definujeme vztahem

$$\int_{\mathcal{K}} f(\mathbf{X}) ds = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{K}_i} f(\mathbf{X}) ds \quad (7.14)$$

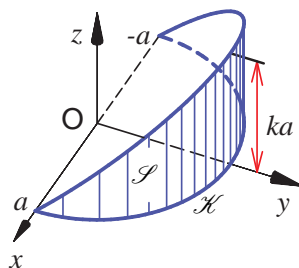
(Tzv. **aditivita křivkového integrálu** (tj. **i aditivita hmotnosti křivky**) **vzhledem k integračnímu oboru**).

7.2.7 Věta (Kritérium existence křivkového integrálu skalární funkce) Je-li funkce f **spojitá** na (jednoduché po částech hladké) křivce \mathcal{K} , pak integrál $\int_{\mathcal{K}} f ds$ existuje.¹¹⁾ ★

7.2.8 Zobecnění předešlé věty Je-li funkce f spojité na každé z hladkých částí křivky \mathcal{K} , pak je integrovatelná na \mathcal{K} . ★



Obr. 7.11



Obr. 7.12

7.2.9 Příklad Vypočítejme délku n závitů **kuželové šroubovice**¹²⁾ definované parametrizací

$$\Phi(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad \text{kde } t \in [0, 2\pi n] \quad (\text{Viz obr. 7.11}).$$

¹⁰⁾Viz větu 7.2.7

¹¹⁾Tím, že zde místo ohraničenosti požadujeme dokonce **spojitost** funkce f na obloucích \mathcal{K} (včetně v jejich krajních bodech) rozkladu křivky \mathcal{K} , převádí se prostřednictvím parametrizace $\Phi(t)$ výpočet (Riemannova) křivkového integrálu $\int_{\mathcal{K}} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{K}_i} f ds$, v důsledku možnosti použít **základní větu integrálního počtu** (obsahující Newtonův-Leibnizův vzorec), na výpočet součtu Newtonových určitých integrálů z funkcí $\int_{a_i}^{b_i} f(\Phi_i(t)) \cdot \|\dot{\Phi}_i(t)\| dt$ na dílčích intervalech $[a_i, b_i]$ intervalu $[a, b]$, odpovídajících obloukům \mathcal{K}_i , $i = 1, \dots, k$. Newtonovým integrálem vlastně ve cvičeních počítáme veškeré příklady integrálního počtu.

¹²⁾navinuté na části rotační kuželové plochy otevřené ve směru osy z

Řešení: Protože $\|\vec{\Phi}\| = \|(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)\| = \sqrt{2 + t^2}$, je $s(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} ds = \int_0^{2\pi n} \sqrt{2 + t^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi n} \sqrt{1 + (\frac{t}{\sqrt{2}})^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{2}\pi n} \sqrt{1 + u^2} du = 2[\frac{u}{2}\sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2})]_0^{\sqrt{2}\pi n} = \sqrt{2}\pi n \sqrt{2\pi^2 n^2 + 1} + \ln(\sqrt{2}\pi n + \sqrt{2\pi^2 n^2 + 1})$.

7.2.10 Příklad Určeme obsah S úseku rotační válcové plochy \mathcal{S} o rovnici $x^2 + y^2 = a^2$, ohraničené rovinami $z = 0, z = ky$, kde $a > 0, k > 0$ (obr. 7.12).

Řešení: Průmětem plochy \mathcal{S} do roviny xy je půlkružnice \mathcal{K} . Zvolme parametrizaci $\Phi(t) = (a \cos t, a \sin t)$, kde $t \in [0, \pi]$. Pro spojitou funkci $f(x, y) = ky$ a element (délky) oblouku křivky $ds = \|\vec{\Phi}(t)\| dt = a dt$ máme $S(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{K}} f(x, y) ds = \int_0^\pi ka(\sin t) a dt = -a^2 k [\cos t]_0^\pi = 2ka^2$.

7.3 Vlastnosti a fyzikální aplikace křivkového integrálu skalární funkce

7.3.1 Věty o vlastnostech křivkového integrálu, který označíme $\int_{\mathcal{K}} f$, jsou ve většině stejné jako věty o vlastnostech jednorozměrného Riemannova integrálu, neboť jeho definice je na něm založena. Proto se stručně zmíníme jen o některých a čtenář si může slovní formulace doplnit s využitím odstavce 6.2.4. Předpokládá se **integrovatelnost** funkcí f, g, f_1, \dots, f_k na křivce \mathcal{K} a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Pak platí

a) **Linearita integrálu**

$$\int_{\mathcal{K}} (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 \int_{\mathcal{K}} f_1 + \dots + \alpha_k \int_{\mathcal{K}} f_k \cdot \star$$

b) **Monotonie integrálu**

$$g \leq f, \text{ resp. } 0 \leq f \text{ na } \mathcal{K} \Rightarrow \int_{\mathcal{K}} g \leq \int_{\mathcal{K}} f, \text{ resp. } 0 \leq \int_{\mathcal{K}} f \cdot \star$$

c) **Invariantnost integrálu vzhledem ke změně hodnot** Je-li funkce f integrovatelná na \mathcal{K} a funkce g je ohraničená na \mathcal{K} , přičemž $g = f$ na \mathcal{K} s výjimkou konečně mnoha bodů, pak je g na \mathcal{K} integrovatelná a platí

$$\int_{\mathcal{K}} g = \int_{\mathcal{K}} f \cdot \star$$

d) **Důsledek změny orientace křivky** Je-li funkce f integrovatelná na \mathcal{K} , pak je též integrovatelná na opačně (nesouhlasně) orientované křivce $-\mathcal{K}$, přičemž

$$\int_{-\mathcal{K}} f = - \int_{\mathcal{K}} f \cdot \star$$

(Tj. existence ani hodnota křivkového integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci křivky.)

7.3.2 Příklad Vypočítejme statický moment $U_x(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} y \cdot h(X) ds$ vzhledem k ose x homogenního drátu \mathcal{K} o zadané hmotnosti $H(\mathcal{K})$, jímž je uzavřený **polygon** určený body $O(0, 0), A(a, a), B(2a, a), C(3a, 0), O(0, 0)$, kde $a > 0$ (Náčrtněte jej).

Řešení: Zvolíme orientaci $\vec{\mathcal{K}} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO}$ (jen pro určení pořadí integrace na \mathcal{K} , jinak ji nepotřebujeme, a ani výpočet neovlivní) a určíme příslušné parametrizace, pro zjednodušení např. tak, aby vždy $t \in [0, 1]$. Tedy $\Phi_{OA}(t) = (at, at), \Phi_{AB}(t) = (a + at, a), \Phi_{BC}(t) = (2a + at, a - at), \Phi_{CO}(t) = (3a - 3at, 0)$. Hus-tota je zde podíl hmotnosti a délky drátu, tj. $h(x, y) \equiv h = \frac{H(\mathcal{K})}{(4+2\sqrt{2})a}$. Pak $ds_{OA} = \|\vec{\Phi}_{OA}(t)\| dt = \|(a, a)\| dt = \sqrt{2}adt, ds_{AB} = a dt, ds_{BC} = \sqrt{2}adt, ds_{CO} = 3adt, U_x(\mathcal{K}) = h \int_0^1 (at \cdot \sqrt{2}a + a \cdot a + a(1-t) \cdot \sqrt{2}a + 0) dt = (1 + \sqrt{2})ha^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} H(\mathcal{K})a = \frac{\sqrt{2}}{4} H(\mathcal{K})a$.

7.3.3 Vybrané fyzikální aplikace křivkového integrálu skalární funkce uvedeme opět jen pro **mechanický model** křivky \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 , jímž bude kus **drátu** či struny (pro \mathbb{E}_2 si vzorce, v nichž bude $h(X) = h(x, y)$, napiše čtenář sám) o délkové hustotě $h(X) = h(x, y, z)$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$), jehož některé mechanické charakteristiky definujeme a počítáme takto:

hmotnost drátu

$$H(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} h(x, y, z) ds, \text{ při } \textit{elementu hmotnosti} \quad dH = h(x, y, z) ds \quad (\text{kg})$$

statický moment vzhledem k rovině xy, xz, yz

$$U_{xy}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} z \cdot h(X) ds, \quad U_{xz}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} y \cdot h(X) ds, \quad U_{yz}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} x \cdot h(X) ds \quad (\text{kg} \cdot \text{m})$$

souřadnice těžiště $T(x_T, y_T, z_T)$

$$x_T = \frac{U_{yz}(\mathcal{K})}{H(\mathcal{K})}, \quad y_T = \frac{U_{xz}(\mathcal{K})}{H(\mathcal{K})}, \quad z_T = \frac{U_{xy}(\mathcal{K})}{H(\mathcal{K})} \quad (\text{m})$$

moment setrvačnosti vzhledem k rovině xy , xz , yz ; resp. k ose x , y , z ; k počátku $O(0, 0, 0)$

$$\boxed{I_{xy}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} z^2 \cdot h(\mathbf{X}) ds}, \quad \boxed{I_{xz}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} y^2 \cdot h(\mathbf{X}) ds}, \quad \boxed{I_{yz}(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} x^2 \cdot h(\mathbf{X}) ds}; \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

$$\boxed{I_x(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} (y^2 + z^2) \cdot h(\mathbf{X}) ds}, \quad \boxed{I_y(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + z^2) \cdot h(\mathbf{X}) ds}, \quad \boxed{I_z(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \cdot h(\mathbf{X}) ds};$$

$$\boxed{I_O(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot h(\mathbf{X}) ds} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

kinetická energie při rotaci konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}) kolem osy z

$$\boxed{E_z(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot I_z(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) ds} \quad \text{atd.} \quad (\text{J}).$$

7.4 Křivkový integrál vektorové funkce neboli 2. druhu

7.4.1 Fyzikální motivace pro integrál Výpočet práce W je jednoduchý, když se působíště síly \vec{f} stálého směru i velikosti pohybuje po přímé dráze \vec{s} , takže je dána skalárním součinem $\vec{f} \cdot \vec{s}$, a platí

$$W = \vec{f} \cdot \vec{s} = \|\vec{f}\|s \cos \varphi = \vec{f} \cdot \vec{\tau}^0 s, \quad \text{kde } 0 \leq \varphi \leq \pi$$

je úhel $(\vec{f}, \vec{\tau}^0)$ vektorů \vec{f} , $\vec{\tau}^0$ a kde $\vec{\tau}^0$ je **jednotkový** vektor udávající směr pohybu. Práce pak může být **kladná**, $W > 0$, resp. **záporná**, $W < 0$,¹³⁾ neboť jako skalární veličina je dána **pravoúhlým průmětem** (Viz 1.5.1 na str. 22) vektoru \vec{f} do vektoru $\vec{\tau}^0$, přičemž úhel φ může být **ostrý**, resp. **tupý** (i pravý). Proto se ve fyzice definuje práce síly \vec{f} po **cestě** \mathcal{K} vztahem

$$\boxed{W = \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot \vec{\tau}^0 ds},$$

kde $\vec{\tau}^0$ je z 7.1.5 **spojité vektorové pole jednotkových tečných vektorů na cestě (orientované křivce)**. Termínem cesta, nebude-li řečeno jinak, budeme dále v textu rozumět jen **jednoduchou cestu**.

- a) Odtud, uvažujeme-li na \mathcal{K} **spojité** silové pole $\vec{f}(\mathbf{X}) = (P(\mathbf{X}), Q(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}))$, lze, jak je v aplikovaných oborech obvyklé, jako mnemotechnickou pomůcku formálně zavést (Viz 6.4.11) vektor

$$\boxed{d\vec{s} = \vec{\tau}^0 ds}, \quad \text{popř.} \quad \boxed{d\vec{r} = \vec{\tau}^0 ds} \quad (7.15)$$

(pracuje-li se s rádiusvektorem křivky \mathcal{K}) o velikosti

$$\|d\vec{s}\| \equiv \|d\vec{r}\| = ds,$$

který se obvykle nazývá **orientovaný element (délky) oblouku** nebo **element orientované délky oblouku** křivky \mathcal{K} , stručně **orientovaný element oblouku** $d\vec{s}$. Dále se zavádí **element práce** skalárním součinem

$$\boxed{dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}}.^{14)} \quad (7.16)$$

- b) Pak můžeme pro výpočet práce, a vůbec zvládnutí křivkových integrálů, využít následující **užitečné** vzorce

$$\boxed{\vec{\tau}^0 ds = d\vec{s} \equiv d\vec{r} = (dx, dy, dz) = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))dt}, \quad (7.17)$$

$$\boxed{\vec{f} \cdot d\vec{s} \equiv \vec{f} \cdot d\vec{r} = (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = Pdx + Qdy + Rdz}, \quad (7.18)$$

$$\boxed{\vec{f} \cdot \vec{\tau}^0 ds = \vec{f} \cdot \frac{\dot{\vec{\Phi}}(t)}{\|\dot{\vec{\Phi}}(t)\|} \|\dot{\vec{\Phi}}\| dt = \vec{f}(\Phi(t)) \cdot \dot{\vec{\Phi}}(t) dt = [P(\Phi(t))\dot{x}(t) + Q(\Phi(t))\dot{y}(t) + R(\Phi(t))\dot{z}(t)] dt}.^{15)} \quad (7.19)$$

- c) Celková práce silového pole \vec{f} **na (po) cestě \mathcal{K} orientované orientujícím polem**, označme jej $\vec{\tau}^0$ (tj. použitá parametrizace, označme ji Φ , souhlasí s předem zvolenou orientací cesty \mathcal{K}), je pak

$$\boxed{\int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot \vec{\tau}^0 ds = \int_{\mathcal{K}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \vec{f}(\Phi(t)) \cdot \dot{\vec{\Phi}}(t) dt, \quad t \in [a, b]}. \quad (7.20)$$

(Jestliže použitá parametrizace nesouhlasí se zadanou orientací, má poslední integrál znaménko $-$)

¹³⁾tj. vnější síla \vec{f} působí na těleso **ve směru**, resp. **proti směru** jeho pohybu, tj. jeho kinetická energie (ta je vždy kladná) roste, resp. klesá

¹⁴⁾Zdůrazněme, že $\|d\vec{r}\| \neq dr$, ale $\|d\vec{r}\| = ds$, neboť, jak se ve fyzice uvádí, dr vyjadřuje „elementární“ **změnu délky** rádiusvektoru \vec{r} na \mathcal{K} , zatímco $d\vec{r}$ vyjadřuje „elementární“ **posunutí** působíště síly \vec{f} na křivce \mathcal{K} .

¹⁵⁾ = $[P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)]dt$.

7.4.2 Křivkový integrál vektorové funkce (či vektorového pole) Necht' křivka \mathcal{K} je *cesta* v \mathbb{E}_n ($n = 3$ nebo $n = 2$), $\vec{\tau}^0$ je (definice v 7.1.5) její orientující pole a \vec{f} je vektorová funkce (též vektorové pole) definovaná a *ohraničená* na \mathcal{K} . Necht' skalární funkce ($\vec{f} \cdot \vec{\tau}^0$) je integrovatelná na křivce \mathcal{K} (definice 7.2.2, 7.2.6). Potom říkáme, že vektorová funkce \vec{f} je *integrovatelná* na cestě neboli na orientované křivce $(\mathcal{K}, \vec{\tau}^0)$, přičemž *křivkový integrál vektorové funkce* neboli vektorového pole \vec{f} nebo křivkový integrál 2. *druhu* nebo *orientovaný* křivkový integrál funkce \vec{f} na (nebo po) cestě (orientované křivce $(\mathcal{K}, \vec{\tau}^0)$) \mathcal{K} se nazývá integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_{\mathcal{K}} (\vec{f} \cdot \vec{\tau}^0) ds. \quad (7.21)$$

7.4.3 Vlastnosti křivkového integrálu vektorové funkce Z jeho definice je zřejmé, že křivkový integrál vektorové funkce \vec{f} na orientované křivce \mathcal{K} v principu **není novým integrálem**, neboť je **speciálním křivkovým integrálem skalární funkce** (dané skalárním součinem $\vec{f} \cdot \vec{\tau}^0$), tj. **pravoúhlého průmětu** (z definice 1.5.1 na str. 22) vektorové funkce \vec{f} do jednotkového tečného vektoru $\vec{\tau}^0$ křivky \mathcal{K} . Proto se na něj přenáší vlastnosti, které nesouvisí se změnou orientace křivky, v nichž místo dříve psaného skalárního integrandu f stačí nyní psát $\vec{f} \cdot \vec{\tau}^0$. Jsou to věty o existenci 7.2.7, 7.2.8 a věty o vlastnostech křivkového integrálu 7.3.1 – zde pouze poslední část d) je **rozdílná**, takže ji vyslovíme jako větu. Tato věta bude vyjadřovat, že **křivkový integrál vektorového pole \vec{f} závisí na orientaci cesty (křivky) \mathcal{K}** . Proto, je-li speciálně cestou oblouk \widehat{AB} od bodu A k bodu B, tj. píšeme $\mathcal{K} = \widehat{AB}$, popř. $\vec{\mathcal{K}} = \widehat{AB}$, a změním cestu na opačnou, tj. píšeme $-\mathcal{K} = \widehat{BA}$, popř. $-\vec{\mathcal{K}} = \widehat{BA}$, pak se podle definice 7.4.2 důsledkem změny orientace křivky na opačnou změní i jednotkový tečný vektor $\vec{\tau}^0$ křivky na opačný. To vede ke změně znaménka integrandu a celého integrálu.

- **Rovnost (7.21) reprezentuje vztah mezi křivkovými integrály obou druhů.**

7.4.4 Věta o změně orientace křivky v křivkovém integrálu vektorové funkce Je-li vektorová funkce \vec{f} integrovatelná na cestě \mathcal{K} , pak je též integrovatelná na opačné cestě $-\mathcal{K}$, přičemž

$$\int_{-\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}. \quad \star$$

7.4.5 Ještě k vlastnostem a výpočtu integrálu vektorové funkce Podle definice 7.1.10 cesty $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$ jako orientované jednoduché po částech hladké křivky \mathcal{K} složené z k orientovaných částí \mathcal{K}_i (oblouků na sebe navazujících uvedeným způsobem) a z 7.2.6 – vztorem (7.14), v němž místo f píšeme funkci \vec{f} (integrovatelnou na \mathcal{K}_i), definujeme dále

$$\int_{\mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{K}_i} \vec{f} \cdot d\vec{s}. \quad (7.22)$$

(Tzv. *aditivita křivkového integrálu (tj. i aditivita práce) vzhledem k integračnímu oboru*)

- Analogicky lze ve fyzice definovat orientovaný integrál pole \vec{f} po cestě $\vec{\mathcal{L}}$, která je „součtem“ $\vec{\mathcal{L}}_1 + \vec{\mathcal{L}}_2$ cest $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, definujeme-li tento „součet“ (ten obecně už nemusí být *jednoduchou* cestou atd.).
- Integrál (7.22) existuje** např. tehdy, je-li \vec{f} *spojité* vektorové pole na \mathcal{K} (Stačila by jen jeho ohraničenost?), tj. právě když jsou spojité na \mathcal{K} jeho souřadnicové funkce (složky) P, Q, R , což budeme, nebude-li řečeno jinak, dále předpokládat. Přitom **pole jednotkových tečných vektorů $\vec{\tau}^0$ nemusí existovat** v bodech spojujících jednotlivé hladké části, jde-li o *body singulární*. Takových však může být nejvýše konečně mnoho, což existenci ani hodnotu integrálu neovlivní.
- S využitím **důležitých** vzorců v 7.4.1 můžeme vzorec (7.20) rozepsat pro orientovanou po částech hladkou křivku a pro některou její parametrizaci Φ na $[a, b]$, souhlasnou, resp. nesouhlasnou se zadanou orientací na následující dva praktické vzorce, z nichž každý obsahuje 2 varianty znaménka

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}(\Phi(t)) \cdot \dot{\Phi}(t) dt, \quad (7.23)$$

(Zapište tento vztah, je-li křivka zadána vektorově $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$)

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f} d\vec{s} = \underbrace{\int_{\mathcal{K}} P dx + Q dy + R dz}_{\text{Úplný klasický tvar K.I. 2. druhu}} = \pm \underbrace{\int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(\cdot)\dot{y}(t) + R(\cdot)\dot{z}(t)] dt}_{\text{Složkový tvar K.I. 2. druhu}}. \quad (7.24)$$

d) **Úplný klasický tvar křivkového integrálu 2. druhu** se někdy rozepisuje na tři části takto

$$\int_{\mathcal{K}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\mathcal{K}} Pdx + \int_{\mathcal{K}} Qdy + \int_{\mathcal{K}} Rdz,$$

přičemž v uvedených tvarech jsou zadávány příklady na procvičení křivkových integrálů 2. druhu, jejichž každá část má následující vlastnosti, které uvedeme pro část $\int_{\mathcal{K}} Pdx$:

- $\int_{\mathcal{K}} Pdx = \int_{\mathcal{K}} P\vec{\tau}^o \cdot \vec{i} ds$ **nezávisí** na parametrizaci křivky
 - $\int_{\mathcal{K}} Pdx = \int_{\mathcal{K}} P\vec{\tau}^o \cdot \vec{i} ds$ **závisí** na orientaci křivky a na rozdíl od skalárního tvaru křivkového integrálu $\int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot \vec{\tau}^o ds$ **závisí** též na volbě soustavy souřadnic.
- e) V \mathbb{E}_2 , tj. pro rovinnou křivku a rovinné pole $\vec{f} = (P, Q)$, se všechny vztahy zjednoduší, protože $R \equiv 0, dz = 0$, takže $Rdz = 0$.
- f) Křivkový integrál vektorové funkce můžeme kromě parametrizací vypočítat za určitých podmínek (uzavřená křivka) pomocí Greenovy, resp. Stokesovy věty převedením na integrál dvojný, resp. plošný, a je-li pole \vec{f} potenciální, pak analogií Newtonova-Leibnizova vzorce jej lze vypočítat jako rozdíl hodnoty potenciálu v koncovém a počátečním bodě.

7.4.6 Práce, cirkulace a tok vektorového pole – tři aplikace křivkového integrálu vektorové funkce Je-li \vec{f} síla, pak integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ definuje **práci** vektorového pole \vec{f} po cestě \mathcal{K} .

• Nechtě \mathcal{K} je orientovaná uzavřená křivka v \mathbb{E}_3 nebo v \mathbb{E}_2 , $\vec{\tau}^o$ pole jednotkových tečných vektorů křivky a \vec{f} vektorové pole definované na \mathcal{K} . Křivkový integrál

$$\mathcal{C} := \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

se nazývá **cirkulace** vektorového pole \vec{f} po křivce (cestě) \mathcal{K} . Je-li \vec{f} síla, vyjadřuje cirkulace práci silového pole po uzavřené cestě \mathcal{K} . Je-li např. $\vec{f} = \vec{v}$, kde \vec{v} je vektorové pole rychlosti proudící tekutiny v oblasti G , ve které \mathcal{K} leží, pak cirkulace pole rychlosti \vec{v} představuje objem tekutiny, který za jednotku času proteče podél křivky souhlasně s její orientací (v \mathbb{E}_2 to bývá uvedená kladná orientace). Je-li $\mathcal{C} > 0$, pak více tekutiny teče podél křivky souhlasně s její orientací. Cirkulace je **invariantní** (nezávisí) na změně souřadnic.

• **Tok \mathcal{T} dvojrozměrného vektorového pole $\vec{f} = (P, Q)$ uzavřenou křivkou (rovinnou)** jen zmíníme (neboť tok se ve fyzice obecně definuje až u ploch (ty nemusí být „uzavřené“) plošným integrálem jako tzv. „tok vektorového pole orientovanou plochou“) tím, že jej lze speciálně v \mathbb{E}_2 definovat vztahem

$$\mathcal{T} := \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot \vec{n}^o ds = \oint_{\mathcal{K}} (-Q, P) \cdot \vec{\tau}^o ds = \oint_{\mathcal{K}} -Qdx + Pdy = \oint_{\mathcal{K}} \begin{vmatrix} P & Q \\ dx & dy \end{vmatrix},$$

kde \vec{n}^o je **jednotkový vektor vnější normály** křivky, jemuž se v aplikovaných oborech říká stručně **jednotková vnější „normála“** křivky. Stručně řečeno, \vec{n}^o je ten ze dvou vektorů, který „leží“ po naší pravé ruce, pohybujeme-li se po křivce proti smyslu otáčení hodinových ručiček (Načtněte si). Tok je **invariantní** vzhledem ke změně souřadnic.

7.4.7 Příklad Vypočítejme práci W vektorového tíhového pole $\vec{f} = (0, 0, -mg)$ při pohybu hmotného bodu o hmotnosti m po toboganu, jenž lze idealizovat pohybem po pravotočivé kruhové šroubovici \mathcal{K} (obr. 7.10) s osou v ose z a výškou závitů h , je-li počátečním bodem pohybu bod $A(a, 0, 3h)$ a koncovým bodem je bod $B(a, 0, 0)$.

Řešení: Parametrizace, která souhlasí se zadanou orientací je např. $\Phi(t) = (a \cos t, -a \sin t, 3h - \frac{h}{2\pi}t)$, $t \in [0, 6\pi]$. Pak

$$W = \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{6\pi} \vec{f}(\Phi(t)) \cdot \dot{\Phi}(t) dt = \int_0^{6\pi} (0, 0, -mg) \cdot (-a \sin t, -a \cos t, -\frac{h}{2\pi}) dt = \frac{mgh}{2\pi} \int_0^{6\pi} dt = 3mgh,$$

což je ve shodě s očekáváním.

7.4.8 Příklad Určeme cirkulaci \mathcal{C} a tok \mathcal{T} rovinného pole rychlostí $\vec{v} = (P, Q) = \alpha(-y, x)$ povrchově proudící tekutiny po soustředných elipsách \mathcal{K} , z nichž každá je orientována kladně a je zadána vztahy $x = a \cos t$, $y = -b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Přitom α je jednotkový koeficient úměrnosti (tj. $|\alpha| = 1$) v měřící jednotce s^{-1} .

Řešení: Parametrizace $\Phi(t) = (a \cos t, -b \sin t)$ *nesouhlasí* s orientací elips, neboť pro $t = 0$ máme bod $(a, 0)$ a pro $t = \frac{\pi}{2}$ bod $(0, -b)$. Proto bude před integrálem v proměnné t **záporné znaménko**. Platí

$$\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{K}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{K}} P dx + Q dy = \alpha \oint_{\mathcal{K}} -y dx + x dy = -\alpha \int_0^{2\pi} [b \sin t (-a \sin t) + a \cos t (-b \cos t)] dt = 2\alpha P(M) (m^2 \cdot s^{-1}),$$

tedy číselně je cirkulace dvojnásobkem obsahu $P(M)$ vnitřku M elipsy \mathcal{K} , která ohraničuje uvažované pole.

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \oint_{\mathcal{K}} \vec{v} \cdot \vec{n}^\circ ds = \oint_{\mathcal{K}} -Q dx + P dy = \alpha \oint_{\mathcal{K}} -x dx - y dy = \\ &= -\alpha \int_0^{2\pi} [(-a \cos t)(-a \sin t) + b \sin t (-b \cos t)] dt = \frac{1}{2} \alpha (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 0 (m^2 \cdot s^{-1}). \end{aligned}$$

Tekutina jen cirkuluje podél elips, ale neteče přes ně.

7.4.9 Příklad Určeme cirkulaci \mathcal{C} vektorového pole \vec{v} obvodových rychlostí hmotných bodů tělesa rotujícího kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ z příkladu 5.4.41 na str. 112.

Řešení: Podle zmíněného příkladu lze psát $\vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{v} = (P, Q, R) = \omega(-y, x, 0)$. Parametrizace $\Phi = (R \cos t, R \sin t, 0)$ každé kružnice \mathcal{K} *souhlasí* s její orientací, proto bude před integrálem v proměnné t **kladné** znaménko

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{\mathcal{K}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{K}} P dx + Q dy + R dz = \omega \oint_{\mathcal{K}} -y dx + x dy = \\ &= \omega \int_0^{2\pi} [-R \sin t (-R \sin t) + R(\cos t) R \cos t] dt = 2\omega \pi R^2 = 2\omega \cdot P(M), \end{aligned}$$

kde $P(M)$ je obsah kruhů s hraničními kružnicemi \mathcal{K} . Ve zmíněném příkladě jsme určili, že $\text{rot } \vec{v}(S) = 2\omega(0, 0, 1)$, tj. velikost rotace je $\|\text{rot } \vec{v}(S)\| = 2\omega$. Platí

$$\|\text{rot } \vec{f}(S)\| = \frac{|\mathcal{C}|}{P(M)} = 2\omega, \quad (7.25)$$

tedy **velikost rotace** pole \vec{v} v bodech S osy rotace z je zde dána **velikostí cirkulace** po kružnicích (opisovaných obvodovými body) **vztahené na jednotku plochy** kruhů těmito kružnicemi ohraničenými.

• Zobecněním vztahu (7.25) lze v integrálním tvaru vyjádřit fyzikální význam rotace pole \vec{f} (kterou zatím známe jako diferenciální operátor) pomocí cirkulace pole – viz větu 8.6.13 na str. 230 a vztah (8.119).

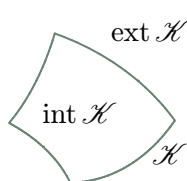
7.5 Greenova věta o křivkovém a dvojném integrálu. Jordanova věta v \mathbb{E}_2

7.5.1 Úvodní poznámka Připomínáme, že není-li uvedeno jinak, **křivkou** rozumíme křivku **jednoduchou po částech hladkou** a **uzavřenou křivkou** pak **uzavřenou jednoduchou po částech hladkou křivku**. V dalších odstavcích článku 7.5 se zaměříme na rovinné uzavřené křivky. V 7.1.5 jsme názorně zavedli (nikoli exaktně definovali) **kladnou**, resp. **zápornou orientaci** takových křivek pomocí hodinových ručiček. Následující Jordanova věta (Čti: *žordanova*) nám umožní zavést další „definici“ opírající se o naši geometrickou intuici, tj. **personifikovaný model**, přestože bychom právě na základě Jordanovy věty už mohli, bez pomoci našich smyslů, vyslovit definici přesnou, to ale za cenu větších komplikací. Jordanova věta, která patří k základním větám **topologie** roviny, říká něco, co je geometricky zřejmé. Její důkaz je však dost obtížný i obsáhlý.

7.5.2 Věta Jordanova v \mathbb{E}_2 o rozdělení roviny uzavřenou křivkou Nechť \mathcal{K} je uzavřená (jednoduchá po částech hladká¹⁶⁾) křivka v \mathbb{E}_2 . Potom \mathcal{K} rozděluje \mathbb{E}_2 na dvě oblasti, tj. existují dvě oblasti $G_1, G_2 \subset \mathbb{E}_2$ takové, že

- každý bod $z \in \mathbb{E}_2$ leží právě v jedné z množin G_1, G_2, \mathcal{K} ,
- \mathcal{K} je hranicí jak G_1 , tak G_2 (neboli $\partial G_1 = \partial G_2 = \mathcal{K}$),
- jedna z oblastí G_1, G_2 je **ohraničená** a druhá je neohraničená. ★

¹⁶⁾Požadavek *hladkosti* křivky lze zeslabit.

7.5.3 Vnitřek a vnějšek uzavřené křivky v \mathbb{E}_2 

Je-li \mathcal{K} uzavřená rovinná křivka a G_1, G_2 oblasti, jejichž existenci zaručuje Jordanova věta, pak ta z oblastí, která je ohraničená, se nazývá **vnitřek křivky** \mathcal{K} a označíme ji $\text{int } \mathcal{K}$. Druhá z oblastí G_1, G_2 , jež je neohraničená, se nazývá **vnějšek křivky** \mathcal{K} a označíme ji $\text{ext } \mathcal{K}$ (Viz obr. 7.13).

Stejně jako v 7.1.4 upozorníme, že (**geometrický**) **vnitřek křivky** není totožný s (topologickým) **vnitřkem množiny** v \mathbb{E}_n (pro $n = 2$), jenž je definován v DP a jenž by byl prázdnou množinou.

Obr. 7.13

7.5.4 Další pojetí (tzv. personifikovaný model) kladné a záporné orientace uzavřené křivky v \mathbb{E}_2 Řekneme, že uzavřená rovinná křivka je **kladně**, resp. **záporně orientovaná** (Viz 7.1.5), když položíme-li pravou ruku dlaní na rovinu ukazovákem souhlasně s orientací křivky (tj. ukazováček „představuje“ tečný vektor orientace křivky), pak napřímený palec směřuje do vnitřku, resp. vnějšku křivky (Můžeme též použít formulaci: ... pak vnitřek křivky máme po levé, resp. po pravé ruce).

7.5.5 Další pojetí jednoduše souvislé oblasti v \mathbb{E}_2 (Viz DP) Řekneme, že oblast G v \mathbb{E}_2 je **jednoduše souvislá oblast**, když vnitřek $\text{int } \mathcal{K}$ každé uzavřené křivky \mathcal{K} v G je podmnožinou oblasti G (Srovnej s 5.4.24 na str. 107).

7.5.6 Věta Greenova¹⁷⁾ o křivkovém integrálu Jestliže

- $\vec{f} = (P, Q)$ je vektorová funkce třídy C^1 v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$,¹⁸⁾
- $\mathcal{K} \subset G$ je **uzavřená** kladně orientovaná (rovinná) křivka¹⁹⁾ taková, že $\text{int } \mathcal{K} \subset G$.

Potom pro cirkulaci \mathcal{C} vektorového pole \vec{f} po (uzavřené) cestě \mathcal{K} platí **Greenův vzorec**

$$\left(\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{K}} P dx + Q dy = \iint_{\text{int } \mathcal{K}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right) \star \quad (7.26)$$

7.5.7 Význam Greenovy věty – základní věty rovinné vektorové analýzy – je mimořádný i přesto, že je speciálním případem věty **Stokesovy**, kterou podáme později a jež nese jméno irského matematika. Doplňme, že při záporně orientované křivce \mathcal{K} je vpravo před dvojným integrálem **záporné** znaménko. Věta umožňuje vypočítat cirkulaci pole \vec{f} po uzavřené cestě \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 i bez její parametrizace, a to pomocí **dvojného integrálu** na vnitřku uzavřené cesty, tj. na (ohraničené) jednoduše souvislé oblasti (O zobecnění na „vícnásobně souvislé“ oblasti viz dále).

• V aplikacích je někdy výhodné použít obrácený postup, kdy místo dvojného integrálu počítáme cirkulaci vektorového pole. Uvedme aspoň jednu ukázkou. Splňují-li křivka \mathcal{K} a složky P, Q rovinného pole \vec{f} předpoklady Greenovy věty a navíc volíme např. $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$, získáme hned **vzorec pro výpočet** dvojnásobné míry $\mu(M)$ rovinné oblasti M neboli **obsahu oblasti** $P(M) \equiv \mu(M)$. To je výhodné, jde-li o případ oblasti M **ohraničené jedinou kladně orientovanou hraniční křivkou** $\mathcal{K} \equiv \partial M$ zadanou parametricky. Pak pro $M = \text{int } \mathcal{K}$ platí

$$\mathcal{C} = \oint_{\mathcal{K}} \frac{1}{2}(-y, x) \cdot (dx, dy) = \iint_{\text{int } \mathcal{K}} dx dy = \mu(\text{int } \mathcal{K}) \equiv P(M).$$

Odtud máme užitečný vzorec pro obsah jednoduše souvislé oblasti (popř. jednoduše souvislého obrazce)

$$P(M) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{K}} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{K}} -y dx + x dy. \quad (7.27)$$

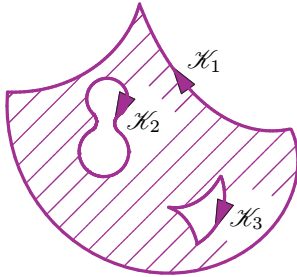
• V aplikacích nemusí být **obrazec** M pouze **jednoduše souvislá (uzavřená) elementární oblast**, ale obecněji tzv. **k-násobně souvislá oblast**, u níž se atribut „elementární“ vůbec nepoužije, neboť hranici (jež není součástí) této obecnější (otevřené) oblasti, popř. hranici ∂M (jež je součástí M) obrazce M tvoří nejen k hraničních uzavřených křivek, které jsou **po částech** grafy spojitých explicitních funkcí (což nám u dvojného, popř. trojného integrálu stačilo), nýbrž tuto hranici může tvořit k **hraničních křivek**, které jsou uzavřené jednoduché po částech hladké a definované jistou parametrizací Φ .

¹⁷⁾Green, George (1793-1841), anglický matematik a teoretický fyzik. Větu uvedl v příručce s názvem: *An Essay on the Application of Mathematical analysis to Electricity and Magnetism*. Výrazně přispěl k teorii potenciálu a teorii pružnosti.

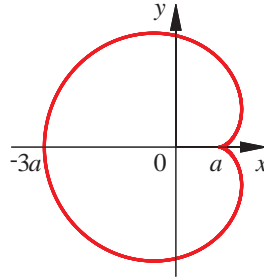
¹⁸⁾tj. souřadnicové funkce $P, Q \in C^1(G)$

¹⁹⁾jednoduchá po částech hladká

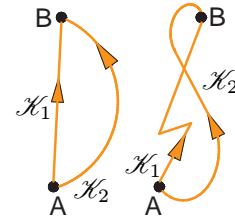
7.5.8 Obrazec – uzavřená regulární oblast v \mathbb{E}_2 . Zobecnění Greenovy věty na vícenásobně souvislé oblasti Ohraničená oblast $G \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **regulární oblast v \mathbb{E}_2** ,²⁰⁾ je-li její hranice uzavřená křivka nebo je-li disjunktním sjednocením konečného počtu uzavřených křivek.²¹⁾ Je-li těchto křivek k ($k \geq 1$), pak se nazývá **k -násobně souvislá oblast**, při $k = 1$ **jednoduše souvislá oblast**. Uzávěr $\bar{G} =: M$ se nazývá **uzavřená regulární oblast** nebo krátce **OBRAZEC**. Je-li $k \geq 2$, nazývá se hraniční křivka \mathcal{K}_1 taková, že $M^\circ \subset \text{int } \mathcal{K}_1$, **vnější křivka**, ostatní hraniční křivky $\mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_k$ se nazývají **vnitřní křivky**. Hranici oblasti M označíme ∂M . Obrazec, který je jednoduše souvislou uzavřenou oblastí, resp. k -násobně souvislou uzavřenou oblastí, se nazývá **jednoduše souvislý obrazec**, resp. **k -násobně souvislý obrazec**.



Obr. 7.14



Obr. 7.15



Obr. 7.16

• Greenovu větu lze zobecnit i pro složitější oblast než věta předpokládá (ohraničená jednoduše souvislá oblast $\text{int } \mathcal{K}_1$). S využitím **trojnásobně souvislé oblasti** ($k = 3$), u které je nutné hraničení křivky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ orientovat tak, jak ukazuje obr. 7.14, lze Greenovu větu, popř. vzorec (7.27) pro k -násobně souvislou oblast M s orientovanou hranicí $\partial M = \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$, formulovat **zobecněným Greenovým vzorcem**

$$C = \oint_{\partial M} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \boxed{\sum_{i=1}^k \oint_{\mathcal{K}_i} P dx + Q dy = \iint_M (Q'_x - P'_y) dx dy} \quad (7.28)$$

Přitom součtem $\mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_k$ místo sjednocením $\mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_k$ chceme jen, tak jak dosud, zdůraznit, že uvedené křivky jsou jistým způsobem orientované, tj. jde o cesty.

• Stručně lze shrnout, že je-li M k -násobně souvislá oblast, znamená $\oint_{\mathcal{K}}$ v Greenově větě součet k křivkových integrálů přes k jednotlivých částí hranice ∂M oblasti M .

• Je zřejmé, že Greenovu větu nelze použít, když vektorové pole \vec{f} není třídy C^1 aspoň v jednom vnitřním bodě obrazce M či v bodě některé z jeho hraničních křivek.

7.5.9 Příklad Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2})$ v $G = \mathbb{E}_2 \setminus \{0, 0\}$. Určeme cirkulaci C pole \vec{f} po kladně orientované kružnici \mathcal{K} : $S = (0, 0)$, $r = a$ nejprve Greenovou větou, a pak přímým výpočtem. Řešení: Greenovu větu **nelze použít**, neboť v počátku $O = S$ nejsou složky P, Q ani definovány, tj. jejich bod nespojitosti $O \in \text{int } \mathcal{K} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$. Pro souhlasnou parametrizaci s kladnou orientací $\Phi(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ je $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$, $C = \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{K}} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-a^2(\cos t - \sin t) \sin t + a^2(\cos t + \sin t) \cos t}{a^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$.

• Všimněme si, že kdybychom přesto formálně „použili“ Greenovu větu, dostali bychom nesprávný výsledek. Pro $Q'_x = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = P'_y$ je formálně $C = \iint_{\text{„int } \mathcal{K}^{\text{“}}} (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_{\text{„int } \mathcal{K}^{\text{“}}} 0 dx dy = 0$!?!

7.5.10 Příklad Vypočítejme obsah $P(M)$ obrazce M , který ohraničuje **kardioida (srdcovka)** \mathcal{K} : $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ (Viz obr. 7.15).

Řešení: $dx = 2a(-\sin t + \sin 2t)dt$, $dy = 2a(\cos t - \cos 2t)dt$, $P(M) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{K}} -y dx + x dy = 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 6\pi a^2$.

7.5.11 Příklad Najdeme obsah $P(M)$ vnitřku mezikružjí M kružnic $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ se středy v počátku $O(0, 0)$ a poloměry $r_1 = 2a, r_2 = a$ jakožto dvojnásobně souvislé oblasti pomocí křivkového integrálu 2. druhu.

Řešení: Evidentně $P(M) = \pi[(2a)^2 - a^2] = 3\pi a^2$. S přihlédnutím k 7.5.8 pro kladně orientovanou **vnější křivku** \mathcal{K}_1 zvolíme souhlasnou parametrizaci $\Phi_1(t) = 2a(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Protože každá **vnitřní křivka**, tj. i \mathcal{K}_2 , musí být orientována **souhlasně** s otáčením hodinových ručiček, zvolíme s ní souhlasnou parametrizaci,

²⁰⁾srovnej s **elementární množinou v \mathbb{E}_2** v 6.3.1 na str. 152

²¹⁾jednoduchých po částech hladkých

např. $\Phi_2(t) = a(\cos t, -\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak pro **dvojnásobně souvislý obrazec** M máme

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{2}[\oint_{\mathcal{K}_1} -ydx + xdy + \oint_{\mathcal{K}_2} -ydx + xdy] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi} [-2a \sin t(-2a \sin t) + 2a \cos t(2a \cos t)]dt + \int_0^{2\pi} [a \sin t(-a \sin t) + a \cos t(-a \cos t)]dt\right\} = \\ &= \frac{1}{2}3a^2 \int_0^{2\pi} dt = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

7.6 Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě. Konzervativní vektorové pole

7.6.1 Úvod a fyzikální motivace Hodnota křivkového integrálu vektorové funkce \vec{f} na křivce (jednoduché po částech hladké) \mathcal{K} obecně závisí na \mathcal{K} . V příkladu 7.4.7 vypočítaná práce $W = 3mgh$ hmotného bodu hmotnosti m po toboganu od bodu $A(a, 0, 3h)$ po bod $B(a, 0, 0)$ ležící pod ním, je však stejná, jako při volném pádu po svislé orientované úsečce \overrightarrow{AB} délky $3h$. V článku 7.6 dokončíme úvahy o konzervativním poli²²⁾. Uvedeme pak podmínky, za nichž křivkový integrál n -rozměrného vektorového pole \vec{f} (přičemž v celém článku 7.6 předpokládáme, že $n = 3$ nebo $n = 2$, nebude-li řečeno jinak) **nezávisí na integrační cestě** (tedy i zmíněná práce) nejen pro případ pole silového, ale i např. elektrostatického konajícího práci při přemísťování elektrického náboje.

7.6.2 Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě Nechť \vec{f} je n -rozměrné vektorové pole na oblasti $G \subset \mathbb{E}_n$ ($n = 3$ nebo $n = 2$). Řekneme, že **křivkový integrál vektorové funkce \vec{f} nezávisí v G na (integrační) cestě**, když pro libovolné dvě orientované křivky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ v G se společným počátečním bodem a se společným koncovým bodem B platí

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{f} d\vec{s} = \int_{\mathcal{K}_2} \vec{f} d\vec{s}. \quad (7.29)$$

• Tento integrál závisí jen na počátečním bodě A a koncovém bodě B křivky, takže bývá označen symbolem $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$ (Možné situace naznačuje obr. 7.16).

• Vlastností (7.29) se někdy definuje **konzervativní** neboli **potenciální pole** a obráceně, závisí-li křivkový integrál pole \vec{f} v G na cestě, nazývá se vektorové pole \vec{f} **disipativní pole** v G .²³⁾

7.6.3 Věta (o ekvivalenci nezávislosti křivkového integrálu na cestě ve vektorovém poli a nulové cirkulace v něm) Nechť \vec{f} je spojitá vektorová funkce v oblasti $G \subset \mathbb{E}_n$. Pak křivkový integrál pole \vec{f} nezávisí v G na cestě, právě když cirkulace pole je nulová neboli $\oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku \mathcal{K} v G . ★

7.6.4 Věta o potenciálu konzervativního vektorového pole Je-li \vec{f} spojitý konzervativní vektorové pole v oblasti G a skalární funkce U je jeho potenciál v G , potom pro každou křivku v G s počátečním bodem A a koncovým bodem B platí

$$\boxed{\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = U(B) - U(A)} \quad \star \quad (7.30)$$

Důkaz: Protože konzervativní pole \vec{f} je gradientním polem skalárního pole U v G , je tam $\vec{f} = \nabla U$. Důkaz podáme pro jednoduchou hladkou křivku \mathcal{K} v \mathbb{E}_3 s parametrizací $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, která souhlasí s její orientací (Pro \mathcal{K} jednoduchou po částech hladkou si její může čtenář provést sám), takže platí

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_{\mathcal{K}} \nabla U \cdot d\vec{s} = \int_a^b \nabla U(\Phi(t)) \cdot \dot{\Phi}(t) dt = \\ &= \int_a^b (U'_x(x(t), y(t), z(t)), U'_y(x(t), y(t), z(t)), U'_z(x(t), y(t), z(t))) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))) dt = \\ &= \int_a^b [U'_x(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + U'_y(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + U'_z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) dt = U(x(b), y(b), z(b)) - U(x(a), y(a), z(a)) = U(B) - U(A). \quad \clubsuit \end{aligned}$$

²²⁾ které jsme prováděli v odstavci 5.4.19j) ze str. 105 až 5.4.26 a v 5.4.40 na str. 111

²³⁾ Heslovitě k pojmu **disipace** (=rozptyl) **energie**. Jednotčím článkem všech technických oborů (a nejen nich) jsou zákony fyziky a chemie a z nich nejdůležitějším přírodním zákonem je II. **zákon termodynamiky**. **Disipativnost procesu** znamená nevratný **rozptyl** části energie při její přeměně z jedné formy na druhou. V technických oborech se místo pojmu disipace často používá pojem **ztrátovost** a je přesně vyjádřen v **II. zákoně (větě) termodynamiky**. Ten, volně řečeno, říká: *Všechny reálné – disipativní – procesy probíhající v každém systému jsou nevratné v tom smyslu, že zabráňují tomu, aby se systém sám bez interakce s vnějším prostředím (tj. bez jeho pomoci) vrátil do výchozího stavu. Pouze v konzervativních systémech (= nedisipativních = idealizovaných, tj. kde neprobíhají disipativní procesy) lze jejich vývoj v čase obrátit, a to jednoznačně. Objektem zkoumání moderní termodynamiky vycházející z obecných zákonitostí přeměny energie a látky je dnes nejen makroskopické těleso nebo tekutina, ale i biologický jedinec či ekologický útvar.*

7.6.5 Význam věty a poznámky ke konzervativnímu neboli potenciálnímu poli Věta o potenciálu výrazně *zobecňuje základní větu integrálního počtu* (v anglicky mluvících zemích se nazývá též *základní věta matematické analýzy = Fundamental Theorem of Calculus*) a v ní obsažený *Newtonův-Leibnizův vzorec*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

z jednorozměrného skalárního pole f na vícerozměrné vektorové pole \vec{f} . Jedním z praktických důsledků věty je *snadný výpočet práce silového pole* \vec{f} jako rozdílu potenciálních energií v koncovém a v počátečním bodě pohybu, za předpokladu, že onen potenciál U umíme najít (obráceně najít \vec{f} jako gradient funkce U je snadné). Potenciál $U(X)$ pole $\vec{f}(X)$ tak můžeme považovat za zobecnění primitivní funkce $F(x)$. Víme též, že potenciál je jednoznačně určen v uvažované oblasti až na aditivní konstantu – parametr $C \in \mathbb{R}$. Říkáme, že *potenciálních funkcí je jednoparametricky nekonečně mnoho*.

7.6.6 Věta (o ekvivalenci konzervativnosti vektorového pole a nezávislosti křivkového integrálu na cestě v něm) Nechť vektorové pole \vec{f} je spojitě v oblasti $G \subset \mathbb{E}_n$. Pak \vec{f} je konzervativní pole v G , právě když křivkový integrál pole \vec{f} nezávisí v G na cestě. ★

7.6.7 Důsledkem věty je následující praktická věta Důsledkem věty 7.6.6 je následující věta, která dává jistou možnost, jak pokračovat v testování konzervativnosti pole \vec{f} , **kdy nerozhodlo testovací schéma** uvedené v 5.4.40 na str. 111, tj. kdy platí

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0} \quad \forall X \in G, \text{ kde } G \text{ není jednoduše souvislá oblast.}$$

Věta vyjasní, proč se konzervativnímu poli, tj. poli s nulovou rotací, říká rovněž *nevírové pole*, takže by se mohla jmenovat i „věta o nevírovosti konzervativního pole“ (Pojem cirkulace a rotace dává do souvislosti pomocí plošného integrálu Stokesova věta).

7.6.8 Věta (o ekvivalenci konzervativnosti vektorového pole a nulové cirkulace v něm) Nechť vektorové pole \vec{f} je spojitě v oblasti $G \subset \mathbb{E}_n$. Pak \vec{f} je konzervativní pole v G , právě když jeho cirkulace $\oint_{\mathcal{K}} \vec{f} d\vec{s} = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku \mathcal{K} v G . ★

7.6.9 Poznámka k výpočtu potenciálu konzervativního pole Následující věta poskytne dvě metody k nalezení potenciálu U pole \vec{f} v jednoduše souvislé oblasti G , o němž **předem víme, že je konzervativní**, přičemž konzervativní pole mohou existovat i za slabších předpokladů než uvádíme, ale nebudeme se tím zabývat.

7.6.10 Věta o určení potenciálu (též kmenové funkce) konzervativního pole – Integrace totálního diferenciálu

Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P(X), Q(X), R(X))$ je třídy C^1 na jednoduše souvislé oblasti G z \mathbb{E}_3 . Pak **Pfaffova diferenciální forma** $Pdx + Qdy + Rdz$ představuje **totální diferenciál** $dU(X)$ potenciálu $U(X)$ konzervativního pole \vec{f} v G , právě když na oblasti G platí

$$\boxed{P'_y = Q'_x, Q'_z = R'_y, R'_x = P'_z}, \text{ tj. stručně } \boxed{\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}}, \quad (7.31)$$

neboli právě když integrál (totálního diferenciálu)

$$\int_{\mathcal{K}} Pdx + Qdy + Rdz$$

nezávisí v G na integrační cestě \mathcal{K} . **Potenciální funkce** $U(X)$, nazývaná též **kmenová funkce**,²⁴⁾ se v případě, že uvedenou oblastí G je buď celý prostor \mathbb{E}_3 (popř. \mathbb{E}_2) nebo **souřadnicový kvádr**²⁵⁾ (popř. obdélník), ve kterém leží bod $A = (x_0, y_0, z_0)$, určí dvěma metodami

²⁴⁾V matematice je **kmenová funkce** $U(x, y, z)$ **funkcí** $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ ta funkce, pro niž platí $U'_x = P, U'_y = Q, U'_z = R$ [neboli platí $\nabla U = (P, Q, R)$]. Je to tedy jen jiný název (synonymum) pro **potenciál** $U(X)$ **vektorového pole** $(P(X), Q(X), R(X))$.

Kmenovou funkci $U(x, y)$ v jednoduše souvislé oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_2$ funkcí $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(G)$ jako funkci, která je **totálním diferenciálem výrazu** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, je třeba **najít při řešení** tzv. **exaktní diferenciální rovnice** $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

²⁵⁾mající hrany rovnoběžné se souřadnicovými osami

1) ze soustavy diferenciálních rovnic

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R}, \quad (7.32)$$

která má při počáteční podmínce $U(\mathbf{A}) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$, právě jedno řešení $U(\mathbf{X})$ v G ; nebo

2) pomocí vzorce

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{X}} Pdx + Qdy + Rdz = \boxed{U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t)dt}, \quad (7.33)$$

kde $(x, y, z) = \mathbf{X} \in G$ je libovolný bod (Při \mathbb{E}_2 se uvažuje podmínka $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ a vzorec (7.34)). ★

7.6.11 Příklad Vypočítejme křivkový integrál $I = \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pole $\vec{f} = (yz, xz + 1, xy - 2)$ po polygonu (lomené čáře) ACDB, kde $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{C} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{D} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{B} = (2, 2, 2)$.

Řešení: Všimněme si, že pole \vec{f} je třídy C^1 dokonce v \mathbb{E}_3 , což je **jednoduše souvislá** oblast, a je v \mathbb{E}_3 **konzervativní**, neboť $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$. Platí totiž $P'_y = Q'_x = z$, $Q'_z = R'_y = x$, $R'_x = P'_z = y$. Křivkový integrál $I = \int_{\mathcal{K}} yzdx + (xz + 1)dy + (xy - 2)dz$, tedy nezávisí podle věty 7.6.10 na cestě, tj. stačí integrovat např. rovnou po úsečce $\mathcal{K} = \text{AB}$. Výpočet však provedeme pomocí potenciálu $U(\mathbf{X})$ pole \vec{f} a najdeme jej oběma metodami.

1. metoda: Řešíme soustavu parciálních diferenciálních rovnic (1. řádu) pro neznámou funkci U , přičemž každou lze řešit přímou integrací

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P = yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q = xz + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R = xy - 2.$$

Integrujeme-li pro získání U např. první rovnici, a pak ji parciálně derivujeme podle y , abychom mohli za $\frac{\partial U}{\partial y}$ dosadit z druhé rovnice, dostáváme (přitom následující aditivní funkce $C(y, z)$ je libovolná třídy C^1 v uvažované oblasti, přičemž $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$)

$$U = \int yzdx + C(y, z) = xyz + C(y, z). \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| [C(y, z) \text{ chceme najít}]$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \underbrace{xz}_{xz} + 1 = \underbrace{xz}_{xz} + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = 1 \Rightarrow C(y, z) = \int dy + C(z) = y + C(z).$$

$$\text{Máme tedy zatím } U = xyz + y + C(z). \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} \right|$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R = \underbrace{xy}_{xy} - 2 = \underbrace{xy}_{xy} + C'(z) \Rightarrow C'(z) = -2 \Rightarrow C(z) = -2z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Tedy } U(\mathbf{X}) = xyz + y - 2z + C.$$

2. metoda: Pomocí vzorce (7.33) máme

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x y_0 z_0 dt + \int_{y_0}^y (xz_0 + 1) dt + \int_{z_0}^z (xy - 2) dt = \\ y_0 z_0 (x - x_0) + (xz_0 + 1)(y - y_0) + (xy - 2)(z - z_0) = xyz + y - 2z + \underbrace{(-x_0 y_0 z_0 - y_0 + 2z_0)}_C,$$

což je stejný výsledek. Pak $I = U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}) = (6 + C) - (C) = 6$. Přímý výpočet integrálu po úsečce AB si může čtenář provést sám.

7.6.12 Příklad Práce W rovinného pole síly $\vec{f} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}$ směřující vždy do počátku $\mathbf{O}(0, 0)$, která způsobuje pohyb po křivce \mathcal{K} hmotného bodu s hmotností m o souřadnicích $(x, y) \neq \mathbf{O}$, jehož rádiusvektor $\vec{r} = (x, y)$ má velikost $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, je dána integrálem²⁶⁾ $W = -m \int_{\mathcal{K}} \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$. Pokud W nezávisí na integrační cestě, najdeme potenciál $U(x, y)$ pole \vec{f} .

Řešení: Označme tradičně P, Q pravoúhlé průměty síly \vec{f} na osu x, y . Pak $P = -mx(x^2 + y^2)^{-3/2}$, $Q = -my(x^2 + y^2)^{-3/2}$ a $P'_y = \frac{3}{2}mx \cdot 2y(x^2 + y^2)^{-5/2} = Q'_x$. Na každé jednoduše souvislé oblasti G , která neobsahuje počátek, je pole $\vec{f} = (P, Q)$ třídy C^1 a podle věty 5.4.22 na str. 106 je též **konzervativní pole** (jde o **Newtonovo gravitační pole**), což je podle věty 7.6.10 ekvivalentní s nezávislostí na cestě a podle této věty můžeme v \mathbb{E}_2 použít jednodušší vzorec než (7.33) pro potenciál rovinného pole (P, Q)

$$\boxed{U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt}. \quad (7.34)$$

²⁶⁾před nímž, stejně jako před silou, vynecháváme v tomto příkladu (a jak je obvyklé i v teoretických oborech) koeficient, např. λ v $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

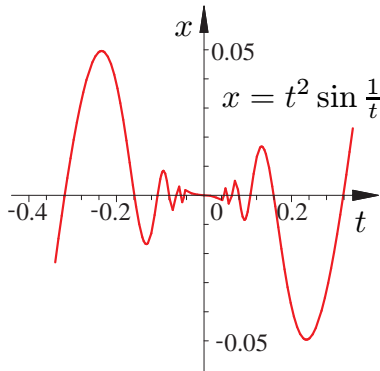
Zvolíme-li např. bod $A(1, 0) \neq O$, pak pro U platí

$$U(x, y) = -m \int_1^x \underbrace{\frac{tdt}{(t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{(tdt)/(t^3 \operatorname{sgn} t)} - m \int_0^y \frac{tdt}{(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} = m \left[\frac{1}{t \cdot \operatorname{sgn} t} \right]_1^x + m \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+t^2}} \right]_{t=0}^{t=y} = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} + \underbrace{(-m)}_C = \frac{m}{r} + C,$$

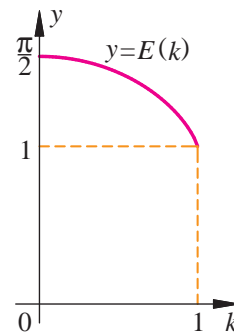
kde funkce $u = \frac{m}{r}$ se nazývá **Newtonův potenciál silového pole** $\vec{f} = -\frac{m}{r^2} \vec{r}^o$ (kde $\vec{r}^o = \frac{1}{r} \vec{r}$) ze zadání příkladu. Označíme-li $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, resp. $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ vzdálenosti počátečního bodu A_1 , resp. koncového bodu A_2 cesty \mathcal{K} od počátku, lze práci po cestě spojující tyto body vyjádřit podle (7.30) vzorcem

$$W = m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

z něž je zřejmé, že vskutku W nezávisí na tvaru integrační cesty \mathcal{K} v poli \vec{f} (závisí na r_1 , resp. r_2).



Obr. 7.17



Obr. 7.18

7.7 Cvičení

A) Křivka v \mathbb{E}_2 a \mathbb{E}_3 . Křivkový integrál skalární funkce

- 1 Parametrizujte křivku v \mathbb{E}_3 , která je průnikem ploch $x^2 + y^2 = a^2$, $y + z = a$, $a \in \mathbb{R}^+$. Určete jednotkové tečné pole $\vec{\tau}^o = \vec{\tau}^o(x, y, z)$ indukované touto parametrizací, název křivky a její náčrt s orientací $\vec{\tau}^o$ pomocí šipky.
 {např. $x = a \cos t, y = a \sin t, z = a(1 - \sin t)$; $\vec{\tau}^o = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2}}(-y, x, -x)$; elipsa; její náčrt označený jako \mathcal{K} včetně orientace je na obr. 8.31 na str. 231}
- 2 Uveďte a) jak může být zadána křivka v rovině nebo prostoru; kolika způsoby lze parametrizovat podle délky oblouku b) otevřenou křivku; c) uzavřenou křivku. {a) neuvádíme; b) 2; c) ∞ }
- 3 Je dán oblouk paraboly $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid y = x^2 \wedge x \in [-2, 2]\}$ s počátečním bodem $A = (-2, 4)$. Zjistěte, zda zobrazení $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ je parametrizací křivky \mathcal{K} , je-li
 - a) $\Phi(t) = (\sqrt{t}, t)$, $t \in [0, 4]$ {není; vektorová funkce $\dot{\Phi}(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, 1)$ není ohraničená na $[0, 4]$ }
 - b) $\Phi(t) = (t, t^2)$, $t \in [-2, 2]$ {je; $\Phi(-2) = A = (-2, 4) \Rightarrow$ orientace \mathcal{K} je souhlasná s parametrizací Φ }
 - c) $\Phi(t) = (t^2, t^4)$, $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ {není; např. $\Phi(-1) = \Phi(1) = (1, 1) \Rightarrow \Phi$ není prosté, a navíc $x = t^2 \geq 0$, kdežto $x_A = -4 < 0$ }
- 4 Parametricky je dána rovinná křivka $\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x = 9 \cos^2 t \wedge y = 4 \sin^2 t \wedge t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Uveďte její implicitní rovnici, název a počáteční bod A při orientaci, která je nesouhlasná se zadanou parametrizací Φ . { $4x + 9y - 36 = 0$, úsečka, $A = \Phi(\frac{\pi}{2}) = (0, 4)$ }
- 5 Parametrizace $\vec{r}(t)$ křivky $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_2$ je v polokartézském tvaru dána vektorovou rovnicí $\vec{r}(t) = \vec{i}t + \vec{j}t^2 \sin \frac{1}{t}$ pro $t \neq 0$, přičemž $\vec{r}(0) = \vec{o}$. S využitím obr. 7.17 a) načrtněte \mathcal{K} ; dále ukažte, že b) zobrazení $\vec{r}(t)$ je spojitě; c) $\vec{r}(t)$ existuje pro každé $t \in \mathbb{R}$; d) $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{i}$; e) $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\vec{r}}(t)$ neexistuje, tedy \mathcal{K} má tečný vektor $\vec{r}'(t)$ (tj. i tečnu) v každém bodě, ale \mathcal{K} není hladká.
- 6 Ověřte, zda existuje křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} f ds$ a v kladném případě jej vypočítejte
 - a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, \mathcal{K} je kružnice o poloměru 1 a středu $(-1, 0)$ {neexistuje $\oint_{\mathcal{K}} f ds$ }

- b) $f(x, y) = \frac{1}{2x-y}$, \mathcal{K} je úsečka AB, A = (0, 3), B = (2, 1)
 {ne, AB protíná přímku $2x - y = 0$ v bodě (1, 2) a $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{2x-y}$ neexistuje}}
- 7 a) Odvoďte vzorec pro **délku kružnice** neboli **obvod kruhu**. b) Přesvědčte se, že **délka** $s(\mathcal{K})$ **elipsy** $\mathcal{K}: x = a \cos t, y = b \sin t$, kde $a < b$, je $s(\mathcal{K}) = 4b \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = 4b \cdot E(k)$, kde jsme položili $k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} < 1$, přičemž $E(k)$ je tzv. **úplný eliptický integrál 2. druhu**²⁷⁾ – viz obr. 7.18.
- 8 Křivkovým integrálem najděte délku jednoho pravotočivého závitu o poloměru a , jenž je určen rovnicemi **pravotočivé kruhové šroubovice** $\mathcal{K}: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$, kde $b > 0$ a $v = 2\pi b$ je **výška závitu**.
 { $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ }
- 9 Vypočítejte délku prostorové křivky $x = 3at^2, y = 3at, z = 2at^3$, kde $a \in \mathbb{R}^+$, od bodu A, v němž $t = 0$, po bod B, v němž $t = 1$.
 { $5a$ }
- 10 Křivkovým integrálem odvoďte obsah $S(\mathcal{S})$ trojúhelníkové části válce \mathcal{S} ohraničené 1. závitem šroubovice ze cvičení 7.7 [8] a rovinou $z = 0$.
 { $2\pi^2 ab$ }
- 11 Stanovte obsah $S(\mathcal{S})$ **kolmé válcové plochy** \mathcal{S} plotu, jehož půdorysem je elipsa $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{400} = 1$, a jehož výška je v každém bodě (x, y) elipsy dána funkcí $f(x, y) = \sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2}$.
 { 1300π }
- 12 Určete hmotnost $H(\mathcal{K})$ drátu ve tvaru jednoho závitu **pravotočivé kruhové šroubovice** ze cvičení 7.7 [8], jehož (délková) hustota je v každém bodě přímo úměrná čtverci vzdálenosti bodu od počátku [tj. $h(x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$].
 { $\frac{2}{3}\pi\lambda(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$ }
- 13 Vyjádřete moment setrvačnosti $I_x(\mathcal{K})$ homogenního drátu \mathcal{K} o hustotě h ve tvaru jednoho oblouku **cykloidy** $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0$, vzhledem k ose z .
 { $\frac{416}{15}ha^3$ }
- 14 Určete **střední hodnotu** $\langle f \rangle$ **funkce** $f(x, y) = x$ na části paraboly $y = x^2, x \in [0, 1]$. Podle **věty 6.2.6 o střední hodnotě integrálního počtu** použijte vzorec $\langle f \rangle = \frac{1}{s(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} f ds$. Fyzikálně interpretujte $\langle f \rangle$.
 { $\frac{5\sqrt{5}-1}{6\sqrt{5}+3\ln(2+\sqrt{5})} \doteq 0,5736$; hodnota $\langle f \rangle = \frac{1}{s(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} x ds$ představuje též výpočet první souřadnice x_T těžiště homogenního drátu $x_T = \frac{1}{H(\mathcal{K})} U_{yz}(\mathcal{K})$ }

B) Křivkový integrál vektorové funkce

- 15 Vypočítejte práci $W = \int_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ vektorového pole \vec{f} po (orientované) křivce \mathcal{K} , resp. při uzavřené křivce zároveň cirkulaci $C_{\mathcal{K}}(\vec{f}) = \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot ds$ tohoto pole \vec{f} , a umíte-li, v případech, kdy lze, použijte **Greenovou větu** pro \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 nebo **nezávislost integrálu na cestě** \mathcal{K} , jestliže
- a) $\vec{f} = (x - y)\vec{i} + (y - x)\vec{j}$, \mathcal{K} je kladně orientovaná hranice $\triangle ABC$, A = (0, 0), B = (a, 0), C = (0, a) {0}
- b) $\vec{f} = (y - x, -x - y)$, \mathcal{K} je oblouk paraboly $y^2 = x$ s počátečním bodem A = (0, 0) a koncovým bodem B = (4, 2) { $-\frac{22}{3}$ }
- c) $\vec{f} = (y - 2a, a - y)$, \mathcal{K} je 1. oblouk **cykloidy** $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým (2 πa , 0) { $-\pi a^2$ }
- d) $\vec{f} = \frac{-y^2\vec{i} + x^2\vec{j}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$, \mathcal{K} je část kladně orientované **asteroidy** $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0$, s počátečním bodem (a, 0) a koncovým bodem (0, a) { $\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$ }
- e) \vec{f} je síla směřující v \mathbb{E}_2 do počátku, která je při kladné konstantě λ úměrná vzdálenosti hmotného bodu (na nějž působí) od počátku, přičemž \mathcal{K} je **asteroida** z předešlého zadání { $\frac{3}{8}\lambda a^2$ }
- f) $\vec{f} = (yz, xz, xy)$, \mathcal{K} je oblouk **pravotočivé kruhové šroubovice** s parametrizací $\Phi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, ($a, b \in \mathbb{R}^+$), $t \in [0, 2\pi]$, která indukčuje orientaci \mathcal{K} . Po výpočtu integrálu zdůvodněte, proč **nezávisí na cestě**, najděte **potenciál** $U(x, y, z)$ **pole** \vec{f} a ověřte pomocí něj výsledek { $W = 0$; protože $Q'_x = P'_y \wedge R'_y = Q'_z \wedge P'_z = R'_x$ v \mathbb{E}_3 (tj. v **jednoduše souvislé oblasti**); $U = xyz + C, C \in \mathbb{R}$ }
- g) uvažujete zadání z příkladu 7.4.7 o toboganu ze str. 181. Ukažte, že **tíhové pole** $\vec{f} = (0, 0, -mg)$ je v \mathbb{E}_3 **konzervativní pole**; určete jeho **potenciál** $U(X)$ a ukažte, že je to **gradientní pole** {je konzervativní (věta 7.6.10), neboť $\text{rot } \vec{f} = \vec{0} \wedge \mathbb{E}_3$ je jednoduše souvislá oblast; $U = -mg(z - z_0) = 3mgh$; $\nabla U = \vec{f} = -mg\vec{k}$ }

²⁷⁾jehož hodnoty jsou tabelovány, popř. se určují přibližnými metodami (číselnou řadou, kvadraturními vzorci atd.)

- h) uvažujete na prostorové oblasti $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ (kdy G je prostor \mathbb{E}_3 bez osy z , jenž není jednoduše souvislou oblastí) **pole magnetické intenzity** $\vec{H} = 2I(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$, indukované proudem konstantního proudu I neomezeným lineárním vodičem umístěným v ose z , u něž jsme v 5.9 [39] na str. 138 neuměli rozhodnout, zda je konzervativní. Dokažte, že \vec{H} není konzervativní²⁸⁾ v G , ačkoli pro $x^2 + y^2 > 0$ splňuje **nutnou podmínku konzervativnosti pole** $\text{rot } \vec{H} = \vec{0}$. Využijte k tomu výpočet nenulové cirkulace $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\vec{H})$ pole \vec{H} po záporně orientovaných kružnicích (při pohledu z kladné části osy z) $\mathcal{K}: x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, tj. nesplnění věty 7.6.6.

16 Užitím křivkového integrálu vyjádřete obsah

- a) kruhu o poloměru a
- b) oblasti ohraničené elipsou o poloosách a, b $\{\{\pi ab\}\}$
- c) obrazce, jehož hranicí je **asteroida** $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ $\{\{\frac{3}{8}\pi a^2\}\}$
- d) obrazce ohraničeného obloukem **cykloidy** $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$ a úsečkou od bodu $(0, 0)$ do bodu $(2\pi a, 0)$. $\{\{3\pi a^2\}\}$

17 Určete množství tepla Q , které pohltí grammolekula ideálního plynu, jenž se při **izotermickém ději**, tj. při stálé termodynamické teplotě T_0 , rozpíná z objemu V_1 na objem V_2 , je-li $Q = \int_{\mathcal{K}} \frac{c_V}{R} V dp + \frac{c_p}{R} p dV$, kde \mathcal{K} je orientovaná křivka, která ve fázovém diagramu určeném stavovou rovnicí $pV = RT$ popisuje vztah mezi tlakem p a objemem V , kde c_V, c_p jsou měrná tepla za stálého objemu, resp. tlaku a R je univerzální plynová konstanta. $\{\{Q = (c_p - c_V)T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}\}\}$

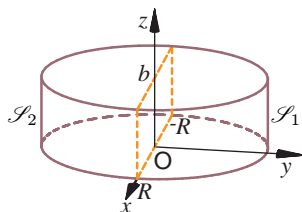
²⁸⁾avšak je konzervativní v každé podoblasti $G^* \subset G$, je-li G^* jednoduše souvislá

8 Plošný integrál

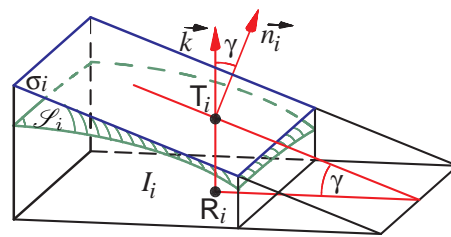
8.1 Obsah plochy jako grafu explicitní spojitě diferencovatelné funkce, fyzikální aplikace skořepiny

8.1.1 Fyzikální motivace pro plošný integrál Teorie plošného integrálu patří k náročnějším partiím matematické analýzy. S plošným integrálem je možné se setkat při formulaci důležitých principů matematické fyziky i úloh z aplikovaných oborů, v nichž se objevují bilance toků vektorových veličin částmi ploch rozmanitých profilů nebo jsou studovány celkové účinky kontaktních sil na makroskopickou část materiálu daného objemu a povrchu atd. Jde o vztahy v teorii elektromagnetického či elektrostatického pole nebo v inženýrské reologii, která studuje deformace a proudění reologicky komplexních materiálů v technologických procesech, často s přihlédnutím k dalším transportním jevům – sdílení hmoty a tepla apod.

Plošný integrál je zobecněním dvojného a křivkového integrálu, kdy integračním oborem je úsek – kus (ohraničená část) nikoli pouze rovinné, ale v obecném případě křivé **plochy** \mathcal{S} , tj. jde o útvar – plochu (termín plocha dále upřesníme) v trojrozměrném euklidovském prostoru \mathbb{E}_3 . Takové plochy už známe z geometrie. Rovněž v této kapitole pro zjednodušení úvah **zvolíme pevný kartézský systém souřadnic**.



Obr. 8.1



Obr. 8.2

8.1.2 Příklad Plochou rozumíme např. plášť \mathcal{S} kolmého válce o poloměru R a výšce b s osou v ose z , s podstavou v souřadnicové rovině Oxy , vyjádřený např. v **parametrickém tvaru** se dvěma parametry u, v rovnicemi (jejichž analogii jsme poznali při válcových souřadnicích)

$$\mathcal{S}: \quad x = \phi(u, v) = R \cos u, \quad y = \psi(u, v) = R \sin u, \quad z = \chi(u, v) = v, \quad (8.1)$$

kde $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq b$. Tedy každý bod $\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{E}_3$ uvažované plochy $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$ je hodnotou bodové, resp. vektorové funkce (zobrazení) $\Phi: M \rightarrow \mathcal{S}$, resp. $\vec{r}: M \rightarrow \mathcal{S}$

$$\mathbf{X} = \Phi(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \quad (8.2)$$

resp.

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \phi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k}, \quad (8.3)$$

kdy zobrazovaným vzorem je bod $\mathbf{U} = (u, v) \in M$, $M \subset \mathbb{E}_2$, M je zde uzavřený obdélník $[0, 2\pi] \times [0, b]$. Píšeme $\mathcal{S} = \Phi(M) = \{\Phi(u, v) | (u, v) \in M\}$, resp. $\mathcal{S} = \vec{r}(M) = \{\vec{r}(u, v) | (u, v) \in M\}$, neboť stejně jako u křivkového integrálu:

při volbě libovolného, avšak pevného kladného neboli pravotočivého systému kartézských souřadnic lze pro zjednodušení popisu v souřadnicích ztotožnit $\mathbb{E}_3 \equiv \mathbb{V}_3$, tedy $\mathbf{X} \equiv \vec{r}$.

Protože uvažovaná plocha \mathcal{S} je částí neohraničené válcové plochy \mathcal{S}^* **dané implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$, konkrétně $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, lze \mathcal{S} rovněž vyjádřit jako sjednocení $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ dvou ploch definovaných explicitní funkcí vzhledem k proměnné y

$$\mathcal{S}_1: \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (x, z) \in M, \quad \mathcal{S}_2: \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2}, \quad (x, z) \in M, \quad (8.4)$$

kde M je nyní uzavřený obdélník $[-R, R] \times [0, b]$, viz obr. 8.1 (popř. podobně vzhledem k proměnné x).

8.1.3 Příklad Jak známo, rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad R > 0 \quad (8.5)$$

je dána kulová plocha (sféra) o poloměru R se středem v počátku a tuto uzavřenou (hladkou) plochu lze parametricky vyjádřit zobrazením Φ rovnicemi (jejichž analogii jsme poznali při sférických souřadnicích)

$$\Phi: \quad x = x(u, v) = R \cos u \sin v, \quad y = y(u, v) = R \sin u \sin v, \quad z = z(u, v) = R \cos v, \quad (8.6)$$

kde bod $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

8.1.4 Věta o výpočtu obsahu úseku hladké plochy dané grafem funkce *Obsah* $S(\mathcal{S})$ úseku *hladké*¹⁾ *plochy* dané grafem funkce třídy C^1 určené rovnicí²⁾

$$z = f(x, y)$$

ve všech bodech (x, y) ležících v *jednoduše souvislém obrazci*³⁾ M , tj. v obrazci ohraničeném jedinou uzavřenou (neprotínající se) křivkou⁴⁾ ∂M , kde f je *spojitě diferencovatelná funkce* na M , je *definován dvojným integrálem*

$$S(\mathcal{S}) = \iint_M \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} dx dy \quad \star \quad (8.7)$$

Důkaz: schematicky naznačíme a rozšíříme o doplňující poznámky.

- a) Vzorec pro *obsah* $S(\mathcal{S})$ úseku \mathcal{S} *plochy*, kde $S(\mathcal{S})$ je číselná charakteristika plochy, tzv. *plošná míra*, daná dvojným integrálem, je zobecnění vzorce pro délku $s(\mathcal{K})$ rovinné křivky (oblouku) \mathcal{K} , určené grafem funkce $f(x) \in C^1[a, b]$ (tj. *hladké* funkce) definované jednoduchým integrálem

$$s(\mathcal{K}) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (8.8)$$

- b) Z integrálního počtu funkce jedné proměnné víme, že délku $s(\mathcal{K})$ oblouku \mathcal{K} lze definovat jako limitu délek lomených čar – *polygonů* vepsaných do daného oblouku.⁵⁾ Přesto koncem 19. století ukázal německý matematik H. A. Schwarz (1843–1921), že analogický postup u daného úseku \mathcal{S} nekomplikované plochy, pracovně si tento úsek nazvěme „*list*“ (termín ještě upřesníme), tedy kdy do listu \mathcal{S} vpisujeme mnohohranné plochy – *polyedry* skládající se z trojúhelníků a obsah listu definujeme jako limitu obsahů vepsaných polyedrů, selže už i u tak nekomplikované plochy, jako je plášť rotačního válce, později se podařilo princip vpisování zdokonalit (Lze při něm využít *izometrické zobrazení*, jež jsme uvedli v 2.2.4 na str. 31 a zmíníme dále). Pro jeho komplikovanost jej nyní uvedeme ve velmi speciálním případě, který se týká vzorce (8.7) a situace na obr. 8.2.

- c) Vnoříme obrazec M do libovolného *souřadnicového obdélníka*⁶⁾ I , který rozdělíme na konečný počet dílčích obdélníků. Z nich berme v úvahu jen ty, co mají s M neprázdné průniky, označme je I_1, I_2, \dots, I_n , jejich délky stran nechť jsou po řadě $\Delta x_1, \Delta y_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n$, a jejich odpovídající obsahy označme P_1, P_2, \dots, P_n (tj. $P_i = \mu_2(I_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), je dvojrozměrná Jordan-Peanova míra). V každém obdélníku I_i zvolme libovolný bod, tzv. *i-tého reprezentanta* $R_i = (x_i, y_i)$ tak, aby bod $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, kde $z_i = f(x_i, y_i)$, ležel na daném listu \mathcal{S} . Předpoklady tvrzení zaručují existenci tečné roviny v každém bodě na \mathcal{S} , proto i v bodě T_i existuje, jak víme, normálový vektor \vec{n}_i o délce $\|\vec{n}_i\|$ ve tvaru

$$\vec{n}_i = (-f'_x, -f'_y, 1), \quad \|\vec{n}_i\| = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}, \quad (8.9)$$

(podrobněji $\vec{n}_i(T_i) \equiv \vec{n}_i(R_i) = (-f'_x(R_i), -f'_y(R_i), 1)$), jehož směrový kosinus (tj. kosinus vektorů \vec{n}_i a směru $\vec{k} = (0, 0, 1)$ orientované osy z) je

$$\cos \gamma = \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{k}}{\|\vec{n}_i\| \|\vec{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}} \neq 0,$$

neboť f'_x, f'_y jsou na M spojité, tedy ohraničené, tj. konečné. Z příslušného trojúhelníka je vidět, že uvažovaná tečná rovina a souřadnicová rovina Oxy mají odchylku γ . Označme σ_i (tečný) obdélník o obsahu $P(\sigma_i)$,

¹⁾ Z 5.4.19 ze str. 103 víme, že plocha je *hladká* (1. řádu), právě když se *normálový vektor* \vec{n} uvažované plochy *spojitě mění*. K tomu je nutné i stačí podle dále uvedeného vzorce (8.12), aby funkce f byla *hladká* (1. řádu) na uvažované oblasti G neboli byla třídy C^1 na G (tj. $f \in C^1(G)$) neboli f byla *spojitě diferencovatelná* na G . Avšak v případě uzavřené oblasti, jakou je obrazec M se předpokládá, že existuje *rozšíření* f^* *funkce* f třídy C^1 z obrazce M (jakožto uzavřené množiny) na oblast (jakožto otevřenou množinu) $G \subset \mathbb{E}_2$, $G \supset M$, jejíž *zúžení* na M je funkce f (tj. $f^*|_M = f$). Parciálními derivacemi $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ na hranici ∂M (resp. s výjimkou konečného počtu bodů této hranice, jak připustíme v pozdější definici listu) rozumíme parciální derivace $\frac{\partial f^*}{\partial x}$, $\frac{\partial f^*}{\partial y}$ onoho rozšíření f^* . Musíme totiž připomenout, že doposud jsme uvažovali parciální derivace funkcí, resp. zobrazení pouze ve vnitřních bodech jejich definičních oborů, tj. vesměs na *otevřených* množinách, jimiž jsou popř. samotná okolí oněch bodů. Zároveň pro korektnost zmíněného rozšíření f^* třídy C^1 lze dokázat, že pro každá dvě rozšíření f_1^*, f_2^* třídy C^1 funkce f třídy C^1 platí v každém bodě B hranice ∂M obrazce M rovnosti jejich parciálních derivací podle obou proměnných, tj. $\frac{\partial f_1^*}{\partial x}(B) = \frac{\partial f_2^*}{\partial x}(B)$, $\frac{\partial f_1^*}{\partial y}(B) = \frac{\partial f_2^*}{\partial y}(B)$.

²⁾ Připomeňme, že podle 4.1.3 na str. 58 *grafem* $G(f)$ funkce $f(x, y)$ definované na množině $M \subseteq \mathbb{E}_2$, je v \mathbb{E}_3 množina bodů $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\}$.

³⁾ jakožto *kompaktní* oblasti, která je *měřitelná* v \mathbb{E}_2

⁴⁾ Tedy M je *obrazec*, tj. *regulární množina*, která je uzavřenou oblastí, zde *jednoduše souvislou*, tj. bez „děr“. Z důkazu věty je zřejmé, že M je projekcí úseku plochy \mathcal{S} do roviny Oxy .

⁵⁾ či ekvivalentně jako supremum délek těchto polygonů

⁶⁾ tj. majícího strany rovnoběžné se souřadnicovými osami

vzniklý průřezem uvažované tečné roviny s kvádrem sestrojeným nad podstavou, již je obdélník I_i . Mezi zmíněnými obsahy platí vztah $P(\sigma_i) \cos \gamma = P_i$, neboť I_i je pravoúhlým průmětem (projekcí) σ_i do Oxy . Odtud je

$$P(\sigma_i) = \frac{P_i}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} P_i.$$

Součet $s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V})$ obsahů $P(\sigma_i)$ všech tečných obdélníků σ_i neboli **integrální součet** funkce f při **dělení** $\mathcal{D} = \{I_1, \dots, I_n\}$ a **výběru reprezentantů** $\mathcal{V} = \{R_1, \dots, R_n\}$ je pak dán vztahem

$$s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n P(\sigma_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \Delta x_i \Delta y_i \quad (8.10)$$

a představuje součet obsahů všech „**deskových obkladů**“ σ_i (celého listu \mathcal{S}) vyřatých z tečných rovin a sestrojených – „**nalepených**“ v bodech T_i na listu, který je jimi (na M) zcela pokryt. Jelikož se v blízkém okolí $\mathcal{O}(R_i)$ bodu R_i tečný obdélník σ_i těsně přimyká k (hladkému) listu \mathcal{S} , konkrétně k jeho i -tému dílčímu úseku – dílčímu listu \mathcal{S}_i , budeme obsahem $S(\mathcal{S})$ listu \mathcal{S} rozumět limitu posloupnosti integrálních součtů pro $n \rightarrow \infty$, jestliže se zároveň všechny obdélníky I_i (co do délky i šířky) zmenšují k nule.

[Při obecnějších úvahách se na obsah $S(\mathcal{S})$, jakožto na **plošnou míru** listu (kdy dílčí list \mathcal{S}_i se **izometricky**⁷⁾ zobrazí na rovinnou oblast, v našem případě je to tečný obdélník σ_i), kladou požadavky jako na každou míru, zde je to mimo požadavku, aby platila rovnost

$$S(\mathcal{S}_i) = \mu_2(\sigma_i) \equiv P(\sigma_i)$$

(kde μ_2 je dvojrozměrná míra neboli obsah uzavřené rovinné oblasti), též mj. požadavek, aby obsah byl aditivní funkcí listu \mathcal{S} , tzv. **aditivita plošné míry** (aditivita obsahu listu). Tzn., je-li list \mathcal{S} sjednocením „v podstatě“ **nepřekrývajících se** listů $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$, tj. jejichž „vnitřky“ nemají společné body – přesněji $\mathcal{S}_i^\circ \cap \mathcal{S}_j^\circ = \emptyset$ pro $i \neq j$, kde \mathcal{S}° je (geometrický) „**vnitřek listu**“ \mathcal{S} , přičemž $\mathcal{S}^\circ = \mathcal{S} \setminus \partial \mathcal{S}$ a $\partial \mathcal{S}$ je „**okraj listu**“ \mathcal{S} (pojmy v uvozovkách později upřesníme), což je množina $\partial \mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in \partial M \wedge z = f(x, y)\}$ – pak platí

$$S(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m S(\mathcal{S}_i), \quad (8.11)$$

atd.]

Protože funkce (je to délka normálového vektoru plochy)

$$\|\vec{n}(x, y)\| = \sqrt{1 + [f_x'(x, y)]^2 + [f_y'(x, y)]^2} \quad (8.12)$$

je spojitá na M , je tam též integrovatelná, odkud dostáváme tvrzení věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) = \iint_M \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

8.1.5 Poznámka o pravoúhlých průmětech plochy Jednoduše souvislý obrazec M z předešlé věty je vlastně **pravoúhlým průmětem (projekcí)** uvažovaného úseku **plochy** – listu \mathcal{S} do souřadnicové roviny Oxy . Vzhledem ke vzorci (8.12) lze definovat obsah listu \mathcal{S} s pravoúhlým průmětem do roviny xy též vztahem

$$S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{n}(x, y)\| dx dy. \quad (8.13)$$

V analogických případech, kdy list \mathcal{S} zadaný funkcí $x = g(y, z)$, resp. $y = \varphi(x, z)$ pravoúhle promítneme do roviny yz , resp. xz , dostaneme

$$S(\mathcal{S}) = \iint_M \sqrt{1 + g_y'^2 + g_z'^2} dy dz, \quad \text{resp.} \quad S(\mathcal{S}) = \iint_M \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_z'^2} dx dz. \quad (8.14)$$

• V příkladech se často při řešení aplikací využije **věta 6.2.2 o postačující podmínce existence integrálu** (str. 150), zde dvojného, kdy k jeho existenci na měřitelné množině M v \mathbb{E}_2 postačuje, aby v integrandu uvažované funkce definující plochu, zde jejich první parciální derivace, byly funkce **spojité** jen **skoro všude** (tj. až na množinu míry nula v M), avšak byly na M **ohraničené**, a dále se využije **věta 6.2.4 o vlastnosti f)**, tj. **invariantnosti integrálu vzhledem ke změně hodnot integrandu na množině míry nula při zachování jeho ohraničenosti na M** . Touto množinou nulové míry bývají části nebo celá hranice ∂M oboru M , bod v M , jemuž odpovídá vrchol kuželové plochy apod.

⁷⁾ **Izometrické zobrazení** (Viz 2.2.4 na str. 31) je **bijektivní** zobrazení Φ mezi metrickými prostory (M, d) a (M, d^*) , **zachovávající vzdálenosti metriky vzorů i obrazů**, tj. platí $d(x_1, x_2) = d^*(\Phi(x_1), \Phi(x_2))$ pro všechny prvky $x_1, x_2 \in M$. Je teoretickým předpokladem pro zachování **neroztažitelnosti** listu (skořepiny), a tím i jeho **obsahu**.

8.1.6 Příklad na obsah Vivianiova⁸⁾ okna (florentinský problém z r. 1692) Vypočítejme obsah $S(\mathcal{S})$ úseku plochy, která je částí kulové plochy (sféry) $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ nad rovinou $z = 0$, vyřazené rotační válcovou plochou $x^2 + y^2 = 2ax$ pro $a > 0$.

Řešení: **Vivianiovo okno** je znázorněno na obr. 8.3 [Je polovinou tzv. **Vivianiovy plochy**, která by připomínala povrch vyplňující „osmičku“ (tzv. **Vivianioho křivku**, jež je průsečnicí naší sféry s naší rotační válcovou plochou) nalepenou na sféru]. Protože okno je souměrné podle roviny xz , připravíme si výpočet obsahu jen jeho poloviny nad vyšrafovanou oblastí – (horním) půlkruhem, jež označíme M . Pro uvažovanou (horní) polosféru $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ je

$$1 + f_x'^2 + f_y'^2 = 1 + \frac{(-x)^2}{4a^2 - x^2 - y^2} + \frac{(-y)^2}{4a^2 - x^2 - y^2} = \frac{4a^2}{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Použitím transformace $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$ do polárních souřadnic máme

$$\begin{aligned} S(\mathcal{S}) &= \iint_M \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy = 2 \iint_M \frac{2a dx dy}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{4a^2 - \varrho^2}} = \\ &= -4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{4a^2 - \varrho^2} \right]_{\varrho=0}^{2a \cos \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a - 2a \sin \varphi) d\varphi = 8a^2 [\varphi + \cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4(\pi - 2)a^2. \end{aligned}$$

Má-li sféra poloměr R , pak obsah příslušného Vivianioho okna je $(\pi - 2)R^2$.

8.1.7 Poznámka k následující větě o aplikacích Následující věta zahrnuje vzorce pro aplikace hmotné plochy – **skořepiny** \mathcal{S} , což umožní řešit zajímavé úlohy. Je zařazena před výklad učiva o plošném integrálu. Jeho výpočet, jak poznáme, se však vždy převádí na dvojný integrál. Navíc zápis níže zapsaných vzorců sice připomíná plošný integrál (skalárního integrandu), avšak oborem integrace zde ještě není, jak tomu u něj bývá, parametrizovaná plocha v \mathbb{E}_3 , ta je zde zadána grafem explicitní funkce $z = f(x, y)$, ale **integračním oborem ve vzorcích je jednoduše souvislý obrazec** M v souřadnicové rovině Oxy jako kolmý průmět úseku \mathcal{S} plochy. Pro výpočet zmíněného dvojného integrálu jen stačí dosadit všude za závisle proměnnou z , za element dS obsahu plochy, a tím přejít k integraci v proměnných x, y (podobně jako se u plošného integrálu přejde k parametrům u, v jisté parametrizace $\Phi(u, v)$).

8.1.8 Věta o fyzikálních aplikacích hmotné plochy – skořepiny dané grafem spojitě diferencovatelné funkce Necht \mathcal{S} je úsek hladké⁹⁾ plochy dané grafem funkce třídy C^1 určené rovnicí $z = f(x, y)$ a definované ve všech bodech (x, y) ležících v obrazci M ohraničeném jedinou uzavřenou křivkou ∂M neboli M je jednoduše souvislý obrazec. Necht na hmotném úseku plochy – na **skořepině**¹⁰⁾ \mathcal{S} je hmota rozložena s **plošnou hustotou** ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) danou spojitou funkcí $h(\mathbf{X}) = h(x, y, z)$. Pak pro celkovou **hmotnost** H (kg), **statické momenty** U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} ($\text{kg} \cdot \text{m}$) skořepiny \mathcal{S} po řadě vzhledem k souřadnicovým rovinám Oxy, Oxz, Oyz , pro **souřadnice těžiště** $\mathbf{T} = (x_{\mathbf{T}}, y_{\mathbf{T}}, z_{\mathbf{T}})$ (m), pro **momenty setrvačnosti** I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$) skořepiny \mathcal{S} vzhledem k souřadnicovým rovinám Oxy, Oxz, Oyz , pro **momenty setrvačnosti** I_x, I_y, I_z, I_O vzhledem k souřadnicovým osám Ox, Oy, Oz nebo počátku $O = (0, 0, 0)$ a např. pro **kinetickou energii** $E_z(\mathcal{S})$ (J) skořepiny rotující kolem osy Oz konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}), platí tyto vzorce, které využívají dvojný integrál

$$H(\mathcal{S}) = \iint_M dH = \iint_M h(x, y, z) dS = \iint_M h(x, y, f(x, y)) \cdot \sqrt{1 + [f_x'(x, y)]^2 + [f_y'(x, y)]^2} dx dy$$

$$U_{xy}(\mathcal{S}) = \iint_M z \cdot h(\mathbf{X}) dS, \quad U_{xz}(\mathcal{S}) = \iint_M y \cdot h(\mathbf{X}) dS, \quad U_{yz}(\mathcal{S}) = \iint_M x \cdot h(\mathbf{X}) dS$$

$$x_{\mathbf{T}} = \frac{U_{yz}(\mathcal{S})}{H(\mathcal{S})}, \quad y_{\mathbf{T}} = \frac{U_{xz}(\mathcal{S})}{H(\mathcal{S})}, \quad z_{\mathbf{T}} = \frac{U_{xy}(\mathcal{S})}{H(\mathcal{S})}$$

$$I_{xy}(\mathcal{S}) = \iint_M z^2 h(\mathbf{X}) dS, \quad I_{xz}(\mathcal{S}) = \iint_M y^2 h(\mathbf{X}) dS, \quad I_{yz}(\mathcal{S}) = \iint_M x^2 h(\mathbf{X}) dS$$

$$I_x(\mathcal{S}) = \iint_M (y^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dS, \quad I_y(\mathcal{S}) = \iint_M (x^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dS, \quad I_z(\mathcal{S}) = \iint_M (x^2 + y^2) h(\mathbf{X}) dS$$

$$I_O(\mathcal{S}) = \iint_M (x^2 + y^2 + z^2) h(\mathbf{X}) dS$$

$$E_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \omega^2 I_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dS,$$

⁸⁾Viviani, Vincenzo (1622-1703), italský matematik, žák Galilea Galileiho (1564-1642).

⁹⁾V poznámce 8.1.5 zmiňujeme, že hladkost plochy \mathcal{S} garantovaná tím, že f je třídy C^1 na M , může být porušena, tedy spojitost prvních parciálních derivací může být porušena na množině míry 0 při zachování jejich ohraničenosti na M .

¹⁰⁾V **teorii skořepin** střední síly vynikl ruský inženýr a matematik Boris Grigorjevič Galerkin (1871-1945). Známa je **Galerkinova variační metoda**, vhodná pro numerické řešení úloh vedoucích na nelineární parciální diferenciální rovnice.

kde dH nebo dS nebo $\vec{n}(x, y)$ značí *element hmotnosti* nebo *element (obsahu) plochy grafu funkce* \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 či *plošný element plochy* (diferenciál plochy) *grafu funkce* nebo *normálový vektor plochy* \mathcal{S} *grafu funkce*, přičemž oba elementy zavádíme vztahy

$$\boxed{dH = h(x, y, z)dS}, \text{ resp. } \boxed{dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy = \|\vec{n}(x, y)\| \cdot dx dy} \quad (8.15)$$

[a zároveň při výpočtu dvojného integrálu je $h(x, y, z) = h(x, y, f(x, y)) = \tilde{h}(x, y)$ funkcí pouze argumentů x, y , přičemž z (nerozepsaných) tvarů našich vzorců bude dobře zřejmá souvislost s obecnějšími, dále uvedenými vzorci, obsahujícími již plošný integrál – viz 8.4.2]. ★

8.1.9 Příklad Určeme kinetickou energii homogenní skořepiny \mathcal{S} o hmotnosti H , jíž je úseč rotačního paraboloidu $z = \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - y^2)$, $z \geq 0$, $a > 0$, která rotuje kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω , známe-li její obsah $S(\mathcal{S}) = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)\pi a^2$ (Ověřte si).

Řešení: Počítáme $E_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\omega^2 \cdot I_z(\mathcal{S})$, kde $I_z(\mathcal{S})$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose z . Průnikem \mathcal{S} se souřadnicovou rovinou Oxy je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ definující kruh M , jenž je projekcí \mathcal{S} do Oxy .

$$\begin{aligned} I_z(\mathcal{S}) &= \iint_M (x^2 + y^2)h(x, y, z)dS = h \iint_M (x^2 + y^2)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \\ &= h \iint_M (x^2 + y^2)\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{h}{a} \iint_{M^*} \varrho^2 \sqrt{a^2 + 4\varrho^2} d\varrho d\varphi = \\ &= \frac{h}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \varrho^2 \sqrt{a^2 + 4\varrho^2} d\varrho = |a^2 + 4\varrho^2 = t| = \frac{2\pi h}{a} \cdot \frac{1}{8} \int_{a^2}^{5a^2} \frac{1}{4}(t - a^2)\sqrt{t} dt = \\ &= \frac{1}{60}(25\sqrt{5} + 1)\pi h a^4 \Rightarrow E_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{25\sqrt{5} + 1}{5\sqrt{5} - 1} \cdot H a^2 \omega^2 = \frac{313 + 15\sqrt{5}}{1240} H a^2 \omega^2 \doteq 0,279 H a^2 \omega^2. \end{aligned}$$

8.1.10 Příklad, kdy \mathcal{S} se nepromítá do roviny Oxy jako plocha Vypočítejme hmotnost $H(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} , která je částí válcové plochy $x^2 + y^2 = R^2$ mezi rovinami $z = 0, z = b$ ($R > 0, b > 0$), přičemž plošná hustota je $h(x, y, z) = \lambda(\sqrt{R^2 - x^2} + y + z)$, kde koeficient $\lambda > 0$ je v měřící jednotce $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení: Pravoúhlým průmětem pláště \mathcal{S} rotačního válce o poloměru R a výšce b do souřadnicové roviny Oxy není rovinná plocha, konkrétně obrazec, nýbrž kružnice $x^2 + y^2 = R^2$. Navíc z rovnice plochy ani nelze z vyjádřit jako funkci argumentů x, y , viz obr. 8.1. Proto \mathcal{S} nejdříve vyjádříme jako sjednocení dvou částí $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, kde $\mathcal{S}_1 : y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $\mathcal{S}_2 : y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (přičemž $-R \leq x \leq R \wedge 0 \leq z \leq b$), a ty promítneme např. do (bokorysny) Oxz . Jejich projekcí je obdélník $M = \{(x, z) \in \mathbb{E}_2 \mid -R \leq x \leq R \wedge 0 \leq z \leq b\}$. Na skořepině \mathcal{S}_1 , resp. \mathcal{S}_2 je hmotnost $H(\mathcal{S}_1)$, resp. $H(\mathcal{S}_2)$ určena hustotou $h_1(X) = \lambda(\sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x^2} + z) = \lambda(2\sqrt{R^2 - x^2} + z)$, resp. $h_2(X) = \lambda(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x^2} + z) = \lambda z$, takže podle vzorce $\boxed{H(\mathcal{S}) = \iint_M h(x, y, z)dS}$ z věty 8.1.8 a podle modifikovaného druhého vzorce v (8.15) pro element plochy, tedy podle vzorce

$$\boxed{dS = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz}, \quad (8.16)$$

můžeme psát

$$1 + y_x'^2 + y_z'^2 = 1 + (\mp \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}})^2 + 0 \Rightarrow dS = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz. \text{ Pak}$$

$$\begin{aligned} H(\mathcal{S}_1) &= \iint_M h_1(X)dS = \lambda \iint_M (2\sqrt{R^2 - x^2} + z) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz = \lambda R \iint_M \left(2 + \frac{z}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx dz = \\ &= \lambda R \int_{-R}^R dx \int_0^b \left(2 + \frac{z}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dz = 2\lambda R \int_0^R dx \left[2z + \frac{z^2}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right]_0^b = 2\lambda R \int_0^R \left(2b + \frac{b^2}{2\sqrt{R^2 - x^2}}\right) dx = \\ &= 2\lambda R b \left[2x + \frac{b}{2} \arcsin \frac{x}{R}\right]_0^R = 4\lambda R^2 b + \frac{\pi}{2} \lambda R b^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(\mathcal{S}_2) &= \iint_M h_2(X)dS = \lambda \iint_M z \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dz = \lambda R \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^b z dz = \lambda R b^2 \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= \lambda R b^2 \left[\arcsin \frac{x}{R}\right]_0^R = \frac{\pi}{2} \lambda R b^2, \end{aligned}$$

$$H(\mathcal{S}) = H(\mathcal{S}_1) + H(\mathcal{S}_2) = \lambda(4R + \pi b)Rb \text{ (kg)}.$$

8.2 Modelování ploch parametrizací. Obsah a orientace plochy i jejího okraje. Jordanova věta v \mathbb{E}_3

8.2.1 Geometrická a fyzikální motivace pro jednoduchou hladkou plochu v \mathbb{E}_3 se v mnoha rysech shoduje s tím, co jsme už uvedli pro křivku v předešlé kapitole 7, článku 7.1, i když plocha je složitější útvar, a tudíž vyžaduje komplikovanější matematické prostředky. Připomeňme, že v DP jsme definovali pojem *jednoduchá plocha* a v odstavci **Geometrický a fyzikální význam gradientu** pak pojem *regulární plocha* \mathcal{S} v \mathbb{E}_n *třídy* C^k (resp. *nadplocha*, je-li $n \geq 4$) neboli *izoplocha* či *c-hladina* (*ekviskalární plocha*, či *úrovňová plocha*) *funkce* $U(x_1, \dots, x_n)$ *třídy* C^k ($k \geq 1$), kde \mathcal{S} je neprázdná

množina bodů X z oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_n$, definovaná takto $\mathcal{S} = \{X \in G \mid U(X) = c \equiv U(T) \wedge U \in C^k(G) \wedge \nabla U(T) \neq \vec{0}\}$.

- Geometricky lze plochu interpretovat jako „**dvozměrný útvar**“ v **trojrozměrném, popř. vícerozměrném prostoru**, jehož body jsou popsány dvojicí křivočarých souřadnic. V aplikacích se pojmu **skořepina** jako ekvivalentu hmotné plochy používá pro matematické modelování těles, která mají jeden rozměr zanedbatelný vůči ostatním dvěma rozměrům.

- **Fyzikální model skořepiny** realizující úsek plochy \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 můžeme pro většinu praktických aplikací vytvořit **přemístováním bodů** původně rovinného velmi tenkého kusu elastické neroztažitelné desky či fólie (abstraktněji **obrazce**) $M \subset \mathbb{E}_2$ jeho **elastickou deformací**, tj. jeho ohýbáním v různých směrech tak, aby se netvořily trhliny a ani se nespojily (neslepily) žádné dva jeho body X_1, X_2 . Elastická deformace je realizací „skoro všude“ **hladkého zobrazení** do trojrozměrného euklidovského prostoru $\Phi: M \rightarrow \mathbb{E}_3$ jistých vlastností, přičemž každému bodu $U = (u, v) \in M$, $M \subset \mathbb{E}_2$ je přiřazen bod $X = (x, y, z)$ plochy $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$, a takové zobrazení se nazve **parametrizace** Φ . Píšeme $\mathcal{S} = \Phi(M) = \{\Phi(u, v) = X \in \mathbb{E}_3 \mid (u, v) = U \in M, M \subset \mathbb{E}_2\}$. Oborem hodnot parametrizace Φ bude **jednoduchá**, a s výjimkou nejvýše konečně mnoha bodů, **hladká plocha** – neboli **list** \mathcal{S} . Jde tedy o zobrazení typu (2, 3).

- Složitější a pro praxi potřebné (**vicelisté**) **po částech hladké plochy** získáme, analogicky jako v případě křivek, jejich „přilepováním“ (tj. jistým sjednocováním) jednotlivých sousedních – tzv. „přilehlých“ neboli „přilepených“ listů, které se „v podstatě“ **nepřekrývají**, pod čímž si prozatím představme jejich dotyk (přilepení) takový, že při něm mají tyto „přilehlé“ listy společnou právě jedinou křivku patřící do „okrajů“ obou „přilehlých“ listů.

- Protože z rozličných způsobů zápisu **listu** \mathcal{S} pomocí **parametrizace** Φ , např. $\mathcal{S} = \Phi(M)$, nemusí být zřejmý rozdíl mezi oběma pojmy, zdůrazněme to, co už víme o **oblouku**, že totiž rovněž **každý list může být vyjádřen nekonečně mnoha parametrizacemi**.

- Jednoznačně uveďme, že povrch ∂T tělesa T , např. kvádrů, pro nás všude dále bude znamenat jeho hranici ∂T , tj. v tomto případě hraniční plochu, takže **naší „snahou“ bude neztotožňovat povrch s jeho velikostí**, tedy s **obsahem** povrchu $S(\partial T)$ (jak to připouští školní norma [29], např. na str. 50,57).

- Podobně jako u parametrických rovnic rotační válcové plochy v 8.1.2 nebo u kulové plochy v 8.1.3, uvažujme nyní obecně bodovou, resp. vektorovou funkci $\Phi(u, v)$, resp. $\vec{r}(u, v)$ zapsanou **parametrickými rovnicemi** (pomocí **souřadnicových funkcí** ϕ, ψ, χ s argumenty u, v , kterým se říká **parametry**)

$$\Phi, \vec{r}: \quad x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) = U \in M, \quad (8.17)$$

reprezentujícími list \mathcal{S} . Analogicky jako jsme v (7.3) u křivky ukázali, že $\vec{\Phi}(t)$ je vektor, a to její **tečný vektor** v uvažovaném bodě, lze též parciální derivace $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ (resp. \vec{r}'_u, \vec{r}'_v) považovat za vektory a psát **souřadnicově** (resp. pro \vec{r}'_u, \vec{r}'_v **polokartézsky**)

$$\vec{\Phi}'_u(u, v) = (\phi'_u, \psi'_u, \chi'_u) \text{ nebo jen } \vec{\Phi}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u), \quad (8.18)$$

$$\vec{\Phi}'_v(u, v) = (\phi'_v, \psi'_v, \chi'_v) \text{ nebo jen } \vec{\Phi}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v). \quad (8.19)$$

Za jistých předpokladů na parametrizaci $\Phi(u, v)$, konkrétně na hodnotu její **Jacobiovy matice** $J_\Phi(u, v)$ (Viz (8.23)) lze odvodit, že **vektory** $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ jsou **lineárně nezávislé tečné vektory** jisté tzv. u -křivky a v -křivky procházející uvažovaným bodem **plochy**, a tyto vektory v tomto bodě určují **zaměření tečné roviny** plochy, a tudíž definují svým vektorovým součinem v onom bodě **normálový vektor** \vec{n} (směrový vektor \vec{n} normály n), tj.

$$\vec{n} = \vec{\Phi}'_u(U) \times \vec{\Phi}'_v(U) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}}_{n_1} \vec{i} + \underbrace{\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}}_{n_2} \vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}_{n_3} \vec{k} = \underbrace{(y'_u z'_v - z'_u y'_v)}_{n_1} \vec{i} + \underbrace{(z'_u x'_v - x'_u z'_v)}_{n_2} \vec{j} + \underbrace{(x'_u y'_v - y'_u x'_v)}_{n_3} \vec{k}. \quad (8.20)$$

[Použili jsme Laplaceova rozvoje determinantu 3. stupně podle prvků $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ prvního řádku, pak toho, že každý z determinantů (zde 2. stupně) se transponováním (tj. „překlopením“ přes hlavní diagonálu) nemění, a u n_2 toho, že determinant změní znaménko záměnou jeho dvou řádků. Přitom pro počítání příkladů si stačí zapamatovat první složku n_1 vektoru \vec{n} a ostatní složky z ní získáme cyklickou záměnou funkcí].

Při pohledu na obr. 8.4 si představme, že rovinný pohyb bodu U po obrazci M je parametrizací Φ přenášán na pohyb bodu $X = \Phi(U) \in \mathbb{E}_3$ po ploše \mathcal{S} . Např. při pohybu bodu (u_0, v) po přímce $u = u_0 = \text{const.}$, kdy se mění parametr v , opisuje bod $X = \Phi(u_0, v)$ na \mathcal{S} křivku $\mathcal{K}(v)$, jednu z tzv. **parametrických v -křivek** na ploše. Podobně, je-li parametr v pevný a spojitě se mění jen parametr u , dostaneme jednu

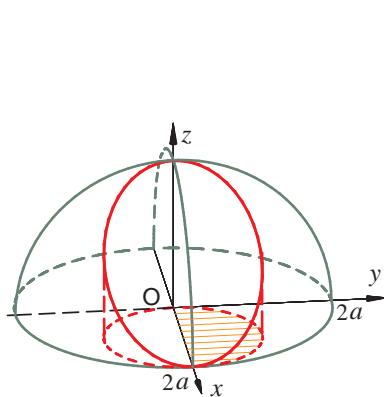
z **parametrických u -křivek** $\mathcal{K}(u)$ na ploše. Sít u -křivek a v -křivek chápeme jako **souřadnicové křivky** na ploše. Dvojice parametrů u, v tvoří tzv. **křivočaré souřadnice bodu na ploše**, neboť poloha bodu X na ploše \mathcal{S} je jimi jednoznačně určena.¹¹⁾ Vyjdeme-li z (naší) pravotočivé sférické soustavy souřadnic v pořadí jejich souřadnic (φ, r, ϑ) , která je dána rovnicemi (6.49) na str. 165, pak na sféře se středem v počátku a poloměrem r je r konstantní, takže sféra je popsána jen dvěma (vnitřními souřadnicemi) parametry (φ, ϑ) . Potom φ -**křivky** jsou „**rovnoběžkové**“ **kružnice** na sféře a ϑ -křivky jsou „**poledníkové**“ **polokružnice** na sféře.

• Někdy se za sférické souřadnice pokládají též **pravotočivé sférické zeměpisné souřadnice** (r, φ, ψ) , definované rovnicemi

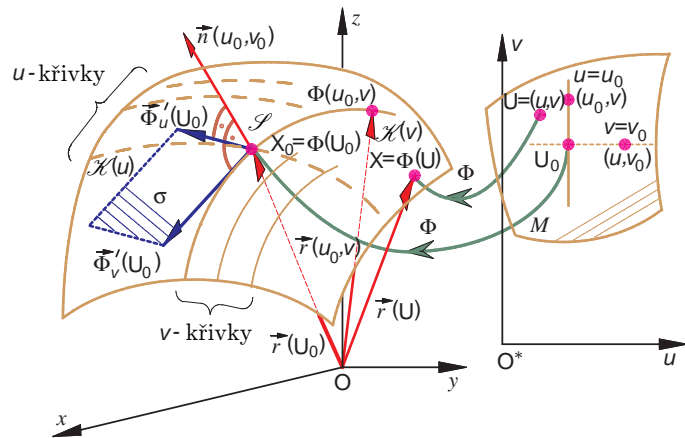
$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi, \quad (8.21)$$

kde úhel („zeměpisná šířka“) $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je měřen od „rovníku“ (tj. od základní roviny σ , viz 6.10.1) a úhel („zeměpisná délka“) $\varphi \in [-\pi, \pi]$ je měřen od „počátečního poledníku“, avšak nejčastěji je opět $\varphi \in [0, 2\pi)$ a má též význam jako v našich sférických souřadnicích. Pro úplnost doplníme, že jacobíán zobrazení, definovaný zmíněnými rovnicemi, je

$$J(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \psi.$$



Obr. 8.3



Obr. 8.4

8.2.2 Definice jednoduché hladké plochy – listu Necht' jsou dány oblast $G \subseteq \mathbb{E}_2$, zobrazení popsané funkcí bodovou $\Phi = \Phi(u, v)$, resp. funkcí vektorovou $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ z G do \mathbb{E}_3 , resp. do $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$, jež je definováno rovnicemi (8.17), dále uzavřená jednoduchá po částech hladká křivka $\mathcal{K} \subset G$ a množina $M = \mathcal{K} \cup \text{int } \mathcal{K}$, tj. M je uzávěr jednoduše souvislé oblasti $\text{int } \mathcal{K}$ (viz 7.5.2) neboli M je **jednoduše souvislý obrazec**. Má-li Φ následující vlastnosti

- 1) Φ je zobrazení spojitě a prostě v M ,
- 2) Φ má spojitě a ohraničené parciální derivace¹²⁾ $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ v $M \setminus K$, kde K je množina nejvýše konečného počtu bodů, ležících na hranici $\mathcal{K} \equiv \partial M$ množiny M ,¹³⁾
- 3)

$$\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v \neq \vec{0} \quad \text{v } M \setminus K \quad (8.22)$$

{ neboli ekvivalentně se vztahem (8.22) – vektory $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ jsou tam **lineárně nezávislé** (tj. **nekolinéární**, tj. jejich úhel není 0 ani π) neboli **Jacobiova matice zobrazení** či **parametrizace** Φ [zde je maticí typu (3,2) a všimněme si, že její sloupce jsou tvořeny souřadnicemi vektoru $\vec{\Phi}'_u$, resp. $\vec{\Phi}'_v$, což je **tečný vektor** jisté souřadnicové u -křivky, resp. v -křivky na ploše v jejím bodě, na obr. 8.4 je to bod $X_0 = \Phi(u_0, v_0)$] označená

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

¹¹⁾Někdy se název u -křivka a v -křivka používá v obráceném významu.

¹²⁾V diferenciální geometrii, resp. v tenzorovém počtu je při některých úvahách nutné požadovat spojitost parciálních derivací až do 3. řádu včetně.

¹³⁾Přitom parciálními derivacemi $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ zobrazení Φ na části hranice $\partial M \setminus K$ (resp. na celé hranici ∂M obrazce M , je-li K prázdná množina) rozumíme parciální derivace $\vec{\Psi}'_u, \vec{\Psi}'_v$ jistého **rozšíření** (zobrazení Φ) $\Psi : G \rightarrow \mathbb{E}_n$ třídy C^1 z obrazce M na oblast G jakožto otevřenou množinu, kde $G \supset M$, tj. obráceně, jehož **zúžení** na $\partial M \setminus K$ je zobrazení Φ (tj. $\Psi|_{\partial M \setminus \mathcal{K}} = \Phi$).

a nazývající se též **derivace zobrazení** Φ na dané množině,¹⁴⁾ tam má **hodnost** rovnu 2 neboli v $M \setminus K$ je **nenulový** aspoň jeden z jejích subdeterminantů 2. řádu

$$n_1 = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad n_2 = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad n_3 = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \quad (8.24)$$

}. Pak **jednoduše souvislá**¹⁵⁾ množina \mathcal{S} , daná oborem hodnot zobrazení Φ na M , tj. $\mathcal{S} = \{\Phi(u, v) =: X \in \mathbb{E}_3 \mid (u, v) \in M\}$, stručně $\mathcal{S} = \Phi(M)$, se nazývá **jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 třídy C^1 na množině $M \setminus K$ definovaná v \mathbb{E}_2 na oboru M** ¹⁶⁾ nebo **jednoduchý hladký list na $M \setminus K$** nebo krátce **list** v \mathbb{E}_3 , definovaný na oboru M (a s výjimkou množiny K nejvýše konečně mnoha bodů jeho hranice všude hladký). Název „*elementární plocha*“ nebudeme používat. Zobrazení $\Phi(u, v)$ uvedených tří vlastností, hladké na $M \setminus K$, se nazývá (**jednoduchá**) **parametrizace listu (plochy) \mathcal{S} na M** , rovnice (8.17) se nazývají **parametrické rovnice plochy \mathcal{S}** , proměnné u, v **parametry z oboru M parametrů** nebo **parametry bodů listu \mathcal{S}** či **vnitřní souřadnice bodů listu \mathcal{S}** .

- Uzavřená křivka (jednoduchá po částech hladká nebo hladká)¹⁷⁾ $\Phi(\partial M)$, která je při parametrizaci Φ obrazem hranice $\partial M = \mathcal{K}$ jednoduše souvislého obrazce M , se nazývá **okraj listu \mathcal{S}** (též *kraj* nebo *kontura listu*) a označuje se $\partial \mathcal{S}$, tj. $\partial \mathcal{S} = \Phi(\partial M)$.

- Množina $\mathcal{S}^\circ = \mathcal{S} \setminus \partial \mathcal{S}$ se nazve (**geometrický**) **vnitřek listu \mathcal{S}** (což, **pozor**, není (*topologický*) *vnitřek množiny* v \mathbb{E}_n (zde $n = 3$), jak jsme jej definovali v 3.3.8 na str 49, ten by byl prázdnou množinou).

- **Regulární bod** listu nazveme ten jeho bod, jenž **bez výjimky** vyhovuje všem třem částem této definice, tj. jak s využitím geometrické názornosti říkáme, v němž a jeho nejbližším okolí existuje **jediný spojitě se měnící normálový vektor** $\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v$ (tj. jediná **tečná rovina**). Každý jiný bod na \mathcal{S} se nazývá **singulární bod**. Singulárním bodem listu \mathcal{S} je tedy každý bod $X = \Phi(u, v)$, kde $(u, v) \in K$, pokud $K \neq \emptyset$. Množina $\Phi(K) \in \partial \mathcal{S}$ je **množina singulárních bodů listu**.

- Zda je bod plochy regulární či singulární, může záviset na zvolené parametrizaci Φ . Mluvíme pak o **nepodstatné singularitě**.

- **Jednoduchý hladký list** se nazývá list, jehož každý bod je regulární (Hladký list nemá singulární body).

- Termíny **okraj listu** a **vnitřek listu** jsou **geometrické pojmy**, podobně jako **jednotkový normálový vektor listu** či **obsah listu**, neboť lze ukázat, že nezávisí na parametrizaci listu.

- **Poznáme, že list má u ploch podobný význam, jaký má oblouk u křivek** List je nejjednodušší dvojrozměrný útvar v \mathbb{E}_3 . Složitější dvojrozměrné útvary získáme jistým přilepováním tzv. přilehlých listů a těmto útvarům budeme říkat součet listů (Viz 8.2.13).

8.2.3 Příklad na kartézskou parametrizaci grafu spojitě diferencovatelné funkce Uvažujme plochu \mathcal{S} jako **kartézský graf** $G(f)$ funkce (tj. při libovolném, avšak pevně zvoleném (obvykle) pravotočivém kartézském systému souřadnic označeném $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nebo $Oxyz$) $f : M \rightarrow \mathbb{E}_3$, jejímž definičním oborem $M \subset \mathbb{E}_2$ je obrazec z definice 8.2.2 a funkce f třídy C^1 na M je zadána rovnicí $z = f(x, y)$. Přesvědčte se, že $G(f)$ je list na M , použijete-li k parametrizaci Φ plochy kartézské souřadnice v pořadí (x, y, z) , tj. obvyklou **kartézskou parametrizaci** $X = \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Vyjádřeme též **jednotkový směrový vektor \vec{n}° normály n** plochy příslušný této parametrizaci a jeho úhel γ s osou z (s její kladnou částí Oz), tj. s jejím směrem \vec{k} (neboli **směrový úhel** $\gamma = \widehat{(\vec{n}^\circ, z)} = \widehat{(\vec{n}^\circ, \vec{k})}$).

Řešení: Víme, že $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\}$. Protože $f \in C^1(M)$, je (podle definice 8.2.2) množina $K = \emptyset$. Čtenáři přenecháme k ověření, že zobrazení Φ je třídy C^1 na M , takže je též spojitě na M . Je-li $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, platí $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$, a tedy zobrazení Φ je prosté, je dokonce bijektivní, neboť jeho hodnotami je celá plocha. Protože (jednoduše souvislý) obrazec M je oblast ohraničená a uzavřená, je M množinou kompaktní, takže inverzní zobrazení Φ^{-1} k Φ je podle **věty o spojitém inverzním zobrazení na kompaktní vzor** (Viz 4.5.6 na str. 72, 2. z vět o spojitých zobrazeních kompaktních) též **spojité** zobrazení. Z tečných vektorů určujících tečnou rovinu plochy v bodě $X = (x, y, z) \in \mathcal{S}$

$$\vec{\Phi}'_x(x, y) = (1, 0, f'_x(x, y)), \quad \vec{\Phi}'_y(x, y) = (0, 1, f'_y(x, y)), \quad (8.25)$$

¹⁴⁾neboť všechny prvky derivace zobrazení musí být třídy C^1 v dané množině

¹⁵⁾Definujeme tzv. **jednoduše souvislý list**, tj. list, jehož parametrizace Φ je definována na **jednoduše souvislém obrazci** M . To vyjadřuje představu, že takový list stejně jako M nemá „díry“. Přitom tzv. „*vícenásobně souvislý*“ list (nepotřebujeme jej) lze vždy rozdělit (rozložit) na jednoduše souvislé listy.

¹⁶⁾Přesněji, protože zde i v aplikacích jde obvykle o ohraničenou podmnožinu jistého plošného útvaru, uvádí se též název **úsek** (nebo *část* nebo *kus*) **jednoduché hladké plochy třídy C^1** .

¹⁷⁾Že okraj $\partial \mathcal{S}$ listu \mathcal{S} při parametrizaci Φ je křivka uvedených vlastností, lze dokázat na základě toho, že spojitým obrazem kompaktní množiny M je kompaktní množina $\mathcal{S} = \Phi(M)$ (Viz věta 4.5.6 na str. 72), a že **každá jednoduchá křivka je orientovatelná**.

máme normálový vektor v bodě X dotyku

$$\vec{n} = \vec{\Phi}'_x(x, y) \times \vec{\Phi}'_y(x, y) = -f'_x(x, y)\vec{i} - f'_y(x, y)\vec{j} + \vec{k} \quad (\neq \vec{0}) \quad (8.26)$$

(jak požaduje definice listu) a jeho délku (normu) ve shodě s (8.12) na str. 193 ve tvaru

$$\|\vec{n}(\Phi(x, y))\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}. \quad (8.27)$$

Odtud plyne, že $\|\vec{n}\| \geq 1$. Potom **jednotkový normálový vektor** \vec{n}° plochy \mathcal{S} , k níž je kolmý, a kterou po zavedení pojmu **orientace plochy** budeme nazývat **plocha \mathcal{S} orientovaná souhlasně s kartézskou parametrizací** Φ , má (polokartézský) tvar

$$\vec{n}^\circ(X) = \frac{\vec{\Phi}'_x \times \vec{\Phi}'_y}{\|\vec{\Phi}'_x \times \vec{\Phi}'_y\|} = \frac{-f'_x(x, y)\vec{i} - f'_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}} \quad \forall (x, y) \in M. \quad (8.28)$$

• Všimněme si, že **z kartézské parametrizace vypočtené normálové vektory** \vec{n} , \vec{n}° mají třetí souřadnici vždy kladnou, a tedy **vždy směřují nahoru**. Této skutečnosti, že skalární součin vektorů \vec{n}° a \vec{k} je kladný, tj.

$$\vec{n}^\circ(X) \cdot \vec{k} = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}} > 0$$

neboli, že (směrový) úhel γ normálového vektoru \vec{n}° a směru \vec{k} osy z je **ostrý úhel** ($0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$), využijeme při geometricky názorném zavedení pojmu orientace grafu funkce v odstavci 8.2.4.

• Samozřejmě, že kartézskou parametrizaci Φ grafu spojitě diferencovatelné funkce na M , dané rovnicí $z = f(x, y)$, můžeme zadat rovnicemi $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, tj. $X = \Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

8.2.4 Orientace listu \mathcal{S}_{xy} jako plochy dané částí grafu $G(f)$ funkce spojitě diferencovatelné na $M \subset \mathbb{E}_2$, kde funkce je na jednoduše souvislém obrazci $M \subseteq D_f$ dána rovnicí $z = f(x, y)$, **je, resp. není** při kartézské parametrizaci $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ o rovnicích $x = x$, $y = y$, $z = f(x, y)$ (Viz příklad 8.2.3) **souhlasná s kartézskou parametrizací** neboli **je, resp. není indukovaná kartézskou parametrizací**, jestliže předem zvolený **normálový vektor** plochy, pomocí něhož je zmíněný list $\mathcal{S}_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\}$ již a priori (jednoznačně – viz zmíněný příklad) orientován, svírá se směrem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ osy z **nulový úhel** nebo **ostrý úhel** γ (tj. $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$), a tedy směřuje „nahoru“, resp. svírá **přímý úhel** nebo **tupý úhel** γ ($\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi$), a tedy směřuje „dolů“. V prvním, resp. ve druhém (opačném) případě též říkáme, že **orientace části (kartézského) grafu \mathcal{S}_{xy} funkce f vzhledem k rovině xy** , určená kartézskou parametrizací $\Phi(x, y)$, **je „horní“, „vnější“, „kladná“, „od roviny xy odvrácená“ strana** či stručně „**líc**“ části onoho grafu funkce, resp. říkáme, že **je to „dolní“, „vnitřní“, „záporná“, „k rovině xy přivrácená“ strana** části grafu či krátce „**rub**“ části uvažovaného grafu funkce.

Podobně je tomu v případě listu \mathcal{S}_{yz} , jenž je částí grafu funkce dané rovnicí $x = g(y, z)$, jehož projekci do yz označíme M (Viz 8.1.5)

$$\mathcal{S}_{yz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (y, z) \in M \wedge x = g(y, z)\} \quad (8.29)$$

nebo

$$\mathcal{S}_{zx} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid (z, x) \in M \wedge y = g(z, x)\}. \quad (8.30)$$

Pomocí věty o implicitní funkci dvou proměnných lze dokázat následující

Tvrzení: Každý list je v jistém okolí každého svého bodu jednou z ploch typu $\mathcal{S}_{xy}, \mathcal{S}_{yz}, \mathcal{S}_{zx}$.

Orientace plochy: je určena, je-li možno jednu stranu plochy (tzv. dvojstranné plochy, o jednostranných plochách viz dále) označit, např. obarvením, za líc a druhou za rub. Např. list papíru je dvojstranná plocha. Jak zmíníme dále, u uzavřených dvojstranných ploch, jakou je např. elipsoid, prohlásíme obvykle za líc tu stranu, která je ve směru vně uzavřené plochy a za rub tu stranu, jež je ve směru dovnitř oné plochy. Ta se pak nazývá kladně, resp. v opačném případě záporně orientovaná uzavřená plocha.

• V dalších úvahách o orientaci ploch bude hrát klíčovou roli normálový vektor plochy. Následující věta shrnuje naše dosavadní znalosti o něm.

8.2.5 Věta o normále plochy Necht T je *regulární bod plochy* \mathcal{S} dané některým tvarem těchto rovnic

- $\Phi = \Phi(u, v)$ nebo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, kde Φ (nebo \vec{r}) je parametrizace listu z definice 8.2.2,
- $F(x, y, z) = 0$,
- $z = f(x, y)$.¹⁸⁾

Pak *normála* n plochy má v bodě T *směrový vektor* \vec{n} neboli *normálový vektor* \vec{n} , jenž má v jednotlivých případech tvar

Ad a) $\vec{n} = \vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$, popř. (viz 8.24) $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$,

Ad b) $\vec{n} = (F'_x(T), F'_y(T), F'_z(T))$,

Ad c) $\vec{n} = (-f'_x(A), -f'_y(A), 1)$, kde $A = (x_0, y_0)$, $T = (x_0, y_0, f(A))$. ★

Důkaz: plyne z toho, že směrový vektor \vec{n} normály n plochy v bodě T je kolmý k tečné rovině plochy v bodě dotyku T (a v případě a) tedy též ke směrovému vektoru \vec{r}'_u , resp. \vec{r}'_v tečny souřadnicové u -křivky, resp. v -křivky).

8.2.6 Úmluva Použijeme-li dále slovo *plocha*, budeme mít na mysli *list* v \mathbb{E}_3 definovaný na $M \subset \mathbb{E}_2$, nebude-li řečeno jinak, a to až do místa, kdy zavedeme pojem „*jednoduchá po částech hladká plocha*“, která pak roli plochy převezme (je totiž jejím zobecněním, důležitým pro aplikace).

8.2.7 Orientace plochy (tj. listu) Uvažujme některou (z nekonečně mnoha) parametrizací Φ listu \mathcal{S} na obrazci $M \subset \mathbb{E}_2$ z definice listu 8.2.2, kde M je jeho obor parametrů u, v , a *na* \mathcal{S} uvažujme *všechny regulární body*, čímž z definice 8.2.2 listu rozumíme právě ty body $X = \Phi(u, v)$, pro něž $(u, v) \in M \setminus K$. Spojité vektorové *pole jednotkových normálových vektorů* \vec{n}° *na listu* \mathcal{S} takové, že pro skoro všechny výše zmíněné body $X \in \mathcal{S}$ je $\vec{n}^\circ(X)$ *jednotkový normálový vektor listu* \mathcal{S} v oněch bodech X (kolmý na \mathcal{S}), se nazývá *orientace listu*. *Orientovaný list* se někdy označuje $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ nebo $\vec{\mathcal{S}}$ a k němu *opačně orientovaný list* pak $-\mathcal{S}$, popř. podrobněji $(\mathcal{S}, -\vec{n}^\circ)$ nebo $-\vec{\mathcal{S}}$.¹⁹⁾ Každý list má *právě dvě orientace*, jež jsou (vzájemně) *opačné*. Zvolíme-li jednu z nich, říkáme, že jsme na \mathcal{S} zvolili *stranu plochy*. Tedy list má dvě strany, je to *plocha dvojstranná*, což u jiných ploch obecně neplatí (Viz dále 8.2.16). Parametrizací $\Phi(u, v)$ určené lineárně nezávislé *tečné vektory* $\vec{\Phi}'_u(u, v)$, $\vec{\Phi}'_v(u, v)$ *plochy* \mathcal{S} (tedy jejich úhel není ani 0 ani π) definují ve výše zmíněných bodech $X \in \mathcal{S}$ *tečnou rovinu*, takže *jednotkové normálové vektory plochy* \mathcal{S} v bodech X jsou vektory definované buď rovností

$$\vec{n}^\circ = \frac{\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)}{\|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\|} \quad \text{nebo} \quad \vec{n}^\circ = -\frac{\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)}{\|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\|} \quad \text{pro všechna } (u, v) \in M \setminus K. \quad (8.31)$$

• Zvolíme-li orientaci \mathcal{S} v jejím bodě X pomocí prvního vektoru, který, považujeme-li to za praktické, též označujeme jako $\vec{\nu}^\circ$, tj. definujeme-li orientaci \vec{n}° podrobněji zropešným vztahem

$$\vec{n}^\circ(X) = \vec{\nu}^\circ \equiv \frac{\vec{\Phi}'_u(\Phi^{-1}(X)) \times \vec{\Phi}'_v(\Phi^{-1}(X))}{\|(\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v)(\Phi^{-1}(X))\|}, \quad X = \Phi(u, v) \in \mathcal{S}, \quad (u, v) \in M \setminus K \quad (8.32)$$

(kde inverzní zobrazení Φ^{-1} k parametrizaci Φ vzhledem její prostotě existuje s výjimkou konečně mnoha bodů $\Phi(M \setminus K) \in \mathcal{S}$), říkáme, že *plocha (list) \mathcal{S} je orientovaná souhlasně s parametrizací Φ* neboli, že *orientace plochy je dána (indukována) parametrizací*, popř. že *parametrizace souhlasí s orientací \vec{n}° plochy* – to v případě, že *orientace plochy \vec{n}° je zadána předem*, tj. „*a priori*“.

• V druhém (opačném) případě, kdy *spojité vektorové pole jednotkových normálových vektorů \vec{n}° na \mathcal{S} volíme druhým ze vztahů*, říkáme, že *plocha \mathcal{S} je orientovaná nesouhlasně s parametrizací*, popř. že *parametrizace nesouhlasí s orientací \vec{n}° plochy*.

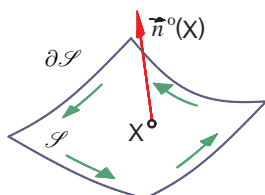
¹⁸⁾Připomeňme, že v prvním případě, tj. u *listu* \mathcal{S} , podle definice 8.2.2 patří regulární bod T z \mathcal{S} do množiny $\{\Phi(M \setminus K)\}$; v druhém případě, tj. u *regulární plochy \mathcal{S} třídy C^1 definované implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$* patří bod $T \in \mathcal{S}$, kde \mathcal{S} je neprázdná množina bodů X z oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_3$ definovaná takto $\mathcal{S} = \{X \in G \mid F(X) \equiv 0 = F(T) \wedge F \in C^1(G) \wedge \nabla F(T) \neq \vec{0}\}$; třetí případ je zahrnut v předešlém, neboť lze položit $z - f(x, y) = F(x, y, z)$.

¹⁹⁾Dodefinování vektorového pole \vec{n}° ve zbývajících, tj. konečně mnoha *singulárních bodech* X listu, tedy pro něž $X = \Phi(u, v)$, kde $(u, v) \in K$, se provede stejně, jak je uvedeno v samém závěru 8.2.14.

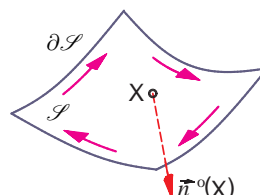
• Je zřejmé, že normálový vektor \vec{n}^o listu míří v jeho různých bodech stále od téže jeho strany. Jinými slovy, dívá-li se pozorovatel vždy proti zmíněnému směru \vec{n}^o (tj. vždy v opačném směru než \vec{n}^o), může vidět stále jen tutéž stranu listu.

• Tedy: **K ORIENTACI plochy \mathcal{S} stačí zadat jednotkový vektor normály jen v JEDINÉM jejím (regulárním) BODĚ X .**

• **Geometrické názornosti**, která se opírá např. o pojem „pravá“ nebo „levá“ ruka či „hlava“ pozorovatele apod., čili o tzv. *personifikovaný model*, je v aplikovaných oborech často využíváno při zavádění významných pojmů (nikoli jejich korektních definicích) souvisejících s orientací ploch a **my budeme názornost v celé kapitole o plošném integrálu upřednostňovat**, neboť matematicky zcela korektní (a méně názorné) definice by byly dost komplikované (a stejně by v praktických situacích neřekly o nic více).



Obr. 8.5



Obr. 8.6

8.2.8 Orientace plochy (tj. listu) \mathcal{S} a jejího okraje $\partial\mathcal{S}$ Řekneme, že plocha \mathcal{S} je *orientovaná souhlasně se svým okrajem $\partial\mathcal{S}$* nebo, že *plocha \mathcal{S} a její okraj $\partial\mathcal{S}$ jsou souhlasně (též koherentně) orientovány*, jestliže pro orientaci křivky $\partial\mathcal{S}$ (určené prsty pravé ruky) a pro normálový vektor \vec{n}^o plochy (demonstrováný vztyčeným palcem pravé ruky v libovolném jejím regulárním bodě X) platí **pravidlo pravé ruky**. Jinými slovy, jestliže při pohybu pozorovatele po okraji $\partial\mathcal{S}$ orientované plochy (\mathcal{S}, \vec{n}^o) , přičemž pozorovatel je na správné straně plochy \mathcal{S} (tedy hlavou vždy ve směru orientujícího pole, tj. normálového vektoru \vec{n}^o), musí mít pozorovatel vnitřek \mathcal{S}^o listu \mathcal{S} při levé ruce – viz obr. 8.5, 8.6, na nichž je souhlasná orientace okraje $\partial\mathcal{S}$ s \mathcal{S} znázorněna šipkami. V druhém – opačném případě mluvíme o *nesouhlasné* orientaci plochy a jejího okraje a taková situace by na obou obrázcích nastala, kdyby oba normálové vektory měly opačný směr. Orientovaný okraj plochy \mathcal{S} se někdy označuje nerozdělitelným symbolem $\vec{\partial}\mathcal{S}$. Lze dokázat následující

Tvrzení: *Zadáme-li orientaci listu \mathcal{S} některou jeho parametrizací $\Phi(u, v)$ a probíhá-li bod $U = (u, v)$ z oboru parametrů M jeho hranici ∂M souhlasně s její kladnou orientací (Viz 7.5.4), pak odpovídající bod listu $X = \Phi(U)$ probíhá (induktivním vlivem parametrizace) okraj $\partial\mathcal{S}$ listu souhlasně s orientací listu (což se jeví geometricky zřejmé při kartézské parametrizaci $\Phi(x, y)$).*

8.2.9 Definice obsahu listu – jeho plošné míry *Obsahem listu* nebo *plošnou mírou listu $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$* o některé z parametrizací bodových $\Phi : M \rightarrow \mathbb{E}_3$, resp. vektorových $\vec{r} : M \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$, $M \subset \mathbb{E}_2$, nazýváme číslo označené $S(\mathcal{S})$ a definované dvojným integrálem pomocí rovnosti (jediné, jen formálně třemi způsoby zapsané, přičemž $\|\vec{n}(\Phi(u, v))\|$ je délka (norma) normálového vektoru \vec{n} plochy \mathcal{S} v libovolném jejím regulárním bodě $X = \Phi(u, v)$)

$$\boxed{S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| \, dudv}, \quad \boxed{S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\| \, dudv}, \quad \boxed{S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{n}(\Phi(u, v))\| \, dudv}. \quad (8.33)$$

8.2.10 Poznámky ke korektnosti definice obsahu plochy Především definice obsahu plochy je korektní. Lze totiž dokázat, že **obsah listu $S(\mathcal{S})$ nezávisí na použité parametrizaci ve dvojném integrálu na pravé straně vzorce, neboť změna parametrizace znamená příslušnou transformaci dvojného integrálu**. Myšlenku odvození vzorce a vlastnost např. **aditivitu** (této plošné) **míry** jsme nastílnili v důkazu věty 8.1.4. K odvození ještě několik poznámek.

- (1) Vnoříme analogicky jako v části c) důkazu věty 8.1.4 obrazec M v kartézském souřadnicovém systému O^*uv tentokrát do libovolného *souřadnicového čtverce* I (tj. jeho strany jsou rovnoběžné s osami u, v), který rozdělíme dostatečně jemnou *čtvercovou δ -síť* (pro konkrétnější numerickou představu např. *k-tého řádu*, tzn. že délka strany čtverce je $\delta = \frac{1}{2^k}$) na konečný počet dílčích čtverců. Z nich berme v úvahu jen ty čtverce I_1, \dots, I_m , které tvoří tzv. **jádro M_k obrazce M** (Viz obr. 8.7), tj.

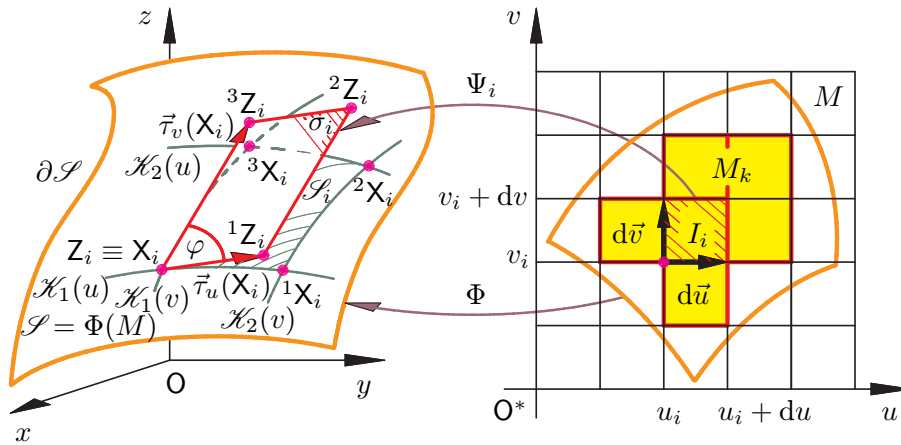
$$\bigcup_{i=1}^m I_i = M_k, \quad M_k \subseteq M \quad (8.34)$$

(tj. z obrazce vynecháme tzv. *okrajové prvky*).

- (2) Z vlastností vektorového součinnu je zřejmé, že pro obsah $S(\sigma_i)$ rovnoběžníka $\sigma_i \subset \mathbb{E}_3$ určeného nekolineárními vektory $\vec{\tau}_u(\mathbf{X}_i), \vec{\tau}_v(\mathbf{X}_i)$, jejichž úhel je φ , platí

$$S(\sigma_i) = \|\vec{\tau}_u(\mathbf{X}_i)\| \cdot \|\vec{\tau}_v(\mathbf{X}_i)\| \cdot \sin \varphi = \|\vec{\tau}_u(\mathbf{X}_i) \times \vec{\tau}_v(\mathbf{X}_i)\|. \quad (8.35)$$

Označme $\mathbf{X}_i = \Phi(u_i, v_i)$, ${}^1\mathbf{X}_i = \Phi(u_i + du, v_i)$, ${}^2\mathbf{X}_i = \Phi(u_i + du, v_i + dv)$, ${}^3\mathbf{X}_i = \Phi(u_i, v_i + dv)$ body na \mathcal{S} .



Obr. 8.7

- (3) **Dělení** $\mathcal{D}(M) = \{I_i\}_{i=1}^m = \{I_1, \dots, I_i, \dots, I_m\}$ obrazce M (přesněji – jeho jádra M_k pomocí **čtvercové sítě** určitého řádu k) vytváří (indukuje) parametrizaci $\Phi(u, v)$ rovněž dělení $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ množiny $\Phi(M_k)$ ležící ve **vnitřku** \mathcal{S}^o listu \mathcal{S} na v podstatě se nepřekrývající **podlisty** $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$, jejichž sjednocením je množina – jádro $\Phi(M_k)$ listu \mathcal{S} , a to pomocí plošné sítě souřadnicových u -křivek $\mathcal{K}_1(u)$ a v -křivek $\mathcal{K}_1(v)$ na zmíněné množině. V každém čtverci $I_i = [u_i, u_i + du] \times [v_i, v_i + dv]$, jehož obrazem na \mathcal{S} je souřadnicový list $\mathcal{S}_i = \Phi(I_i)$ s hranicí tvořenou sousedními souřadnicovými křivkami $\mathcal{K}_1(u), \mathcal{K}_2(u), \mathcal{K}_1(v), \mathcal{K}_2(v)$, provedeme volbu bodu – **reprezentanta** $\mathbf{R}_i \in I_i$. Nechť je to např. vždy jeho levý dolní roh $\mathbf{R}_i \equiv \mathbf{U}_i = (u_i, v_i)$. Tedy $\mathbf{X}_i = \Phi(\mathbf{R}_i) \in \mathcal{S}_i$. Obsah čtverce I_i sítě na M vytvořeného vektory $\vec{du} = (du, 0)$, $\vec{dv} = (0, dv)$, je $P(I_i) = dudv$ ($= \delta^2 = 1/4^k$). **Výběr reprezentantů** $\mathcal{V}(M) = \{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m\}$ na M indukuje **výběr reprezentantů** $\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m\}$ na \mathcal{S} při dělení \mathcal{D} (jádra) obrazce M .
- (4) Označme $d(\mathcal{S}_i)$, popř. diam \mathcal{S}_i **průměr plochy (listu) \mathcal{S}_i** , což je **supremum množiny** $\{\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\}$ euklidovských vzdáleností ϱ libovolných bodů $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{S}_i$,²⁰⁾ tj.

$$d(\mathcal{S}_i) = \sup_{\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{S}_i} \{\varrho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\}.$$

- (5) **Princip myšlenky odvození obsahu $S(\mathcal{S})$ plochy \mathcal{S}** o parametrizaci Φ tkví v tom, že **když vezmeme v některém bodě \mathbf{X} listu \mathcal{S}_i , jenž má dostatečně malý průměr $d(\mathcal{S}_i)$, tečnou rovinu Σ_i a promítneme \mathcal{S}_i do tečné roviny Σ_i** , pak lze předpokládat, že **obsah tohoto průmětu určený jistým zobrazením Ψ_i bude dobře aproximovat obsah listu \mathcal{S}_i** .
- (6) Rovnice tečné roviny Σ_i listu \mathcal{S}_i v bodě $\mathbf{X}_i = \Phi(u_i, v_i)$ obsahující rovnoběžník σ_i na obr. 8.7 je (pro každý její bod \mathbf{Z})

$$\mathbf{Z} = \underbrace{\mathbf{X}_i + \vec{\Phi}'_u(u_i, v_i) \overbrace{(u - u_i)}^{du} + \vec{\Phi}'_v(u_i, v_i) \overbrace{(v - v_i)}^{dv}}_{\Psi_i(u, v)}. \quad (8.36)$$

Pravou stranou rovnice (8.36) je definováno na čtverci $I_i \in M$ **afinní zobrazení**²¹⁾ $\Psi_i : I_i \rightarrow \mathbb{E}_2$, jímž lze pro body čtverce I_i lokálně a lineárně aproximovat hodnoty zobrazení Φ , konkrétněji, **list \mathcal{S}_i lze dobře aproximovat tečným rovnoběžníkem $\sigma_i \in \Sigma_i$** [Dobře aproximovat zde konkrétně znamená mimo využití **linearity** afinního zobrazení též to, že je vždy **spojité**, a je-li afinní zobrazení

²⁰⁾ Číslo $d(\mathcal{S}_i)$ plochy \mathcal{S} je tedy nejmenší číslo, které není menší než vzdálenost dvou libovolných bodů $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{S}_i$.

²¹⁾ Zobrazení euklidovských prostorů (nad tělesem reálných čísel \mathbb{R}) $\Phi : \mathbb{E}_p \rightarrow \mathbb{E}_q$ se nazývá **lineární**, resp. **afinní**, jestliže vždy, resp. za dalšího předpokladu $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$, platí $\Phi(\sum_{i=1}^l \alpha_i \mathbf{U}_i) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \Phi(\mathbf{U}_i)$ pro všechny body $\mathbf{U}_i \in \mathbb{E}_p$.

navíc **prosté** zobrazení \mathbb{E}_n do \mathbb{E}_n , pak jde o (vzájemně) **homeomorfní** zobrazení množin, tj. jejich **homeomorfismus**] dotýkající se \mathcal{S}_i v bodě X_i . Pro vrcholy tečného rovnoběžníka σ_i platí podle obr. 8.7

$$Z_i = \Psi_i(u_i, v_i) = \Phi(u_i, v_i) = X_i, \quad {}^1Z_i = \Psi_i(u_i + du, v_i),$$

${}^2Z_i = \Psi_i(u_i + du, v_i + dv)$, ${}^3Z_i = \Psi_i(u_i, v_i + dv)$. Obsah $S(\mathcal{S}_i)$ je proto podle vzorce (8.35)

$$S(\sigma_i) = \|({}^1Z_i - Z_i) \times ({}^3Z_i - Z_i)\| = \|\vec{\Phi}'_u(u_i, v_i) \times \vec{\Phi}'_v(u_i, v_i)\| P(I_i) \quad (8.37)$$

(kde $P(I_i) = dudv = \delta^2$). Porovnávání $S(\sigma_i)$ s (8.35) dává

$$\vec{\tau}_u(X_i) = \vec{\Phi}'_u(U_i)du, \quad \vec{\tau}_v(X_i) = \vec{\Phi}'_v(U_i)dv.$$

Systém $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ tvoří (Viz obr. 8.8) „**rovnoběžníkový deskový obklad**“ listu \mathcal{S} , v němž tečné rovnoběžníky σ_i jsou bodově „nalepeny“ na podlisty \mathcal{S}_i v bodech X_i . Položme

$$S_k(\mathcal{D}, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^m S(\sigma_i) = \sum_{i=1}^m \|\vec{\Phi}'_u(u_i, v_i) \times \vec{\Phi}'_v(u_i, v_i)\| P(I_i). \quad (8.38)$$

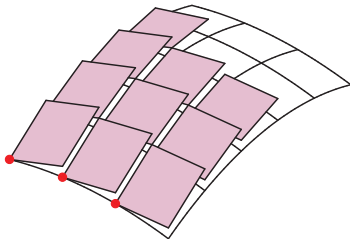
Číslo $S_k(\mathcal{D}, \mathcal{V})$ lze pro dostatečně velké k pokládat za přibližné vyjádření obsahu listu \mathcal{S} a čtenář v něm jistě za obvyklého označení poznává (Riemannův) integrální součet $S(\mathcal{D}, \mathcal{V})$ při zmíněném dělení \mathcal{D} a výběru \mathcal{V} reprezentantů pro dvojný integrál na jádře M_k obrazce M (pokrytého čtvercovou sítí k -tého řádu s délkou δ strany čtverce I_i)

$$\iint_{M_k} \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| dudv.$$

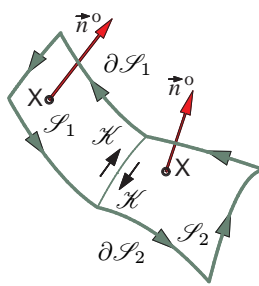
(7) Důkaz závěrečného tvrzení (který vynecháváme), že platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k(\mathcal{D}, \mathcal{V}) = \iint_M \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| dudv, \quad (8.39)$$

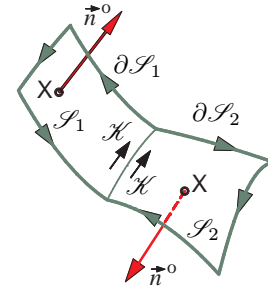
využije toho, že **funkce** $\|\vec{n}(u, v)\| := \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\|$ je **stejněměrně spojitá** na výchozím obrazci M .



Obr. 8.8



Obr. 8.9



Obr. 8.10

8.2.11 Zavedení elementu dS obsahu parametrizované plochy \mathcal{S} při její parametrizaci $\Phi(u, v)$, resp. $\vec{r}(u, v)$, resp. speciálně při kartézské parametrizaci $\Phi(x, y)$ části \mathcal{S} grafu funkce $z(x, y)$, provedeme s přihlédnutím k (8.33) vztahem

$$\boxed{dS = \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| dudv}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{dS = \|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\| dudv}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{dS = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy}, \quad (8.40)$$

přičemž dS se v aplikovaných oborech (Poznamenejme, že místo dS se používá též označení dp , $d\omega$ apod.) nazývá **neorientovaný element plochy** nebo **element (obsahu) parametrizované plochy** nebo (**skalární plošný element plochy** nebo **element obsahu plochy**, a můžeme jej považovat za obsah velmi malého úseku (křivé) plochy, který se přibližně rovná obsahu rovnoběžníka určeného tečnými vektory $\vec{\tau}_u(X_i) = \vec{\Phi}'_u du$, $\vec{\tau}_v(X_i) = \vec{\Phi}'_v dv$ (obr. 8.8) plochy v jejím bodě, tedy obsahu podobné (obdélníkové) „destičky“ jako při důkazu věty 8.1.4 a při výpočtu obsahu hladké plochy dané grafem spojitě diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$ (obr. 8.2).

• Ze speciálního tvaru **Lagrangeovy identity** $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ uvedené v **DP** získáme vztah

$$\|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| = \sqrt{(\vec{\Phi}'_u)^2 (\vec{\Phi}'_v)^2 - (\vec{\Phi}'_u \cdot \vec{\Phi}'_v)^2}.$$

Z něj při označení **Gaussových koeficientů** E, F, G plochy (1. řádu), důležitých v diferenciální geometrii ploch (které příliš nebudeme využívat), a při označení v (8.18) a v (8.19), máme pro ony koeficienty

$$\begin{aligned} E &= (\vec{\Phi}'_u)^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \\ F &= \vec{\Phi}'_u \cdot \vec{\Phi}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v, \\ G &= (\vec{\Phi}'_v)^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \end{aligned} \quad (8.41)$$

a odtud dostaneme pro element parametrizované plochy další vztah

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (8.42)$$

a pro její obsah $S(\mathcal{S})$ (plošnou míru, je-li \mathcal{S} listem) navíc vztah

$$S(\mathcal{S}) = \iint_M \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (8.43)$$

Tvrzení: *Gaussovy koeficienty E, F, G jsou invariantní (nemění se) vzhledem k izometrickému zobrazení.*

8.2.12 Plošná měřitelnost a plošná míra (tj. obsah) množin na listu a ploše Necht' $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$ je list a $\Phi: M \rightarrow \mathbb{E}_3$ jeho parametrizace. **Část \mathcal{P} listu \mathcal{S}** , tj. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ se nazývá **plošně měřitelná množina na listu \mathcal{S}** nebo **podlist** listu, je-li vzor (proobraz)²²⁾ podlistu \mathcal{P} , tj. množina

$$\Phi^{-1}(\mathcal{P}) = \{U \in M \mid \Phi(U) \in \mathcal{P}\}, \quad (8.44)$$

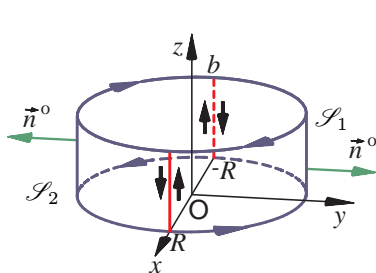
množina **měřitelná**²³⁾ v \mathbb{E}_2 [vzhledem k dvojrozměrné míře, námi označované μ_2 nebo P , tedy obsah $P(\Phi^{-1}(\mathcal{P}))$ této rovinné množiny z M je konečné číslo]. V tomto případě definujeme **plošnou míru** množiny \mathcal{P} neboli **obsah (plošné) množiny na listu** vztahem

$$S(\mathcal{P}) = \iint_{\Phi^{-1}(\mathcal{P})} \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| du dv. \quad (8.45)$$

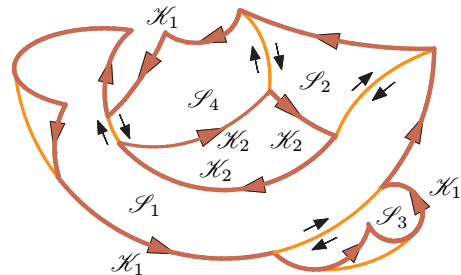
• Poznamenejme ve shodě s očekáváním, že plošná míra **nezávisí** na parametrizaci Φ , je **aditivní, sjednocení** plošně měřitelných množin $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ na listu \mathcal{S} je množina měřitelná na \mathcal{S} , a jsou-li to navíc disjunktní množiny, pak $S(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = S(\mathcal{P}_1) + S(\mathcal{P}_2)$ v důsledku aditivity dvojného integrálu ve vzorci.

• Necht' obecněji je \mathcal{S} tzv. „**vícelistá**“ plocha „**jednoduchá po částech hladká**“ (Podrobněji viz dále 8.2.14). Řekneme, že množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ je **plošně měřitelná na ploše \mathcal{S}** , jestliže pro každý list $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$ je množina $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^*$ plošně měřitelná na listu \mathcal{S}^* , a dále řekneme, že **množina $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ má plošnou míru nula**, jestliže pro každý list $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$ má množina $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^*$ plošnou míru 0, a píšeme $S(\mathcal{M}) = 0$.

Tvrzení: 1. Je-li $S(\mathcal{M}) = 0$ a $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}$, pak $S(\mathcal{M}_1) = 0$. 2. **Křivka** na ploše \mathcal{S} a **sjednocení** konečného počtu křivek na \mathcal{S} **mají plošnou míru 0**.



Obr. 8.11



Obr. 8.12

8.2.13 Jednoduchá po částech hladká plocha dvojlistá jako součet přilehlých listů. Uzavřená plocha Mějme dva listy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, jež jsou orientované, tj. lze je též označit $\vec{\mathcal{S}}_1, \vec{\mathcal{S}}_2$ (Nepotřebujeme-li v tomto odstavci **orientaci**, tak toto slovo nebo pojmy na něm založené zde nebo v navazujícím textu jen **vynecháme**), přičemž jsou orientované souhlasně se svými okraji $\partial\mathcal{S}_1, \partial\mathcal{S}_2$ (Viz obr. 8.9) [Situaci, kdy jsou oba listy $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ orientované nesouhlasně se svými okraji, znázorňujeme jen pro úplnost na obr. 8.10, neboť ji nebudeme v aplikacích potřebovat]. Necht'

²²⁾ Připomeňme, že vzor množiny $N_1 \subseteq N$ při zobrazení $\Phi: M \rightarrow N$, se nazývá množina $\Phi^{-1}(N_1) = \{X \in M \mid \Phi(X) \in N_1\}$, přičemž symbol $\Phi^{-1}(\cdot)$ je nerozdělitelný a má smysl, i když neexistuje inverzní zobrazení Φ^{-1} .

²³⁾ Připomeňme, že **podmnožina měřitelné množiny v \mathbb{E}_2** (např. obdélníka) **nemusi být měřitelná** – viz 6.1.14.

- (1) $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \subseteq \partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2$ a tento průnik je tvořen **jedinou** křivkou (jednoduchou po částech hladkou) \mathcal{K} (na obr. 8.9 je to (neorientovaný) oblouk \mathcal{K}), resp. **konečným** počtem takových křivek, přičemž listy s touto vlastností se nazývají **přilehlé listy** či **přilepené listy podél** zmíněné **křivky** \mathcal{K} , resp. **křivek**, nebo je průnik tvořen konečným počtem **disjunktních** jednoduchých po částech hladkých křivek [např. dvou svislých úseček, jak je tomu u rotační válcové plochy $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge 0 \leq z \leq b\}$, jejímž „okrajem“ (Viz dále) není jediná uzavřená křivka, ale sjednocení dvou disjunktních kružnic, přičemž \mathcal{S} chápeme jako „orientované“ (Viz dále) sjednocení $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ přilehlých orientovaných listů $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ na obr. 8.11],
- (2) **orientace okrajů** $\partial \mathcal{S}_1$ a $\partial \mathcal{S}_2$ přilehlých listů $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ podél jisté křivky \mathcal{K} je ve všech společných bodech těchto okrajů (tj. na $\partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2 = \mathcal{K}$) **opačná**, neboli když je orientovaná křivka $\vec{\mathcal{K}}$ částí orientovaného okraje $\partial \vec{\mathcal{S}}_1$, pak je orientovaná křivka $-\vec{\mathcal{K}}$ částí orientovaného okraje $\partial \vec{\mathcal{S}}_2$ (Viz obr. 8.9).

Potom **orientované sjednocení** $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, tj. sjednocení se zachováním souhlasné orientace na obou listech, které však zapíšeme jako

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \text{ nebo podrobněji } \vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \vec{\mathcal{S}}_2,$$

se nazývá **orientovaná jednoduchá po částech hladká (dvojlistá) plocha** v \mathbb{E}_3 , o níž řekneme, že je to **součet dvou přilehlých orientovaných částí – přilehlých orientovaných listů**. Říkáme též, že (podél křivky \mathcal{K}) **přilehlé orientované listy** $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ jsou **souhlasně orientované** (koorientované).

• **Orientace (dvojlisté a též dále uvedené vícelisté) plochy** \mathcal{S} (jedna ze dvou možných) je definována orientací jejích listů, tj. **ORIENTACE plochy je definována už orientací jejího JEDINÉHO LISTU**. **Okraj** $\partial \mathcal{S}$ **plochy** \mathcal{S} je (Viz obr. 8.9, na němž je okraj vyznačen nejvýrazněji) množina

$$\overline{(\partial \mathcal{S}_1 \cup \partial \mathcal{S}_2) \setminus (\partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2)} \quad (8.46)$$

(kde pruh označuje **uzávěr** množiny pod ním umístěné). Okraj plochy \mathcal{S} může být buď množinou prázdnou – v tom případě se \mathcal{S} nazývá **uzavřená jednoduchá po částech hladká (dvojlistá) plocha**²⁴⁾ – nebo okraj plochy může být uzavřen jednoduchou po částech hladkou křivkou nebo může být tvořen konečně mnoha takovými křivkami (i disjunktními – viz zmíněnou válcovou plochu).

Okraj $\partial \mathcal{S}$ **plochy** \mathcal{S} je tedy její **geometrickou hranicí** nikoli hranicí **topologickou** (definovanou v 3.3.8 na str. 49), tou je v \mathbb{E}_3 sama plocha \mathcal{S} . Připomeňme, že okraj plochy je **pojmem geometrický**.

• Z obr 8.9 je kromě zvýraznění okraje $\partial \mathcal{S}$ součtu ploch $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ též zřejmá popř. **orientace orientovaného okraje** $\partial \vec{\mathcal{S}}$ **orientovaného součtu** $\vec{\mathcal{S}}$ **listů** $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. Rovněž vidíme, že **body** **zmíněné křivky** $\mathcal{K} = \partial \mathcal{S}_1 \cap \partial \mathcal{S}_2$ **nepatří do okraje** $\partial \mathcal{S}$, popř. **orientovaného okraje** $\partial \vec{\mathcal{S}}$ **součtu ploch**, což nastává i u více dvojic přilehlých listů, kdy křivek s vlastnostmi křivky \mathcal{K} je víc.

• Pojem **souhlasné** či **nesouhlasné orientace plochy – listu a jejího okraje** z odstavce 8.2.8 lze zobecnit z dvojlisté plochy na plochu vzniklou zmíněným **přilepováním** listů. Na tom je založen následující pro praxi důležitý pojem

8.2.14 Jednoduchá po částech hladká plocha neboli plocha vícelistá, popř. orientovaná Je zřejmé, že obecně u tzv. „vícelisté“ plochy nemusí být každé dva listy přilehlé. Přihlédneme-li k pojmům z předešlého odstavce, zvláště že každé dva přilehlé orientované listy jsou souhlasně orientované, přičemž definujeme **čtyři pravidla přilepování listů** pro listy z konečného systému m listů

$$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_m\}, \quad (8.47)$$

získáme pro aplikace využitelnou množinu v \mathbb{E}_3 , která se nazývá **jednoduchá po částech hladká plocha** \mathcal{S} neboli **plocha vícelistá** nebo stručně **plocha složená z m listů** $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ ($m \geq 2$), či stručně (ale méně výstižně) **plocha**, jakou je např. (uzavřený) sedmilistý povrch šestibokého jehlanu, tvořený jedním šestiúhelníkem (podstavou) a šesti trojúhelníky (stěnami) nebo jakou je (tzv. „neuzavřená“ – viz dále) čtyřlístá plocha na obr.8.12 apod. Tato čtyři pravidla jsou:

- (1) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m$,
- (2) pro každé $i \neq j$ je $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \subseteq \partial \mathcal{S}_i \cap \partial \mathcal{S}_j$, kde $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j$ je buď křivka (u přilehlých listů) nebo množina jednobodová nebo prázdná,
- (3) pro každé $i \neq j \neq k \neq i$ je $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ buď množina jednobodová nebo prázdná,
- (4) pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ je list \mathcal{S}_i přilehlý (tj. přilepený) k některému listu \mathcal{S}_j , kde $j \in \{1, \dots, i-1\}$.

²⁴⁾ Geometricky takové uzavřené ploše \mathcal{S} např. vyhovuje povrch zeměkoule vzniklý **součtem** (přilepením) přilehlé orientované severní a jižní poloviny $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, kdy normálový vektor směřuje „vně“ nebo „dovnitř“ této uzavřené plochy. Avšak orientaci uzavřených ploch i termíny v uvozovkách probereme dále.

System (8.47) se nazývá **rozklad plochy \mathcal{S} na listy**. Řekneme, že \mathcal{S} je **jednoduchá hladká plocha**, když ke každému bodu $X \in \mathcal{S}$ existuje okolí $\mathcal{O}(X)$ tak, že $\mathcal{O}(X) \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}$ je **jednoduchý hladký list** (tj. na \mathcal{P} existuje spojitě normálové pole \vec{n}° , přičemž jeho nenulovost je již zaručena v definici 8.2.2 listu).

- **Krajní křivka** plochy \mathcal{S} se nazývá křivka, která je částí okraje právě jednoho listu rozkladu plochy \mathcal{S} . Nemá-li plocha \mathcal{S} krajní křivky, nazve se **uzavřená jednoduchá po částech hladká (m -listá) plocha**, krátce **uzavřená plocha**. Není-li \mathcal{S} uzavřená plocha, nazývá se sjednocení všech krajních (popř. navíc i orientovaných křivek, a to opět tak, že každé dva přilehlé listy jsou orientované souhlasně) křivek **okraj plochy \mathcal{S}** (popř. **orientovaný okraj plochy $\partial\mathcal{S}$**). **Uzavřená plocha nemá okraj**, jinými slovy, **okraj uzavřené plochy je prázdná množina \emptyset** . Okraj $\partial\mathcal{S}$ plochy \mathcal{S} je buď uzavřená křivka (jednoduchá po částech hladká) nebo disjunkt ní sjednocení konečného počtu uzavřených křivek (tedy \mathcal{S} už může mít po přilepování „díry“, které námi definovaný list ještě neměl).²⁵⁾ Druhý případ, kdy např. okraj $\partial\mathcal{S}$ plochy \mathcal{S} je disjunkt ní sjednocením $\partial\mathcal{S} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ (uzavřené) **vnější hraniční křivky \mathcal{K}_1** plochy a jedné (uzavřené) **vnitřní hraniční křivky \mathcal{K}_2** plochy (tj. $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$), ohraničující „díru“ v ploše a se silně vyznačeným okrajem $\partial\mathcal{S}$ včetně zvolené orientace, znázorňuje obr. 8.12.

- Podobně jako u křivky, nebude-li uvedeno jinak, **slovem plocha** bez dalšího dodatku **budeme ve shodě s úmluvou 8.2.6 m ínit jednoduchou po částech hladkou plochu**.

- **Singulární body** plochy \mathcal{S} o rozkladu (8.47) jsou podmnožinou množiny

$$\bigcup_{i=1}^m \partial\mathcal{S}_i, \quad (8.48)$$

a u plochy, která není hladká, mohou vytvořit nejen množinu izolovaných bodů (např. „hrot“ jako vrchol pláště kužele), ale **mohou už vytvořit dokonce i křivky** (v nichž se plocha „láme“, podobně jako v bodech hřebenu sedlové střechy). Platí: **množina singulárních bodů na ploše má plošnou míru 0**.

- Je-li \mathcal{M} plošně měřitelná množina na ploše (jednoduché po částech hladké) \mathcal{S} (Viz 8.2.12), a je-li (8.47) rozklad plochy \mathcal{S} , definujeme (a lze ukázat, že jednoznačně) tuto **plošnou míru množiny \mathcal{M} na ploše \mathcal{S}** vzorcem

$$S(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^m S(\mathcal{M} \cap \mathcal{S}_i). \quad (8.49)$$

Odtud speciálně dostáváme

Tvrzení: Je-li \mathcal{S} **plocha** o rozkladu na listy $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$, pak \mathcal{S} je **plošně měřitelná** neboli **má konečný obsah $S(\mathcal{S})$** a ten je dán (tato **plošná míra** je dána) vztahem

$$S(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m S(\mathcal{S}_i). \quad (8.50)$$

- **Hladká plocha nemá singulární body.**

- Necht $\vec{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ je orientovaný list. Orientovaný list $\vec{\mathcal{S}}_1 = (\mathcal{S}_1, \vec{n}^\circ)$ se nazývá **část orientovaného listu** nebo **orientovaný podlist** listu \mathcal{S} , když $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$, přitom orientace (orientující normálové pole jednotkových normálových vektorů) \vec{n}_1° je **zúžením** orientace \vec{n}° , tj. $\vec{n}_1^\circ = \vec{n}^\circ|_{\mathcal{S}_1}$. Řekneme, že orientovaný list \mathcal{S} (podrobněji $\vec{\mathcal{S}}$) je **součet orientovaných (pod)listů** (součet svých orientovaných částí) $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k$ a píšeme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_k \quad \text{nebo podrobněji } \vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{S}}_k, \quad (8.51)$$

je-li $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k\}$ **rozklad listu \mathcal{S}** , a je-li každý orientovaný list \mathcal{S}_i **částí \mathcal{S}** . Zřejmě pak $-\mathcal{S} = (-\mathcal{S}_1) + \dots + (-\mathcal{S}_k)$ nebo podrobněji $-\vec{\mathcal{S}} = (-\vec{\mathcal{S}}_1) + \dots + (-\vec{\mathcal{S}}_k)$, kde dvojice $(\mathcal{S}, -\vec{n}^\circ)$ či list označený $-\mathcal{S}$ či $-\vec{\mathcal{S}}$, se nazývá **opačně orientovaný list** k listu \mathcal{S} (liší se od \mathcal{S} pouze svou orientací neboli má opačnou orientaci).

- Říkáme, že **plocha \mathcal{S} je orientovatelná** a má **orientovaný rozklad** $\{\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k\}$, existují-li orientované listy $\{\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k\}$ tak, že platí

(1) $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k\}$ je rozklad plochy \mathcal{S} ,

(2) každé dva přilehlé listy $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ jsou orientované souhlasně.

- Necht \mathcal{S} je orientovatelná plocha s orientovatelným rozkladem (na listy) $\{\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k\}$, a necht orientace listu $\vec{\mathcal{S}}_i$ je \vec{n}_i° . Definujme vektorové pole $\vec{n}^\circ : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ tak, že položíme

$$\vec{n}^\circ(X) = \vec{n}_i^\circ(X) \quad \text{pro } X \in \mathcal{S}_i \quad (i = 1, \dots, k) \quad (8.52)$$

²⁵⁾ **Mezi plochy nepatří** útvar, jaký vytvoří např. právě v jednom společném vrcholu se dotýkající dva (nebo tři) trojúhelníky, které pro jejich zakřivení ještě nalepíme např. na sféru nebo válcovou plochu. **Proč nepatří?**

a v ostatních bodech, tj. na okrajích $\partial\mathcal{S}_i$ listů \mathcal{S}_i , definujeme \vec{n}° dvěma způsoby: **je-li to možné**, definujeme $\vec{n}^\circ(X)$ tak, aby pole \vec{n}° bylo v bodě X spojité (Viz rozšíření zobrazení Φ), a **není-li to možné**, tj. v *singulárních* bodech X na $\partial\mathcal{S}_i$, kdy se plocha v okolí takového bodu X „láme“ (podobně jako v bodech hřebenu *sedlové střechy* znázorněné v 5.4.14 na str. 102) nebo má v bodě X „hrot“ (jak je tomu v případě vrcholu pláště kužele), pak definujeme $\vec{n}^\circ(X) = \vec{0}$. Pole \vec{n}° se nazývá *orientace plochy \mathcal{S} indukovaná orientovaným rozkladem* $\{\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k\}$ a dvojice $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$, resp. častěji jen $\vec{\mathcal{S}}$, se nazývá *orientovaná plocha*. Dvojice $(\mathcal{S}, -\vec{n}^\circ)$, resp. častěji jen $-\mathcal{S}$ či $-\vec{\mathcal{S}}$ se nazve (podobně jako při zmíněném rozkladu listu na části) *opačně orientovaná plocha* k $\vec{\mathcal{S}}$. To, že orientovaný rozklad $\{\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k\}$ určuje orientaci plochy $\vec{\mathcal{S}}$, vyjádříme stejnými zápisy jako v (8.51).

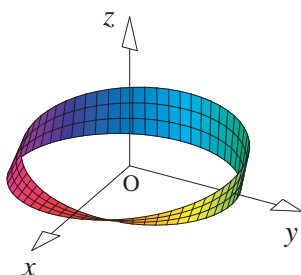
• Lze dokázat, že (podobně jako u křivek) **orientovatelná plocha má právě dvě možné orientace**, říkáme, že je *dvojstranná*. Plochy, jež nejsou orientovatelné, se nazývají *jednostranné plochy*.

8.2.15 Věta o orientovatelnosti uzavřené plochy Uzavřená plocha je orientovatelná. ★

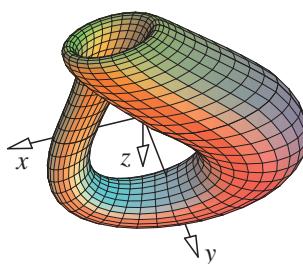
8.2.16 Jednostranné plochy Nyní uvedeme příklad zajímavého plošného útvaru v \mathbb{E}_3 , který nevyhovuje naší definici listu ani plochy, přesto se pro něj název „list“ nebo „plocha“ používá. Jde o útvar, který nazveme *Möbiův pás*, znázorněný na obr. 8.13. Model Möbiova pásu vytvoříme z úzkého obdélníkového papíru ABCD šířky $\|AD\| = \|BC\| = 2a$, délky $\|AB\| = \|CD\| = 2\pi R$ ($0 < a < R$) tím, že slepíme jeho strany AD a BC tak, že ztotožníme bod A s bodem C a bod D s bodem B neboli před slepením zmíněných stran jednu z nich „šroubovitě otočíme“ o 180° kolem podélné osy obdelníka. Tuto „plochu“ lze např. vyjádřit zobrazením (nikoli *jednoduchým*, použitým v 8.2.2)²⁶⁾

$$\vec{r}(u, v) = \vec{i}(R + u \cos \frac{v}{2}) \cos v + \vec{j}(R + u \cos \frac{v}{2}) \sin v + \vec{k}u \sin \frac{v}{2}, \quad (8.53)$$

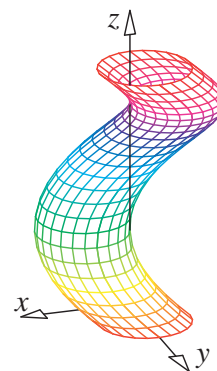
kde $(u, v) \in M = [-a, a] \times [0, 2\pi]$. Je to (hladká) *jednostranná „plocha“*, o čemž se lze přesvědčit tím, že ji celou obarvíme tahem štětce dvojnásobným oběhnutím, tj. $0 \leq v \leq 4\pi$, aniž bychom štětec oddálili od plochy nebo táhli štětec přes její okraj, což nelze jinak u dvojstranných ploch složených z listů. Zároveň to znamená, že *jednostranná plocha není orientovatelná*. Po jednom oběhnutí totiž míří konec štětce opačným směrem (Načrtněte si), jinými slovy, na Möbiově pásu **neexistuje spojitě se měnící pole jednotkových normálových vektorů**. „Okraj“ Möbiova pásu (chápaný zde jen intuitivně) je kupodivu tvořen jedinou hladkou „křivkou“.



Obr. 8.13



Obr. 8.14



Obr. 8.15

8.2.17 Poznámka Příklad Möbiova pásu naznačuje, že u **složitějších „ploch“**, které nejsou součtem listů, a tedy se neopírají o definici listu v 8.2.2, mohou nastat **problémy s orientací**. Na obr. 8.14 je znázorněna „projekce“ tzv. *Kleinovy*²⁷⁾ *láhve* (což je *jednostranná plocha*, tj. nemá vnitřní ani vnější stranu – přesněji je to *neorientovatelná varieta dimenze 2*) ze čtyřrozměrného prostoru, v němž sama sebe neprotíná, do trojrozměrného prostoru, v němž sama sebe protíná.

Nyní jen pro ilustraci uvedeme v inženýrské praxi se vyskytující analogie následujících dvou úseků plošných útvarů. Je to *vinutý sloup* na obr. 8.15 (řadíme jej k cyklickým šroubovým plochám), který je oborem hodnot zobrazení

$$\vec{r}(u, v) = (\sin u + \sin v)\vec{i} + (\cos u + \cos v)\vec{j} + v\vec{k} \quad \text{např. na obdélníku } M = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \quad (8.54)$$

²⁶⁾Möbiův pás též vznikne rotací úsečky U délky $2a$ ležící v rovině xz na ose x se středem $(R, 0, 0)$. Rovina xz se otáčí kolem osy z (v kladném smyslu) a úsečka U ležící stále v rovině xz se přitom otáčí kolem svého středu, přičemž její otáčení je dvakrát pomalejší než otáčení roviny. Proto se při otočení roviny xz o úhel 2π vrátí U do své výchozí polohy, avšak s obrácenými konci. Tak je odvozeno následující zobrazení pásu ve vektorovém tvaru.

²⁷⁾Klein, Felix (1849-1925), německý matematik.

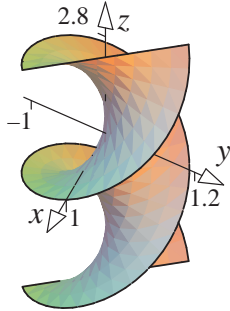
a **kolmý šroubový konoid** nazývaný rovněž **helikoid** (Jeho část je na obr. 8.16. Řadíme jej k přímkovým plochám (zborceným)), jenž připomíná lodní šroub. Vznikne tak, že (tvořící) přímka kolmá k ose, např. z , koná kolem ní šroubový pohyb, jenž může být popsán hodnotami zobrazení

$$\vec{r}(u, v) = \vec{i}u \cos v + \vec{j}u \sin v + \vec{k}bv, \quad u \in (-\infty, +\infty), \quad v \in \left[-\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right] \quad (8.55)$$

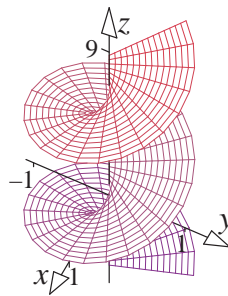
(kde jsme pro pravotočivost volili kladnou konstantu $b = 1$). Vyloučením parametrů u, v z prvních dvou rovnic konoidu $x = u \cos v, y = u \sin v$ máme $\frac{y}{x} = \tan v$, takže explicitní rovnice konoidu má tvar

$$z = b \arctan \frac{y}{x}.^{28)} \quad (8.56)$$

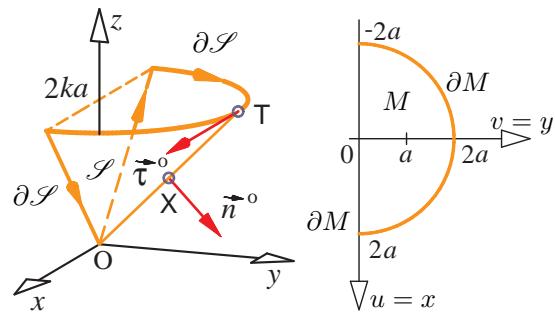
Koná-li zmíněný šroubový pohyb pouze polopřímka, vznikne plocha, jejíž část je znázorněná na obr. 8.17, kterou si pracovně nazvěme „nosná plocha točitého schodiště“ (Volili jsme $0 \leq u \leq 1, -\frac{7}{5}\pi \leq v \leq \frac{14}{5}\pi$).



Obr. 8.16



Obr. 8.17



Obr. 8.18

8.2.18 Příklad Dokažme **a)** že v \mathbb{E}_3 je zobrazením $\Phi(u, v)$ z \mathbb{E}_2 do \mathbb{E}_3 definována pro $(u, v) \in M \subset \mathbb{E}_2$ parametrizace Φ listu $\mathcal{S} = \{X = (x, y, z) = \Phi(u, v) = (u, v, k\sqrt{u^2 + v^2}) \in \mathbb{E}_3 \mid u^2 + v^2 \leq 4a^2 \wedge v \geq 0\}$, kde a, k jsou kladné konstanty, a nechť tato plocha \mathcal{S} je (apriori) orientována nesouhlasně s parametrizací Φ . Najdeme **b)** singulární body Y plochy, existují-li; **c)** jednotkový normálový vektor \vec{n}^o v některém regulárním bodě $X \in \mathcal{S}$; **d)** definujeme orientaci okraje $\partial\mathcal{S}$ plochy \mathcal{S} tak, aby orientace $\partial\mathcal{S}$ i \mathcal{S} byly souhlasné a určíme v některém regulárním bodě T okraje jeho orientující jednotkový tečný vektor $\vec{\tau}^o$.

Řešení: Zobrazení $\Phi: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_3$ je dáno rovnicemi $x = u, y = v, z = k\sqrt{u^2 + v^2}$ nebo přímo v kartézských souřadnicích $x = x, y = y, z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ na obrazci $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \leq 4a^2 \wedge y \geq 0\}$ v (pevně zvolené) kartézské rovině Oxy . Tím se situace stane geometricky přehlednější. Grafem \mathcal{S} (Viz 8.2.4) funkce určené rovnicí $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ v M je na obr. 8.18 v jeho levé části znázorněna polovina pláště rotačního kužele s vrcholem v počátku O , otevřeného ve směru osy z (která je zároveň jeho osou), jenž má výšku $z = k\sqrt{4a^2} = 2ka$. Projekcí \mathcal{S} do kartézské roviny Oxy je vlastně zobrazením Φ zobrazovaný **polokruh** M o poloměru $2a$, ležící v pravé části zmíněného obrázku v 1. a 2. kvadrantu.

Ad a) Nyní dokážeme tři požadavky v definici listu 8.2.2, aby nám Φ definovalo parametrizaci listu \mathcal{S} na oboru M (kartézských) parametrů x, y . Poznamenejme, že hranice ∂M je uzavřená křivka (jednoduchá po částech hladká), jež je sjednocením znázorněné polokružnice a úsečky na ose x . Za oblast G lze vzít celý prostor \mathbb{E}_2 ;

ad 1) Φ je evidentně zobrazení spojitě a prostě nejen na M , ale dokonce v \mathbb{E}_2 ;

ad 2) Φ má spojitě a ohraničené parciální derivace $\vec{\Phi}'_x, \vec{\Phi}'_y$ na $M \setminus K$, kde $K = \{(0, 0)\}$, neboť $\vec{\Phi}'_x(x, y) = (1, 0, \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}})$, $\vec{\Phi}'_y(x, y) = (0, 1, \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}})$ jsou na $M \setminus K$ ohraničené a spojitě vektorové funkce, přičemž bod $(0, 0)$ leží na hraniční křivce ∂M ;

ad 3) na $M \setminus K$ je zadaným zobrazením Φ indukována (s ním souhlasná a pomocí Φ vypočtená) orientace $\vec{\nu}$ plochy \mathcal{S}

$$\vec{\nu} \equiv \vec{\Phi}'_x \times \vec{\Phi}'_y = \left(-\frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \neq \vec{0}$$

(Všimněme si, že $\vec{\nu}$ **směřuje nahoru**, neboť má kladnou třetí souřadnici), tedy Φ je **parametrizace** a \mathcal{S} je jednoduchá hladká plocha na $M \setminus K$, tj. **list** v \mathbb{E}_3 definovaný na M (Přesvědčte se, že délka

²⁸⁾Přitom parametrické *v-křivky* jsou tvořeny souosými šroubovicemi a *u-křivky* jsou průniky konoidu s rovinami $y = x \tan v_0$, přičemž jsou to přímky kolmo protínající osu z .

vektoru \vec{v} je $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+k^2}$. **Okraj plochy (listu)** \mathcal{S} je uzavřená křivka, jejíž hladké části tvoří (Viz zmíněný obrázek) dvě úsečky a polokružnice $\{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 = 4a^2 \wedge z = 2ka \wedge y \geq 0\}$ (Ověřte si).

Ad b) Z předešlé části je zřejmé, že v jediném bodě $(0, 0) \in \partial M$ tvořícím jednoprvkovou množinu K , neexistují jak tečné vektory $\vec{\Phi}'_x, \vec{\Phi}'_y$ tak tedy ani vektor \vec{v} , takže parametrizací Φ je na \mathcal{S} určen tímto bodem jediný **singulární bod** plochy $Y = \Phi(0, 0) = (0, 0, 0) \in \partial \mathcal{S}$.

Ad c) Podle 8.2.7 a zadání úlohy má být **orientace** \vec{n}° listu \mathcal{S} (tj. jednotkový vektor \vec{n}° normály n listu) na množině všech regulárních bodů $\Phi(M \setminus K) \in \mathcal{S}$ nesouhlasná s orientací \vec{v}° indukovanou parametrizací Φ listu \mathcal{S} , tj. je dána vztahem

$$\vec{n}^\circ = -\vec{v}^\circ = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right),$$

odkud je z jeho záporné třetí souřadnice evidentní, že **směřuje dolů**. Orientaci \mathcal{S} stačí určit (popř. i znázornit) v jediném regulárním bodě na \mathcal{S} , např. v bodě $X = \Phi(0, a) = (0, a, ka)$. Po dosazení je $\vec{n}^\circ(X) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(0, k, -1)$.

Ad d) Požadovaná souhlasná orientace orientovaného okraje $\partial \mathcal{S}$ s orientovanou plochou \mathcal{S} je ve shodě s 8.2.8 definována pravidlem pravé ruky a je na zmíněném obrázku vyznačena šipkami. Např. v bodě $T = (0, 2a, 2ka)$ je $\vec{\tau}^\circ(T) = (1, 0, 0)$.

8.2.19 Příklad Určeme obsah (plošnou míru) $S(\mathcal{S})$ plochy \mathcal{S} z předešlého příkladu.

Řešení: Uvedli jsme tam, že $\|\vec{v}\| = \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| = \|\vec{\Phi}'_x \times \vec{\Phi}'_y\| = \sqrt{1+k^2}$, takže $S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| dudv = \sqrt{1+k^2} \iint_M dx dy = \sqrt{1+k^2} P(M) = 2\pi a^2 \sqrt{1+k^2}$.

8.2.20 Tři příklady o polosféře Rozhodněte, která zobrazení Φ jsou parametrizacemi horní polosféry \mathcal{S} o poloměru R se středem v počátku $O = (0, 0, 0)$, tedy situované v prvních čtyřech oktantech. Dále určete vektor \vec{n} normály plochy \mathcal{S} indukovaný (tj. souhlasný se) zobrazením Φ ,²⁹⁾ a též obraz $\Phi(\partial M)$ hranice oboru parametrů M , je-li

- 1) $\Phi(u, v) = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 + u^2 + v^2}, \frac{2R^2 v}{R^2 + u^2 + v^2}, \frac{2R^3}{R^2 + u^2 + v^2} - R \right)$, kde $M = \{(u, v) \in \mathbb{E}_2 \mid u^2 + v^2 \leq R^2\}$,
- 2) $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$,
- 3) $\Phi(\vartheta, \varphi) = (R \cos \varphi \sin \vartheta, R \sin \varphi \sin \vartheta, R \cos \vartheta)$, kde $M = \{(\vartheta, \varphi) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Řešení: Především snadno ověříme ve všech případech, že Φ vyjadřuje \mathcal{S} , neboť platí $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Ad 1) $\Phi(u, v)$ je spojitý v M , tj. $\Phi \in C(M)$, a též prostý v M . Dále je

$$\vec{n} = \vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{2R^2(R^2 - u^2 + v^2)}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-4R^2 uv}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-4R^3 u}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} \\ \frac{-4R^2 uv}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{2R^2(R^2 + u^2 - v^2)}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} & \frac{-4R^3 v}{(R^2 + u^2 + v^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{4R^4}{(R^2 + u^2 + v^2)^4} (2Ru(R^2 + u^2 + v^2), 2Rv(R^2 + u^2 + v^2), R^4 - (u^2 + v^2)^2) \neq \vec{0} \text{ na } M$$

neboli pro všechna $u^2 + v^2 \leq R^2$, tedy Φ je **parametrizace jednoduché hladké plochy – listu** \mathcal{S} . Protože $n_3 = R^4 - (u^2 + v^2)^2 = [R^2 - (u^2 + v^2)] \cdot [R^2 + (u^2 + v^2)] \geq 0$, je úhel všech vektorů \vec{n} a směru \vec{k} osy z nulový či ostrý neboli, jak říkáme, \vec{n} **směřuje nahoru**, popř. je to úhel pravý.

Jelikož $z = \frac{2R^3}{R^2 + u^2 + v^2} - R = R \frac{R^2 - u^2 - v^2}{R^2 + u^2 + v^2}$, dostaneme odtud pro ∂M : $u^2 + v^2 = R^2$, že $z = 0$. Označíme-li $\mathcal{K}_{xy} := \Phi(\partial M) = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 = R^2 \wedge z = 0\}$, je \mathcal{K}_{xy} „rovničková“ kružnice, která je zároveň okrajem $\partial \mathcal{S}$ listu \mathcal{S} definovaného na M . Tedy $\Phi(\partial M) = \partial \mathcal{S} = \mathcal{K}_{xy}$.

Ad 2) Při této kartézské „parametrizaci“ nejsou funkce $\vec{\Phi}'_x = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}})$, $\vec{\Phi}'_y = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}})$ spojitě ani ohraničené pro body hraniční kružnice ∂M : $x^2 + y^2 = R^2$, což je už **nekonečně mnoho** bodů (Množina K , kde smí být porušeny předpoklady z definice listu, může být nejvýše konečná), tedy Φ **není parametrizace**. Snadno zjistíme, že $\vec{n} = \vec{\Phi}'_x \times \vec{\Phi}'_y = (\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, 1) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ má kladnou třetí souřadnici, tj. **směřuje nahoru** pro všechny body $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, s výjimkou těch, co leží na „rovničce“ \mathcal{K}_{xy} , kde \vec{n} není definován. Přitom $\Phi(\partial M) = \mathcal{K}_{xy} = \partial \mathcal{S}$.

²⁹⁾někdy jej značíme \vec{v}

Ad 3) Použijeme-li zobrazení $\Phi(\vartheta, \varphi)$, které **důsledně** vychází z popisu \mathcal{S} v **pravotočivých** (Viz obr. 8.19) **sférických souřadnicích**, tj. daných v pořadí (φ, r, ϑ) nebo (r, ϑ, φ) nebo (ϑ, φ, r) , přičemž připomeňme jejich souvislost s kartézskými souřadnicemi (x, y, z) pomocí rovnic

$$\Phi: \quad x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (8.57)$$

kdy na \mathcal{S} je $r = R$, pak zobrazením $\Phi(\vartheta, \varphi)$ je indukován normálový vektor (tj. vypočtený pomocí Φ)

$$\boxed{\vec{n}} = \vec{\Phi}'_{\vartheta} \times \vec{\Phi}'_{\varphi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \varphi \cos \vartheta & R \sin \varphi \cos \vartheta & -R \sin \vartheta \\ -R \sin \varphi \sin \vartheta & R \cos \varphi \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \boxed{R^2 \sin \vartheta (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)}. \quad (8.58)$$

Pro úplnost uvedme jeho normu

$$\|\vec{n}\| = R^2 \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^4 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^4 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} = \boxed{R^2 \sin \vartheta}. \quad (8.59)$$

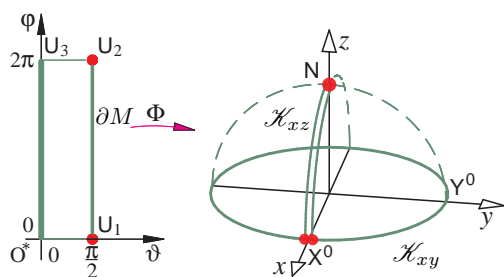
• **Všimněme si**, že dolní svorkou označený skalár je z pravotočivých sférických souřadnic známá hodnota jacobianu zobrazení Φ z (8.57) $\boxed{J_{\Phi} = R^2 \sin \vartheta}$ (pouze je teď $r = R$). Znalost tohoto výrazu usnadní zapamatovat si tvar jak \vec{n} tak $\|\vec{n}\|$.

• Nyní určíme směr \vec{n} . Např. pro bod $U = (\vartheta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ z hranice ∂M zobrazením $\Phi(\vartheta, \varphi)$ zobrazeného obdélníka M , jemuž přísluší na ose y a na \mathcal{S} ležící bod $Y^0 = \Phi(U) = (0, R, 0)$, je podle (8.58) $\vec{n}(Y^0) = R^2(0, 1, 0)$, tedy $\vec{n}(Y^0)$ má směr \vec{j} osy y . Avšak pro bod $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$, jemuž na \mathcal{S} odpovídá bod osy z („severní pól“ celé sféry) $N = (0, 0, R)$, je $\vec{n}(N) = \vec{o}$! Proto N je **singulární bod plochy** (Jde o **nepodstatnou singularitu**. Proč?). Podrobněji, podle (8.58) je $n_3 = R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2}R^2 \sin(2\vartheta) > 0$ na M pro $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, takže s **výjimkou** nekonečného počtu bodů „rovníkové“ kružnice \mathcal{K}_{xy} , na níž je \vec{n} kolmý k ose z , a s výjimkou „severního pólu“ $N(0, 0, R)$, kde je $\vec{n} = \vec{o}$, \vec{n} **směřuje vzhůru**. Protože na hraniční úsečce $\vartheta = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, jež je stranou hranice ∂M obdélníka, tedy už v nekonečně mnoha bodech oboru M je $\vec{n} = \vec{o}$, **není** $\Phi(\vartheta, \varphi)$ **parametrizace** plochy \mathcal{S} .

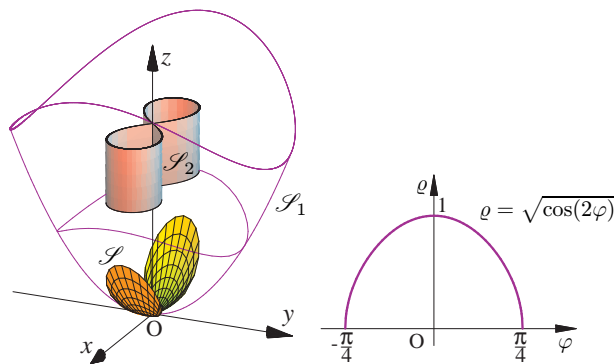
• Nyní k vlastnostem zobrazení $\Phi(\vartheta, \varphi)$. Je spojitě a má ohraničené parciální derivace $\vec{\Phi}'_{\vartheta}, \vec{\Phi}'_{\varphi}$, neboť je dokonce třídy C^{∞} na kompaktu M . Na vnitřku M° obdélníka M je i prosté (injektivní), jak víme z definice sférických souřadnic. Problémy s porušením injektivnosti (podobně jako již s nenulovostí \vec{n}) tušíme na hranici ∂M obdélníka. A skutečně, celá zmíněná hraniční svíslá úsečka $\vartheta = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Viz obr. 8.19) se zobrazí do jediného již zmíněného „pólu“ N (tj. Φ nemůže být parametrizace). Další dvě vodorovné strany obdélníka $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ a $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \varphi = 2\pi$ se zobrazí na tutéž „severní“, na nultém poledníku „východní“ polokoule ležící čtvrtkružnici $\mathcal{K}_{zx} : x^2 + z^2 = R^2, y = 0, x \geq 0, z \geq 0$ s krajními body N a $X^0 := (R, 0, 0)$, čímž je i na těchto stranách porušena injektivnost Φ (Znázornění \mathcal{K}_{zx} dvěma čarami má značit jejich splynutí při zobrazení Φ . Geometrickou terminologií řečeno – čtvrtkružnice \mathcal{K}_{zx} je částí jisté **meridiánové kružnice** sféry). Teprve na zbylé svíslé hraniční úsečce $\vartheta = \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, která se zobrazí na již zmíněnou „rovníkovou“ kružnici \mathcal{K}_{xy} , je Φ „téměř“ všude prosté. Totiž i zde je prostota Φ porušena v jejích krajních bodech $U_1(\frac{\pi}{2}, 0), U_2(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$, jejichž společným obrazem je na \mathcal{S} a ose x ležící, výše zmíněný bod $X^0 = \Phi(U_1) = \Phi(U_2)$, který je průnikem „rovníku“ \mathcal{K}_{xy} a „nultého poledníku“ na „východní polokouli“. Platí $\Phi(\partial M) = \mathcal{K}_{zx} \cup \mathcal{K}_{xy}$. Zde je čtvrtkružnice \mathcal{K}_{zx} „nadbytečná“ do geometrické představy o okraji $\partial \mathcal{S}$ polosféry \mathcal{S} , jímž musí být jen „rovník“ \mathcal{K}_{xy} – vždyť, koneckonců, $\Phi(\vartheta, \varphi)$ ani není parametrizací \mathcal{S} .

• Je zřejmé, že při vyšetřování vlastností zobrazení $\Phi(\vartheta, \varphi)$ celého oboru parametrů M na celou sféru \mathcal{S}_R se setkáme s obdobnými problémy s porušením jeho injektivnosti na hranici ∂M , přičemž si uvědomíme, že okraj celé sféry je množina prázdná. K prázdné množině „nadbytečná“ část „okraje“ $\Phi(\partial M)$ se zvětší o „dolní“ čtvrtkružnici, takže už půjde o celou „nadbytečnou“ poledníkovou (meridiánovou) polokružnici $\mathcal{K}_{zx}^* : x^2 + z^2 = R^2, y = 0, x \geq 0$ „východní polokoule“ sféry \mathcal{S}_R . Severní a jižní pól sféry jsou **singulární body**, neboť **Jacobiova matice** (8.23) J_{Φ} zobrazení Φ má v bodech úsečky $\vartheta = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, resp. úsečky $\vartheta = \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (jejímž obrazem je severní pól N , resp. jižní pól $(0, 0, -R)$) hodnotu rovnu 1. Je to však **nepodstatná singularita**, neboť je **způsobena pouze výběrem parametrizace, nikoli geometrií plochy**. Při jiné parametrizaci by tyto body singulární být nemusely, ale mohly by jimi být jiné dva body sféry.

8.2.21 Důležité poznámky k naší definici parametrizace listu a k některým zvláštnostem sféry
Příklad 8.2.20 ukazuje, že celá **sféra** $\mathcal{S}_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ **se nedá žádným ze tří zobrazení parametrizovat**, ba dokonce už u polosféry zklamalo jak zobrazení $\Phi(x, y)$ vycházející z kartézských souřadnic (x, y) , tak i zobrazení $\Phi(\vartheta, \varphi)$, vycházející ze sférických souřadnic (ϑ, φ) , a to v tom, že nebylo prosté na hranici ∂M oboru parametrů M . U posledního zobrazení navíc neodpovídal obraz $\Phi(\partial M)$ geometrické představě



Obr. 8.19



Obr. 8.20

o okraji $\partial\mathcal{S}$ polosféry \mathcal{S} , i když tato obtíž by šla odstranit vhodnou definicí okraje plochy. Naši k parametrizaci Φ „přísné“, zato však jednoduché definici listu 8.2.2 nevyhoví rovněž celá ohraničená **rotační válcová plocha** $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq b$ (Obr. 8.11) nebo celá ohraničená **rotační kuželová plocha** $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 4a^2$ (tj. doplněná o symetrickou protilehlou polovinu k té, co je na obr. 8.18) a některé další plošné útvary. Přesto výhody užšího pojetí této definice převládají. Např. jsme poznali, že poměrně snadno se daly naší definicí „filtrované“ listy orientovat.

- Pro většinu ploch technické praxe je zmíněná definice dostatečně obecná. Komplikovanější plochy (např. mnohostěny) je často praktičtější vyjádřit jako součet listů (v onom případě mnohoúhelníků), z nichž každý uvedenou definicí vyhoví, a popř. každý z listů parametrizovat zvlášť. Zmíněná **sféra** \mathcal{S}_R i **ohraničená rotační válcová plocha** se dá vyjádřit podle definice 8.2.13 jako **dvojlistá plocha**, z nichž každá je **součtem** vždy dvou symetrických protilehlých polovin – **dvou hladkých listů**.

- K tomu, abychom do naší definice zahrnuli více plošných útvarů, např. zmíněnou sféru, sice existují četné teoretické způsoby zobecnění této definice, vždy je to však za cenu komplikovanější definice i celé teorie ploch. Navíc takové „uvolnění“ **definice listu 8.2.2 v požadavcích na prostotu zobrazení Φ i jeho regularitu**³⁰⁾ ani nebude u **plošného integrálu nutné**, jak vyplývá z následujícího odstavce.

• Předběžně o invariantnosti plošného integrálu vzhledem k neinjektivnosti a neregularitě zobrazení Φ

Při výpočtu plošného integrálu funkce f skalární, resp. \vec{f} vektorové na (vícelisté) jednoduché po částech hladké ploše \mathcal{S} lze použít namísto parametrizace i takové **zobrazení Φ , jehož prostota či regularita je porušena na množině plošné míry 0** (Viz 8.2.12), tj. je porušena na **konečném počtu křivek či bodů** ležících obvykle na hranicích oborů parametrů jednotlivých listů rozkladu $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ plochy \mathcal{S} , která neovlivní existenci ani hodnotu plošného integrálu na dané ploše z uvažovaných oborů parametrů, pokud jsou integrandy f resp. \vec{f} ohraničené funkce na ploše \mathcal{S} . O takovém zobrazení se v literatuře, ne zcela přesně, často hovoří jako o parametrizaci plochy, neboť se s ním při výpočtu nakládá stejně, jako by šlo o skutečnou parametrizaci. Vlastnost invariantnosti (neměnnosti) plošného integrálu vzhledem k porušení injektivnosti takové „parametrizace“ na množině plošné míry nula, kterou jsme právě předběžně uvedli, nazveme **invariantnost plošného integrálu vzhledem k neinjektivnosti a neregularitě zobrazení Φ** na množině plošné míry nula. Tato vlastnost nás příliš nepřekvapuje, neboť už dříve jsme poznamenali, že výpočet plošného integrálu se vždy převádí na výpočet dvojného integrálu.

8.2.22 O jedné důležité vlastnosti sféry a koule

Poznamenejme, že

- sféru nelze izometricky³¹⁾ zobrazit (deformovat) na rovinu;³²⁾
- koule má ze všech těles téhož objemu nejmenší obsah povrchu.³³⁾

8.2.23 Příklad Najdeme obsah $S(\mathcal{S})$ části \mathcal{S} povrchu Evropy, předpokládáme-li, že jde o část sféry o poloměru $R = 6378$ km ohraničené poledníky, kterým přísluší (východní) zeměpisné délky 0° , 15° (tento poledník prochází Libercem a Jindřichovým Hradcem) a rovnoběžkami, jimž odpovídají severní zeměpisné šířky 45° , 60° .

Řešení: Použijeme-li zobrazení vycházející ze sférických souřadnic, je $\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{12}$ a $\|\vec{n}\| =$

³⁰⁾ O regulárním zobrazení viz 6.4.5 na str. 156 – stručně řečeno, jde o požadavky na spojitost parciálních derivací $\vec{\Phi}'_u, \vec{\Phi}'_v$ a nenulovost normálového vektoru $\vec{n} = \vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v$ (neboli požadavku, aby jacobíán zobrazení $J_\Phi \neq 0$) na uvažované množině

³¹⁾ **Izometrické zobrazení** viz poznámku pod čarou na str. 193

³²⁾ Proto nelze sestavit mapu části zemského povrchu, která by zachovávala délky.

³³⁾ Drobné kapičky vodní mlhy, na rozdíl od běžných dešťových kapek, získají přibližně kulový tvar, neboť vlivem sil povrchového napětí této kapaliny, jež výrazně převažují nad vnější gravitační silou, se zde voda, stejně jako každá kapalina, chová tak, jakoby byl její povrch pokryt tenkou pružnou vrstvou, která se snaží stáhnout povrch kapaliny, aby měl co nejmenší plošný obsah.

$R^2 \sin \vartheta$, takže podle (8.33) $S(\mathcal{S}) = \iint_M \|\vec{n}\| d\vartheta d\varphi = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R^2 \sin \vartheta d\vartheta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) = \frac{\pi}{12} R^2 (\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{24} \pi R^2 \approx 1\,692\,437 \text{ km}^2$.

8.2.24 Příklad Vypočítejme obsah úseku \mathcal{S} plochy eliptického paraboloidu $\mathcal{S}_1: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 2z$, vyřezané kolmou válcovou plochou $(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4})^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$.

Řešení: Použijeme-li k popisu \mathcal{S} **zobecněné polární souřadnice** (6.37) ze str. 160 ve vhodném tvaru, $\Phi(\varrho, \varphi): x = 3\varrho \cos \varphi, y = 2\varrho \sin \varphi$, má v nich rovnice **řídící křivky válcové plochy** \mathcal{S}_2 tvar $\varrho = \sqrt{\cos 2\varphi}$. Jacobián zobrazení je $J_\Phi = ab\varrho = 6\varrho$, kde $a = 3, b = 2$. Protože $\cos 2\varphi \geq 0$, je buď $M_1: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varrho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$ nebo $M_2: \frac{3}{4}\pi \leq \varphi \leq \frac{5}{4}\pi, 0 \leq \varrho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$, kde $M = M_1 \cup M_2$ je integrační obor. Projekcí válcové plochy do roviny Oxy je křivka podobná **Bernoulliově lemniskátě**, která má tvar ∞ (Bernoulliova lemniskáta má totiž rovnici $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), a > 0$, resp. $\varrho = \sqrt{2a}\sqrt{\cos 2\varphi}$). Vzhledem k symetrii \mathcal{S} bude výhodné integrovat jen na čtvrtině oboru M , např. $M^*: 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \varrho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}$. Začneme-li výpočet v kartézských souřadnicích, dostáváme $S(\mathcal{S}) = \iint_M \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = 4 \iint_{M^*} \sqrt{1 + \varrho^2} \varrho d\varrho d\varphi = 24 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1 + \varrho^2} \varrho d\varrho = |\text{subst. } 1 + \varrho^2 = t| = 12 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^{1+\cos 2\varphi} \sqrt{t} dt = 8 \int_0^{\pi/4} (2\sqrt{2} \cos^3 \varphi - 1) d\varphi = \frac{2}{3}(20 - 3\pi)$.

• \mathcal{S} je plošný útvar vyplňující osmičku (Viz obr. 8.20) nalepenou na eliptický paraboloid, jejíž střed splývá s jeho vrcholem. Je \mathcal{S} list? Je \mathcal{S} součet dvou listů? Jak byste \mathcal{S} výstižně charakterizovali?

8.2.25 Poznámka k Jordanově větě v \mathbb{E}_3 Stejně jako se Jordanova věta (Čti: *žordanova*) na str. 182 týkala **uzavřených křivek** \mathcal{K} v \mathbb{E}_2 a byla důležitá pro definici **kladné orientace uzavřených křivek**, která se pak využila v **Greenově větě** (o **cirkulaci** vektorového pole \vec{f} po cestě \mathcal{K}), následující Jordanova věta v \mathbb{E}_3 se týká **uzavřených ploch** \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 a je důležitá pro definici **kladné orientace uzavřené plochy** \mathcal{S} neboli pro orientaci \mathcal{S} vektorem \vec{n} **vnější normály** n uzavřené plochy \mathcal{S} , která se pak využije ve **Stokesově větě** (o **toku** vektorového pole \vec{f} plochou \mathcal{S}). Přestože následující věta, která patří k základním větám **topologie** prostoru, tvrdí něco, co je geometricky zřejmé, je její důkaz dost obtížný i obsáhlý.

8.2.26 Věta Jordanova v \mathbb{E}_3 o rozdělení prostoru uzavřenou plochou Nechť \mathcal{S} je uzavřená (jednoduchá po částech hladká³⁴) plocha v \mathbb{E}_3 . Potom \mathcal{S} rozděluje \mathbb{E}_3 na dvě oblasti, tj. existují dvě oblasti $G_1, G_2 \subset \mathbb{E}_3$ takové, že

- každý bod z \mathbb{E}_3 leží právě v jedné z množin G_1, G_2, \mathcal{S} ,
- \mathcal{S} je hranicí jak G_1 , tak G_2 (neboli $\partial G_1 = \partial G_2 = \mathcal{S}$),
- jedna z oblastí G_1, G_2 je **ohraničená** a druhá je neohraničená. ★

8.2.27 Vnitřek a vnějšek uzavřené plochy v \mathbb{E}_3 Je-li \mathcal{S} **uzavřená** plocha a G_1, G_2 oblasti z \mathbb{E}_3 , jejichž existenci zaručuje Jordanova věta, pak ta z oblastí, která je ohraničená, se nazývá **vnitřek plochy** \mathcal{S} a označíme ji $\text{int } \mathcal{S}$. Druhá z oblastí G_1, G_2 , jež je neohraničená, se nazývá **vnějšek plochy** \mathcal{S} a označíme ji $\text{ext } \mathcal{S}$ (Příčemž stejně jako v 7.5.3 nesmíme tyto termíny zaměňovat s pojmy **vnitřek** M^o a **vnějšek** M^e množiny M v \mathbb{E}_n). Jako uzavřenou plochu \mathcal{S} si představme hranici ∂T (uzavřeného) kvádru T . Pak $\text{int } \mathcal{S}$ je vnitřek kvádru T^o a $\text{ext } \mathcal{S}$ je jeho vnějšek $\mathbb{E}_3 \setminus T$.

8.2.28 Kladná a záporná orientace uzavřené plochy v \mathbb{E}_3 , určená vektorem její vnější, resp. vnitřní normály Nechť $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ je rozklad **uzavřené** plochy \mathcal{S} (o níž z 8.2.15 víme, že je vždy orientovatelná) na m listů. Nechť je každý list \mathcal{S}_i orientován **jednotkovým** normálovým polem \vec{n}_i^o tak, aby v každém **regulárním** bodě A jeho **vnitřku** \mathcal{S}^o měla **polonormála** $X = A + t\vec{n}_i^o(A), 0 \leq t < \infty$ **listu** \mathcal{S}_i v libovolně malém okolí $\mathcal{O}(A)$ **společné body** s **vnějškem** $\text{ext } \mathcal{S}$. Pak říkáme, že orientovaná uzavřená plocha

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_m, \text{ podrobněji } \vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{S}}_m, \vec{\mathcal{S}}_i = (\mathcal{S}_i, \vec{n}_i^o), i \in \{1, \dots, m\} \quad (8.60)$$

je **orientovaná vnějším normálovým vektorem** neboli je **orientovaná normálou vně**, též **vnější normálou**, též **směrem ven** neboli **orientovaná kladně**. O ploše $-\mathcal{S}$ či $-\vec{\mathcal{S}}$ orientované opačně (Viz 8.2.14), říkáme, že je **orientovaná vnitřním normálovým vektorem** neboli je **orientovaná normálou dovnitř**, též **vnitřní normálou**, též **směrem dovnitř** neboli **orientovaná záporně**.

8.2.29 Těleso – uzavřená regulární oblast v \mathbb{E}_3 Ohraničená oblast $G \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **regulární oblast**³⁵ je-li její hranice uzavřená plocha nebo disjunktní sjednocení konečného počtu uzavřených ploch

³⁴) Požadavek *hladkosti* plochy lze zeslabit.

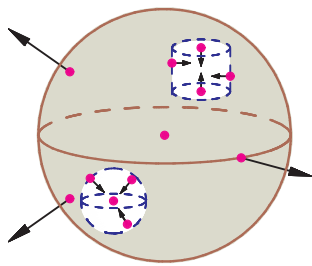
³⁵) srovnej s *elementární množinou* v \mathbb{E}_3 , tj. *elementárním tělesem* = *tělesem* v 6.3.7 na str. 153

(tj. jednoduchých po částech hladkých). Uzávěr $\bar{G} =: V$ nebo $\bar{G} =: T$ se nazývá **uzavřená regulární oblast** V v \mathbb{E}_3 nebo **regulární těleso** nebo jen **těleso** T . Je-li hranice tělesa T , resp. oblasti V označena symbolem ∂T , resp. ∂V pouze jediná plocha \mathcal{S} , pak se T , resp. V nazývá **jednoduše souvislé těleso** T , resp. **jednoduše souvislá (uzavřená) oblast** V v \mathbb{E}_3 . **Kladně orientovanou hranicí** ∂T tělesa T , resp. **oblasti** V v \mathbb{E}_3 se rozumí **vnějším** normálovým vektorem (Viz 8.2.28) orientovaná plocha $\vec{\mathcal{S}}$. Je-li v obecnějším případě hranice tělesa T i oblasti V složena z **vnější** uzavřené plochy \mathcal{S}_1 a z **vnitřních** uzavřených ploch $\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_k$, přičemž každá z vyjmenovaných ploch se nazývá **hraniční plocha** (**vnější**, resp. **vnitřní**) a platí mezi nimi vztahy

$$1) \mathcal{S}_i \subset \text{int } \mathcal{S}_1 \quad (i = 2, \dots, k), \quad 2) \overline{\text{int } \mathcal{S}_i} \cap \overline{\text{int } \mathcal{S}_j} = \emptyset \text{ pro } i \neq j, i \neq 1, j \neq 1, \quad (8.61)$$

pak se T , resp. G nazývá **k -násobně souvislé těleso**, resp. **k -násobně souvislá oblast** nebo **vícenásobně souvislé těleso** T , resp. **vícenásobně souvislá oblast** G . Lze psát

$$T = \overline{\text{int } \mathcal{S}_1} \setminus \bigcup_{i=2}^k \text{int } \mathcal{S}_i. \quad (8.62)$$



Obr. 8.21

V tomto případě se **kladně orientovanou hranicí** $\partial \vec{T}$, resp. $\partial \vec{V}$ **tělesa**, resp. (**uzavřené regulární oblasti**) V neboli **hranicí orientovanou vnějším normálovým vektorem vzhledem k tělesu** T , resp. **oblasti** V rozumí (Lze použít i další formulace z 8.2.28) soubor orientovaných ploch $\vec{\mathcal{S}}_1, \vec{\mathcal{S}}_2, \dots, \vec{\mathcal{S}}_k$, kde vnější hraniční plocha \mathcal{S}_1 je orientovaná **vnějším** normálovým vektorem a vnitřní plochy $\mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_k$ jsou orientované vnitřním normálovým vektorem, tedy **normálový vektor vždy směřuje ven** z tělesa, resp. oblasti V , viz obr. 8.21 (kde je naznačena orientace trojnásobně souvislé koule směrem ven vzhledem k tělesu obsahujícímu dvě „díry“ – „dutiny“; jednu kulovou a jednu válcovou). Píšeme pak, např. v případě tělesa T , resp. oblasti V (nebo i bez šipek, nehrozí-li nedorozumění)

$$\partial \vec{T} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \vec{\mathcal{S}}_2 + \dots + \vec{\mathcal{S}}_k, \quad \partial \vec{V} = \vec{\mathcal{S}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{S}}_k. \quad (8.63)$$

Hranice tělesa T (resp. uzavřené regulární oblasti V), jež je orientovaná opačně než je kladně orientovaná hranice ∂T (resp. ∂V), se označuje $-\partial \vec{T}$ (resp. $-\partial \vec{V}$) nebo často jen $-\partial T$ (resp. $-\partial V$) a nazývá se **záporně orientovaná hranice** tělesa T (resp. uzavřené regulární oblasti V) nebo **hranice orientovaná vnitřním normálovým vektorem** vzhledem k T (resp. V).

8.3 Plošný integrál skalární funkce neboli 1. druhu

8.3.1 Fyzikální motivace pro integrál Plošný integrál je zobecněním integrálu dvojného i křivkového a jeho výpočet lze převést na integrál dvojný. Můžeme tedy při jeho definici i poukazování na jeho vlastnosti využít vlastností Riemannových integrálních součtů.

- Uvažujme hmotnou plochu – skořepinu ve tvaru listu \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 definovaného parametrizací $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ na jednoduše souvislém obrazci M , $M \subset \mathbb{E}_2$, tj. $\Phi: M \rightarrow \mathbb{E}_3$. Ať je na \mathcal{S} zadáno **spojité** skalární pole $f(\mathbf{X}) = f(x, y, z)$, kde $\Phi(u, v) =: \mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ pro každé $(u, v) \in M$ je její libovolný bod, tj. $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E}_1$. (Skalární) funkci f , která je nutně na \mathcal{S} též **ohraničená**, lze interpretovat např. jako **plošnou hustotu hmotnosti** v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ (nebo hustotu elektrického náboje či teplotu v bodech plochy apod.) $h(x, y, z) = f(\mathbf{X}) > 0$ skořepiny \mathcal{S} , přičemž chceme najít celkovou **hmotnost skořepiny** $H(\mathcal{S})$ (celkový elektrický náboj, celkovou teplotu na \mathcal{S} apod.).

- Pak např. hmotnost skořepiny \mathcal{S} [kdy \mathcal{S} při parametrickém vyjádření může reprezentovat podstatně širší třídu dvojrozměrných útvarů v \mathbb{E}_3 , než když v 8.1.8 plocha byla jen úsekem grafu spojitě diferencovatelné funkce $z = f(x, y)$] vyjádříme a vypočítáme **dělením – rozkladem** $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m\}$ skořepiny \mathcal{S} (s vlastnostmi v 8.2.14) na v podstatě nepřekrývající se podlisty, které bude indukováno dělením $\mathcal{D} = \{M_1, \dots, M_m\}$ už celého jednoduše souvislého obrazce M na podobrazce M_1, \dots, M_m (nikoli jen dělením jeho jádra M_k čtvercovou sítí k -tého řádu jako v 8.2.10), neboť už obsahy $S(\mathcal{S}_i)$ podlistů umíme podle 8.2.9 určit. Hmotnost je aditivní funkcí listu, tj. platí

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^m H(\mathcal{S}_i).$$

- Nechť skořepina \mathcal{S} je dána parametrizací $\Phi(u, v)$ o parametrických rovnicích

$$\Phi(u, v): \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

na oboru M ležícím v rovině \mathbf{O}^*uv . Zmíněnému **dělení** \mathcal{D} obrazce M na podobrazce M_i s obsahy $P(M_i)$ přísluší dělení $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} na podlisty \mathcal{S}_i s plošnými obsahy $S(\mathcal{S}_i)$, $i = 1, \dots, m$, pro něž podle

vzorců (8.20), (8.33) platí

$$S(\mathcal{S}_i) = \iint_{M_i} \frac{\|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\|}{\|\vec{n}(\Phi(u,v))\|} dudv = \iint_{M_i} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} dudv. \quad (8.64)$$

Integrand $\|\vec{n}(\Phi(u,v))\|$ představuje *spojitou* funkci (vnitřních) proměnných – parametrů u, v a geometricky reprezentuje *délku normálového vektoru* \vec{n} plochy \mathcal{S} v každém jejím regulárním bodě. Je-li dělení \mathcal{D} už dosti jemné, abychom mohli zmíněný integrand na každém M_i nahradit konstantou, tj. vyjádříme-li předešlý integrál pomocí *střední hodnoty* jeho *integrandu na množině* M_i v jistém jeho bodě U_i (Viz větu 6.2.6 o střední hodnotě integrálního počtu a poznámka za ní následující – část b)), obdržíme při dělení \mathcal{D} pro vhodný *výběr* $\mathcal{V} = \{U_1, \dots, U_m\}$ bodů – reprezentantů $U_i = (u_i, v_i) \in M_i$ vztahy

$$S(\mathcal{S}_i) = \|\vec{n}(\Phi(U_i))\| \cdot P(M_i).$$

Výběrem $\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \{R_1, \dots, R_m\}$ bodů R_i na podlistech \mathcal{S}_i listu \mathcal{S} příslušných bodům $U_i \in M_i$, kdy $R_i = \Phi(U_i)$, máme definovány Riemannovy integrální součty

$$s(f, \mathcal{D}, \mathcal{V}) := \sum_{i=1}^m f(R_i) \cdot S(\mathcal{S}_i) = \sum_{i=1}^m f(\Phi(u_i, v_i)) \cdot \|\vec{n}(\Phi(u_i, v_i))\| P(M_i). \quad (8.65)$$

Nechť $\|\mathcal{D}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{\text{diam}(M_i)\}$ je *norma dělení* \mathcal{D} , kde $\text{diam}(M_i) = \sup_{U^*, U^* \in M_i} \rho(U^*, U^*)$ je *průměr množiny* M_i , tedy supremum množiny (euklidovských) vzdáleností.³⁶⁾ Potom pro $m \rightarrow +\infty$ a číselnou posloupnost $\{\|\mathcal{D}_m\|\}_{m=1}^{\infty}$ norem dělení \mathcal{D}_m konvergujících k nule (tj. pro *normální posloupnost* $\{\mathcal{D}_m\}$ dělení \mathcal{D}_m , pro niž $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}_m\| = 0$, stručněji $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+$) je evidentně jak $P(M_i) \rightarrow 0+$, tak $S(\mathcal{S}_i) \rightarrow 0+$. Tím přejde součet z (8.65) v limitě [podmínky její existence ještě upřesníme, přičemž víme, že *limita integrálních součtů nesmí záviset ani na volbě dělení* \mathcal{S} na \mathcal{S}_i ani na *výběru reprezentantů* – bodů $R_i \in \mathcal{S}_i$] k rovnici

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_M f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|\vec{n}(\Phi(u, v))\| dudv. \quad (8.66)$$

Zavedeme-li *element (diferenciál) dH hmotnosti* $H(\mathcal{S})$ *plochy* – skořepiny o plošné hustotě $h = f(X)$ vztahem

$$dH = f(X) dS,$$

kde dS je v 8.2.11 zavedený *element (obsahu) parametrizované plochy* \mathcal{S} nebo (*skalární*) *plošný element plochy* \mathcal{S} , můžeme pro výše zmíněnou limitu – hmotnost $H(\mathcal{S})$ označenou jako $\iint_{\mathcal{S}} f dS$ psát

$$H(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} f(X) dS = \iint_M f(\Phi(u, v)) \cdot \|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| dudv. \quad (8.67)$$

• O limitě, vyjádřené prvním či druhým integrálem v předešlém vztahu (budeme ji nazývat „*plošný integrál*“), v aplikacích říkáme, že vyjadřuje integraci funkce (zde hustoty) na ploše nebo po ploše \mathcal{S} přes všechny její plošné elementy dS (zde též, že vyjadřuje integraci všech elementů hmotnosti dH na \mathcal{S}).

8.3.2 Plošný integrál skalární funkce (či skalárního pole) na jednoduché hladké ploše – na listu

Nechť \mathcal{S} je list v \mathbb{E}_3 a $\Phi(u, v)$ jeho parametrizace na jednoduše souvislém obrazci M . Nechť funkce $f(X)$ je definovaná a *ohraničená* na ploše \mathcal{S} (tj. pro každý bod $X = \Phi(u, v) \in \mathcal{S}$). Existuje-li Riemannův dvojný integrál $\iint_M f(\Phi(u, v)) \cdot \|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\| dudv$, pak říkáme, že funkce f je *integrovatelná na ploše* \mathcal{S} , přičemž uvedený integrál označujeme $\iint_{\mathcal{S}} f(X) dS$, $\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS$ nebo $\iint_{\mathcal{S}} f$ či jen $\int_{\mathcal{S}}$ apod. (Místo v aplikovaných oborech nejčastějšího označení dS , jež si nyní z mnoha názvů nazvěme (*skalární*) *element neorientované plochy*, se píše též dp , $d\omega$, $d\sigma$ apod.), nazýváme jej *plošný integrál skalární funkce* f nebo plošný integrál **1. druhu**, též *neorientovaný plošný integrál na ploše* \mathcal{S} (orientace plochy se nikde nevyžadovala) a definujeme jej vztahem

$$\iint_{\mathcal{S}} f(X) dS = \iint_M f(\Phi(u, v)) \cdot \|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\| dudv. \quad (8.68)$$

Řekneme-li, že f je integrovatelná funkce na ploše \mathcal{S} , nebo že plošný integrál f na \mathcal{S} existuje, míníme tím totéž.

• Je-li plocha \mathcal{S} reprezentována vektorovou rovnicí $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in M$, pak lze při ztotožnění jejích bodů X s příslušným rádiusvektorem $\vec{r}(u, v)$ psát též

$$\iint_{\mathcal{S}} f(X) dS = \iint_M f(\vec{r}(u, v)) \cdot \|\vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)\| dudv. \quad (8.69)$$

• Zdůraznění integrace funkce f na *uzavřené* ploše \mathcal{S} učiníme zápisem $\iint_{\mathcal{S}} f dS$.

³⁶⁾tj. nejmenší číslo, které není menší než vzdálenost dvou libovolných bodů dané množiny (v obecném případě otevřené)

8.3.3 Důležitá poznámka k plošnému integrálu Ve shodě s poznámkou 8.2.10 ke korektnosti obsahu listu, také **plošný integrál** je **invariantní** (tj. neměnný) **vzhledem k použité parametrizaci** Φ neboli existence ani hodnota $\iint_{\mathcal{S}}$ nezávisí na žádné z nekonečně mnoha možných parametrizací. Dále připomeňme **invariantnost** plošného integrálu **vzhledem k neinjektivnosti a neregularitě zobrazení** Φ na vícelisté po částech hladké ploše \mathcal{S} , na níž lze tedy místo parametrizace použít i zobrazení, jehož prostota či regularita jsou porušeny na množině konečného počtu bodů či křivek (ze str. 211). Odtud je patrné, že **plošný integrál** $\iint_{\mathcal{S}} f dS$ **závisí pouze na f a na listu \mathcal{S} , resp. na listech.**

8.3.4 Věta o plošném integrálu na listu jako grafu funkce Nechť \mathcal{S} je list určený (kartézským) grafem funkce $z = z(x, y)$ pro všechny body $(x, y) \in M$ ³⁷⁾ a $f(x, y, z)$ je funkce spojitá na \mathcal{S} . Pak platí

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) dS = \iint_M f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy} \quad \star \quad (8.70)$$

Důkaz: si čtenář může pomoci kartézské parametrizace provést jako cvičení sám.

8.3.5 Obsah listu plošným integrálem Pro funkci $f(x, y, z) = 1$ na M dává předešlá věta **vzorec pro výpočet obsahu** $S(\mathcal{S})$ **listu \mathcal{S} určeného grafem funkce $z(x, y)$** , která je na jednoduše souvislém obrazci M třídy C^1 s výjimkou nejvýše konečného bodů jeho hranice ∂M , ve tvaru (srovnej s 8.1.4 na str. 192)³⁸⁾

$$\boxed{S(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \iint_M \sqrt{1 + [z'_x(x, y)]^2 + [z'_y(x, y)]^2} dx dy}, \quad (8.71)$$

a obsah listu \mathcal{S} s normálovým vektorem \vec{n} při obecné parametrizaci $\Phi(u, v)$ definované na oboru parametrů M , získáme ze vzorce

$$\boxed{S(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \iint_M \|\vec{n}(\Phi(u, v))\| du dv}, \quad (8.72)$$

umíme-li dosadit za délku (normu) $\|\vec{n}\|$ vektoru \vec{n} , tj. vyjádřit výrazy $\|\vec{\Phi}'_u \times \vec{\Phi}'_v\| du dv$, $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, $\sqrt{EG - F^2}$ apod.

8.3.6 Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše neboli na ploše \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 , která je **součtem listů** (částí) $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ jejího **rozkladu** (dělení) definovaného v 8.2.14 na str. 205. Nechť (skalární) funkce f definovaná a ohraničená na ploše \mathcal{S} je **integrovatelná** na (vícelisté) ploše \mathcal{S} . **Plošný integrál** skalární funkce f na takové ploše \mathcal{S} definujeme vztahem

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f(\mathbf{X}) dS = \sum_{i=1}^m \iint_{\mathcal{S}_i} f(\mathbf{X}) dS} \quad (8.73)$$

(Tzv. **aditivita plošného integrálu** (tj. i **aditivita hmotnosti skořepiny**) **vzhledem k integračnímu oboru**).

8.3.7 Věta (Kritérium existence plošného integrálu skalární funkce) Je-li funkce f **spojitá** na (jednoduché po částech hladké) ploše \mathcal{S} , pak integrál $\iint_{\mathcal{S}} f dS$ existuje. \star

8.3.8 Zobecnění předešlé věty Je-li funkce f spojitá na každém z listů rozkladu plochy \mathcal{S} , pak je integrovatelná na \mathcal{S} . \star

8.4 Vlastnosti a fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce

8.4.1 Věty o vlastnostech plošného integrálu, který označíme $\iint_{\mathcal{S}} f$, jsou ve většině stejné jako věty o vlastnostech dvojného integrálu, neboť jeho definice je na něm založena, a pokud se týká vlastností souvisejících s orientací plochy, pak je zřejmá analogie s integrálem křivkovým. Proto se stručně zmíníme jen o některých vlastnostech a čtenář si může slovní formulace nebo vynechané vlastnosti (např. větu o střední hodnotě plošného integrálu) doplnit s využitím odstavců 6.2.4, 7.3.1. Předpokládá se **integrovatelnost** funkcí f, g, f_1, \dots, f_k na ploše \mathcal{S} a $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Pak platí

³⁷⁾ neboli funkce $z(x, y)$ je na jednoduše souvislém obrazci M funkce třídy C^1 s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů jeho hranice ∂M

³⁸⁾ Pokud zmíněnou výjimkou je navíc **singulární** bod z vnitřku \mathcal{S}° listu \mathcal{S} , lze provést rozklad (dělení) \mathcal{S} na součet podlistů \mathcal{S}_i tak, aby **onen** singulární bod ležel na okraji $\partial \mathcal{S}_i$ některého z nich. Tak např. rotační kuželovou plochu, jež je grafem funkce $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$ definované na kruhu $M: x^2 + y^2 \leq 4a^2$ se singulárním bodem v jejím vrcholu $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$, můžeme jakožto dvojlistu po částech hladkou plochu \mathcal{S} vyjádřit (ve shodě s 8.2.21) součtem dvou symetrických přilehlých listů (polovin) definovaných na polokruzích, viz příklad 8.2.18.

a) *Linearita integrálu*

$$\iint_{\mathcal{S}} (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k) = \alpha_1 \iint_{\mathcal{S}} f_1 + \dots + \alpha_k \iint_{\mathcal{S}} f_k. \star$$

b) *Monotonie integrálu*

$$g \leq f, \text{ resp. } 0 \leq f \text{ na } \mathcal{S} \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} g \leq \iint_{\mathcal{S}} f, \text{ resp. } 0 \leq \iint_{\mathcal{S}} f. \star$$

c) *Invariantnost integrálu vzhledem ke změně hodnot* Je-li funkce f integrovatelná na \mathcal{S} a funkce g je ohraničená na \mathcal{S} , přičemž $g = f$ na \mathcal{S} s výjimkou nejvýše konečného počtu křivek nebo bodů (neboli s výjimkou množiny plošné míry 0), pak je g na \mathcal{S} integrovatelná a platí

$$\iint_{\mathcal{S}} g = \iint_{\mathcal{S}} f. \star$$

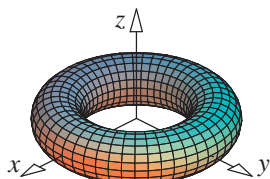
d) *Důsledek změny orientace plochy* Je-li funkce f integrovatelná na \mathcal{S} , pak je též integrovatelná na opačně (nesouhlasně) orientované ploše $-\mathcal{S}$, přičemž

$$\iint_{-\mathcal{S}} f = - \iint_{\mathcal{S}} f. \star$$

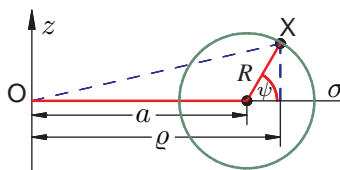
(Tj. existence ani hodnota plošného integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci plochy)

8.4.2 Vybrané fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce pouze zmíníme opět jen pro *mechanický model* hmotné plochy \mathcal{S} v \mathbb{E}_3 , jímž je *skořepina* \mathcal{S} z materiálu, jehož hmota je rozložena s *plošnou hustotou* ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$) danou spojitou funkcí $h(X) = h(x, y, z)$. Skořepinu může představovat povrch střechy sportovní haly, např. Sazka Areny v Praze nebo Zimního stadionu Ludka Čajky ve Zlíně, na jejichž stavbách se podílela firma PSG, a.s. Mechanické charakteristiky skořepiny \mathcal{S} definujeme a počítáme plošným integrálem $\iint_{\mathcal{S}}$ na \mathcal{S} pomocí vzorců, které nebudeme podrobně vypisovat. Od vzorců v 8.1.8 na str. 194, vyjádřených dvojným integrálem \iint_M na M , se totiž liší jen formálně tím, že místo \iint_M píšeme všude $\iint_{\mathcal{S}}$ a místo plochy, určené úsekem grafu funkce $z = f(x, y)$, uvažujeme obecně plochu určenou parametrizací $\Phi(u, v) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in M$. Tedy např. vzorec pro *hmotnost* $H(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} (jak jsme odvodili v (8.67)), resp. její *kinetickou energii* $E_z(\mathcal{S})$, rotuje-li kolem osy Oz konstantní úhlovou rychlostí ω (s^{-1}), má tvar

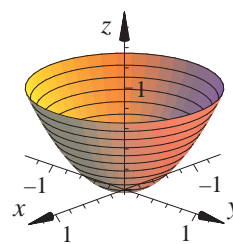
$$\boxed{H(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dH = \iint_{\mathcal{S}} h(x, y, z) dS}, \text{ resp. } \boxed{E_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \omega^2 I_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) dS}. \quad (8.74)$$



Obr. 8.22



Obr. 8.23



Obr. 8.24

8.4.3 Příklad Určeme vzhledem k ose z moment setrvačnosti $I_z(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} , kterou je plynem lehčím než vzduch naplněná (vznášející se) duše pneumatiky, je-li známa hmotnost H samotné duše \mathcal{S} i její geometrické rozměry po naplnění, přičemž nás nezajímá moment setrvačnosti plynu uvnitř duše.

Řešení: Skořepinou \mathcal{S} je *anuloid* neboli *torus* či *prstavec* znázorněný na obr. 8.22. *Fyzikální model* toru \mathcal{S} můžeme realizovat elastickou deformací neroztažitelné rovinné desky (obrazce M) ve tvaru obdélníka tak, že nejprve spojíme jeho horní a dolní stranu, čímž vznikne kruhová válcová trubka, kterou ohýbáme, až spojením kružnic ohraničujících válcový prostor dostaneme prstavec \mathcal{S} . Korektní terminologií (matematické analýzy na varietách) řečeno, **anuloid je kartézským součinem dvou kružnic**. Pomocí obr. 8.23 odvodíme jeho parametrické rovnice definující zobrazení (deformaci) $\Phi : \mathbb{E}_2 \supset M \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$. Vidíme, že anuloid vznikne rotací kružnice o poloměru R , ležící v meridiánové rovině, kolem osy z (měřeno úhlem φ), přičemž vzdálenost středu této kružnice, jež leží v půdorysně σ (tj. v souřadnicové rovině Oxy), od osy z , je rovna $a, a \geq R$. Platí $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = R \sin \psi$, kde ψ je úhel popisující polohu bodu X v *meridiánové*

(=poledníkové) **kružnici**, přičemž $\varrho = a + R \cos \psi$, $M : 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Použijeme-li zobrazení do (pravotočivých) kartézských souřadnic tentokrát ve vektorovém tvaru, platí pro každý bod X anuloidu

$$\begin{aligned} (\Phi(\varphi, \psi) = X \equiv) \quad \vec{r}(\varphi, \psi) &= (a + R \cos \psi) \cos \varphi \vec{i} + (a + R \cos \psi) \sin \varphi \vec{j} + R \sin \psi \vec{k}, \\ (\varphi, \psi) \in M &= [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{\varphi} &= -(a + R \cos \psi) \sin \varphi \vec{i} + (a + R \cos \psi) \cos \varphi \vec{j} + 0 \vec{k}, \\ \vec{r}'_{\psi} &= -R \sin \psi \cos \varphi \vec{i} - R \sin \psi \sin \varphi \vec{j} + R \cos \psi \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\vec{n}(\vec{r}(\varphi, \psi)) = \vec{r}'_{\varphi} \times \vec{r}'_{\psi} = \dots = R(a + R \cos \psi)(\cos \varphi \cos \psi \vec{i} + \sin \varphi \cos \psi \vec{j} + \sin \psi \vec{k}), \quad (8.76)$$

$$\|\vec{n}\| = R(a + R \cos \psi) > 0, \quad dS = \|\vec{n}\| d\varphi d\psi = R(a + R \cos \psi) d\varphi d\psi. \quad (8.77)$$

Pro zajímavost je $\vec{n}(A(0, 0)) = R(a + R)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, tj. **zobrazení (8.75) indukuje orientaci anuloidu vnějším normálovým vektorem**. Potřebný obsah $S(\mathcal{S})$ pro plošnou hustotu $h = H/S(\mathcal{S})$ lze sice najít plošným integrálem, my však využijeme první z Guldinových vět (pravidel)³⁹⁾, které někdy bývají součástí kurzu integrálního počtu funkce jedné proměnné (Viz poznámky pod čarou^{40) 41)}), podle níž $S(\mathcal{S}) = 2\pi R \cdot 2\pi a = 4\pi^2 Ra$. Pak podle (8.74) platí

$$\begin{aligned} I_z(\mathcal{S}) &= \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) h(x, y, z) dS = |x^2 + y^2 = \varrho^2, \varrho = a + R \cos \psi| = h \iint_M R(a + R \cos \psi)^3 d\varphi d\psi = \\ &= hR \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (a + R \cos \psi)^3 d\psi = \\ &= hR \int_0^{2\pi} [a^3 \psi + 3a^2 R \sin \psi + 3aR^2 \frac{1}{2}(\psi + \frac{1}{2} \sin 2\psi) + R^3 (\sin \psi - \frac{1}{3} \sin^3 \psi)]_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= hR(2\pi a^3 + 3\pi a R^2) \cdot 2\pi = H(a^2 + \frac{3}{2} R^2). \end{aligned}$$

• Poznamenejme, že zobrazení $\vec{r}(\varphi, \psi)$ je třídy C^∞ v \mathbb{E}_2 , je **regulární** na M , ale je **prosté jen na M°** , tj. na **vnitřku** čtverce M . Anuloid \mathcal{S} tedy **není list**, ale lze jej vytvořit jako **součet čtyř listů** $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_4$, rozdělíme-li M na odpovídající čtyři čtverce

$$\begin{aligned} M_1 &= [0, \pi] \times [0, \pi], & M_2 &= [\pi, 2\pi] \times [0, \pi], \\ M_3 &= [0, \pi] \times [\pi, 2\pi], & M_4 &= [\pi, 2\pi] \times [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Teprve pak je $\mathcal{S}_i = \Phi(M_i)$, $i = 1, \dots, 4$. Tyto listy **vzniknou rozříznutím anuloidu rovinou $z = 0$ a $x = 0$** .

• Neparаметrická rovnice anuloidu, jenž rovněž vznikne rotací kružnice $x = 0$, $(y - a)^2 + z^2 = R^2$ ($0 < R \leq a$) kolem osy z , je

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = R^2 \text{ nebo po úpravě } (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \quad (8.78)$$

• Magnetické prstence několikakilometrových délek se používají v iontových urychlovačích.

8.4.4 Příklad Najdeme hmotnost $H(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} o plošné hustotě $h = \lambda \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ (λ je v měřicí jednotce $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$), která je částí **rotačního paraboloidu** $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, $a > 0$, a je ohraničená rovinou $z = 2a$ (Pro $a = \frac{1}{2}$ je \mathcal{S} na obr. 8.24).

Řešení: $H(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dH = \iint_{\mathcal{S}} h(x, y, z) dS = \lambda \iint_M h(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x(x, y) + z'_y(x, y)} dx dy$. Určíme projekci \mathcal{S} do roviny xy , tj. kruh M z rovnosti $\frac{1}{2a}(x^2 + y^2) = 2a \Rightarrow x^2 + y^2 = 4a^2$. Platí $z'_x = \frac{x}{a}$, $z'_y = \frac{y}{a}$. Plocha \mathcal{S} je grafem funkce a plošný element dS plochy \mathcal{S} má hmotnost

$$dH = h dS = \lambda \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{\lambda}{a} (a^2 + x^2 + y^2) dx dy.$$

Tedy

$$H(\mathcal{S}) = \frac{\lambda}{a} \iint_{M^*} (a^2 + \varrho^2) \varrho d\varrho d\varphi = \frac{\lambda}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2a} (a^2 \varrho + \varrho^3) d\varrho = \frac{2\pi\lambda}{a} [\frac{a^2}{2} \varrho^2 + \frac{1}{4} \varrho^4]_0^{2a} = 12\pi\lambda a^3 \text{ (kg)}.$$

³⁹⁾Guldin, Paul Habakkuk (1577-1643), švýcarský astronom a matematik. Obě věty však už znal řecký matematik Pappos z Alexandrie (kolem r. 320 n.l.).

⁴⁰⁾**1. Guldinova věta** *Obsah S rotační plochy vytvořené při rotaci rovinné křivky kolem osy, která leží v téže rovině a křivku neprotíná, se rovná součinu délky této křivky a délky kružnice opsané při rotaci těžištěm oné křivky.* ★

⁴¹⁾**2. Guldinova věta** *Objem V rotačního tělesa vytvořeného při rotaci rovinného obrazce kolem osy, která leží v rovině obrazce a nejde jeho vnitřkem, se rovná součinu obsahu tohoto obrazce a délky kružnice opsané při rotaci těžištěm onoho obrazce.* ★

8.4.5 Příklad Určeme hmotnost skořepiny $H(\mathcal{S})$, která je částí **kolmého šroubového konoidu – helikoidu** (Viz obr. 8.16), jenž podle 8.2.17 je sice grafem funkce $f(x, y)$, vyjděme však rovnou z parametrizace v polárních souřadnicích $\Phi(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varphi)$ definované na obrazci $M : 0 \leq \varrho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, je-li jeho plošná hustota $h(x, y, z)$ přímo úměrná z -ové souřadnici.

Řešení: Plocha \mathcal{S} , jež může být zhruba charakterizována jako jisté sjednocení částí kruhových šroubovic s poloměry od 0 do R , má plošnou hustotu $h(\mathbf{X}) = \lambda z$. Dále pro tečné vektory (souřadnicových křivek) máme

$$\vec{\Phi}'_{\varrho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \vec{\Phi}'_{\varphi} = (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 1),$$

přičemž jsou to vektory kolmé, neboť $\vec{\Phi}'_{\varrho} \cdot \vec{\Phi}'_{\varphi} = 0$, a jejich délky jsou $\|\vec{\Phi}'_{\varrho}\| = 1, \|\vec{\Phi}'_{\varphi}\| = \sqrt{\varrho^2 + 1}$, takže s využitím kolmosti máme hned $\|\vec{n}\| = \|\vec{\Phi}'_{\varrho} \times \vec{\Phi}'_{\varphi}\| = \sqrt{\varrho^2 + 1}$. Pak

$$\begin{aligned} H(\mathcal{S}) &= \iint_{\mathcal{S}} h(x, y, z) dS = \iint_M \lambda \varphi \sqrt{\varrho^2 + 1} d\varphi d\varrho = \lambda \int_0^{2\pi} \varphi d\varphi \int_0^R \sqrt{\varrho^2 + 1} d\varrho = \\ &= 2\pi^2 \lambda \frac{1}{2} [\varrho \sqrt{\varrho^2 + 1} + \ln(\varrho + \sqrt{\varrho^2 + 1})]_0^R = \pi^2 \lambda [R \sqrt{R^2 + 1} + \ln(R + \sqrt{R^2 + 1})]. \end{aligned}$$

8.4.6 Příklad Určeme potenciál U gravitačního pole \vec{F} v bodě (x_0, y_0, z_0) , které je dáno homogenním rozložením hmoty na sféře \mathcal{S} o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0$, tj. s plošnou hustotou $h(x, y, z) = h = \text{const.}$, jemuž se říká **gravitační potenciál jednoduché vrstvy** \mathcal{S} s plošnou hustotou $h(x, y, z)$ v bodě (x_0, y_0, z_0) , a jenž je definován plošným integrálem (někdy se píše se záporným znaménkem)

$$U(x, y, z) = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\varkappa \cdot h(x, y, z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} dS. \quad (8.79)$$

Řešení: Omezíme-li se vzhledem k symetrii \mathcal{S} na případ $x_0 = y_0 = 0, z_0 > 0$, tedy kdy v novém systému souřadnic prochází kladná část osy z daným bodem, je potenciál ve tvaru

$$U = \varkappa h \cdot \iint_{\mathcal{S}} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}}.$$

K jeho výpočtu použijeme sférické souřadnice (ϑ, φ) z příkladu 8.2.20, konkrétně $\|\vec{n}(\Phi(\vartheta, \varphi))\| = R^2 \sin \vartheta$ (a dále ještě substituci $\cos \vartheta = t$). Pak

$$\begin{aligned} U &= \varkappa h \iint_{\mathcal{S}} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2z_0 \cdot z + z_0^2}} = \varkappa h \iint_{\mathcal{S}} \frac{dS}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 \cdot z}} = \varkappa h \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^2 \sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 \cdot R \cos \vartheta}} = \\ &= 2\pi \varkappa h R^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 R \cdot \cos \vartheta}} = 2\pi \varkappa h R^2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 R \cdot t}} = \\ &= 2\pi \varkappa h R^2 \frac{(-1)}{z_0 R} [\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 R \cdot t}]_{t=-1}^{t=1} = \frac{2\pi \varkappa h R}{z_0} (\sqrt{R^2 + z_0^2 + 2Rz_0} - \sqrt{R^2 + z_0^2 - 2Rz_0}) = \\ &= 2\pi \frac{\varkappa h R}{z_0} (|R + z_0| - |R - z_0|). \end{aligned}$$

Tedy

$$U = \begin{cases} 4\pi \varkappa h R, & z_0 \leq R \\ 4\pi \varkappa h \frac{R^2}{z_0}, & z_0 \geq R. \end{cases}$$

Odtud je hned zřejmé, označíme-li **radiusvektor** bodu \mathbf{X} vektorem \vec{x} , přičemž jeho délka je $\|\vec{x}\|$, a definujeme-li konstantu $\lambda := 4\pi \varkappa h$, že

$$U(\|\vec{x}\|) = \begin{cases} \lambda R, & \|\vec{x}\| \in (0, R] \\ \lambda \frac{R^2}{\|\vec{x}\|}, & \|\vec{x}\| \in (R, +\infty). \end{cases}$$

(Načrtněte si graf funkce $U(\|\vec{x}\|)$.)

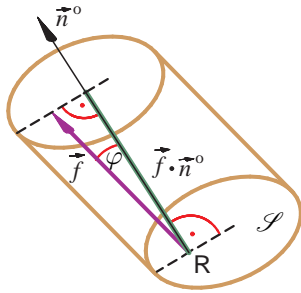
8.5 Plošný integrál vektorové funkce neboli 2. druhu

8.5.1 Úvod Plošný integrál vektorové funkce (vektorového pole) \vec{f} na orientované ploše $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$, podobně jako krivkový integrál vektorové funkce, je jen **speciálním plošným integrálem** jisté rovněž **skalární funkce** ($\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ$). Motivující impuls pro jeho korektní definici vzešel z mnoha důležitých úloh praxe, které bylo nutné řešit v aplikovaných oborech pomocí výsledků z teorie pole a teorie proudění. Nejdříve se jednalo zejména o úlohy z hydrodynamiky a elektromagnetického pole.

8.5.2 Fyzikální motivace pro integrál Uvažujme *spojité vektorové pole* (G, \vec{f}) , tj. oblast $G \subset \mathbb{E}_3$, kde vektorovou funkcí $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ ať je pro jednoduchost *stacionární* (tj. na čase nezávislé) *vektorové pole rychlostí* neboli *rychlostní pole* proudění nestlačitelné kapaliny, pro určitost např. taveniny polymeru ve vstřikovacím zařízení G . Vektor \vec{f} je tedy jen funkce polohy, přičemž $\vec{f}(X)$ označuje též vektor rychlosti v bodě $X \in G$.

• Ptáme se, jak popsat a vypočítat „tok“ \mathcal{T} (poprvé zmíněný v 7.4.6; anglicky *flux = tok*) kapaliny, čímž budeme rozumět „objem“ kapaliny [lze však uvažovat i stlačitelnou tekutinu (např. *plyn*), dále intenzitu *elektrostatického* pole, pole *elektrické* či *magnetické indukce* atd.], který za jednotku času proteče úsekem plochy – listem \mathcal{S} zvoleným směrem. Pro celkovou bilanci objemu kapaliny potřebujeme rozlišit, zda daným místem plochy \mathcal{S} kapalina „přitéká“ či „odtéká“, a je proto jasné, že takové objemy musíme odlišit znaménky.

- Je-li nejprve \vec{f} *konstantní pole* a orientovaný list $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ je (Viz obr. 8.25) rovinný, tj. $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_2$, pak kapalina vyplní v obecném případě *kosý válec* s podstavou \mathcal{S} o obsahu $S(\mathcal{S})$ a „výšce“ (opatřené znaménkem) $\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ$, která, korektně řečeno, je *pravoúhlým průmětem vektoru \vec{f} do vektoru – do směru \vec{n}°* (*Pravoúhlý průmět vektoru do vektoru* byl definován již v DP). To znamená, že je-li skalární součin $\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ < 0$, pak kapalina protéká opačným směrem než tím, kterým byla určena strana plochy. Platí $\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ = \|\vec{f}\| \cos \varphi$, kde $\varphi = (\vec{f}, \vec{n}^\circ)$, tj. φ je úhel vektorů \vec{f}, \vec{n}° . Vyjádříme-li ještě \vec{n}° pomocí směrových kosinů známých z DP, tj. $\vec{n}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, potom množství kapaliny jež proteče orientovaným listem $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ za jednu sekundu, je dáno vztahy



Obr. 8.25

$$\mathcal{T} = (\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ)S(\mathcal{S}) = (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)S(\mathcal{S}) = \|\vec{f}\|S(\mathcal{S}) \cos \varphi. \quad (8.80)$$

Je-li obecněji $\vec{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ libovolný orientovaný list, tj. $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$ a $\vec{f}(X)$ je spojité vektorové pole definované na \mathcal{S} , pak při dostatečně jemném *dělení – rozkladu* \mathcal{D} na m menších podlistů $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$ takových, že [Viz (8.51) na str. 206] s *normou dělení* $\|\mathcal{D}\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{\text{diam } \mathcal{S}_i\}$, kde $\text{diam } \mathcal{S}_i$ je (Viz 8.2.10)

průměr plochy \mathcal{S}_i , můžeme každý podlist \mathcal{S}_i ($i = 1, \dots, m$) již opět považovat (téměř) za rovinný list, dále orientaci \vec{n}° na každém *orientovaném podlistu* \mathcal{S}_i za konstantní vektor, a také pole \vec{f} lze na každém \mathcal{S}_i pokládat za konstantní, tedy můžeme \vec{f} *aproximovat* (přibližně nahradit) polem $\vec{f}_i = \vec{f}(R_i)$ v kterémkoli bodě – *reprezentantovi* R_i vnitřku listu \mathcal{S}_i , tj. v $R_i \in \mathcal{S}_i^\circ$ ($i = 1, \dots, m$) patřícím do *výběru* reprezentantů $\mathcal{V} = \{R_1, \dots, R_m\}$.

• Protože podle (8.80) je množství kapaliny, jež proteče za jednotku času podlistem \mathcal{S}_i , aproximováno číslem $\vec{f}(R_i) \cdot \vec{n}^\circ S(\mathcal{S}_i)$, je celkové množství kapaliny (jakožto aditivní funkce), které proteče za jednotku času uvažovaným orientovaným listem, přibližně rovno součtu [srovnej jej s (8.65) na str. 214]

$$\mathcal{T} \approx \sum_{i=1}^m \vec{f}(R_i) \cdot \vec{n}^\circ(X_i) S(\mathcal{S}_i) \equiv s(\vec{f}, \mathcal{D}, \mathcal{V}). \quad (8.81)$$

• Přejdeme v sestrojeném *integrálním součtu* (8.81) k limitě pro $m \rightarrow +\infty$ a $S(\mathcal{S}_i) \rightarrow 0+$, přičemž $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0+$ (tj. uvažujeme vždy *normální posloupnosti* $\{\mathcal{D}_m\}$ dělení \mathcal{D}_m), pak tato limita za daných předpokladů existuje, označuje se

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) \text{ nebo } \iint_{\mathcal{S}} (\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ) dS \text{ nebo } \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} \text{ nebo } \iint_{\mathcal{S}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (8.82)$$

popř. se někdy všude místo \mathcal{S} zdůrazní symbolem $\vec{\mathcal{S}}$ též orientovanost plochy \mathcal{S} , na níž je vektorové pole \vec{f} definováno.

• Integrál (8.82) reprezentuje v závislosti na výchozím vektorovém poli \vec{f} rovněž tok intenzity elektrostatického pole, tok pole magnetické indukce atd.

8.5.3 Plošný integrál vektorové funkce (či vektorového pole) Nechť $\vec{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$ je *orientovaná* vícelistá plocha (tj. jednoduchá po částech hladká)⁴²⁾ v \mathbb{E}_3 a $\vec{f}(X)$ je vektorová funkce (též vektorové pole) definovaná a *ohraničená* na \mathcal{S} . Nechť skalární funkce $(\vec{f} \cdot \vec{n}^\circ)$ je integrovatelná na ploše \mathcal{S} (definice 8.3.2, 8.3.6). Potom říkáme, že vektorová funkce \vec{f} je *integrovatelná* na ploše \mathcal{S} , přičemž *plošný integrál vektorové funkce* neboli vektorového pole \vec{f} nebo plošný integrál 2. druhu nebo *orientovaný* plošný integrál

⁴²⁾viz 8.2.14, tj. s orientací \vec{n}° plochy, indukovanou orientovaným rozkladem na orientované listy $\vec{\mathcal{S}}_1, \dots, \vec{\mathcal{S}}_m$

funkce \vec{f} na (nebo po) ploše \mathcal{S} je název pro integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(\mathbf{X}) \cdot d\vec{S} := \iint_{\mathcal{S}} (\vec{f} \cdot \vec{n}^o) dS. \quad (8.83)$$

Integrál (8.83) se též nazývá (zvláště v aplikovaných oborech, kdy se navíc obvykle předpokládá, že \vec{f} je spojitá na \mathcal{S}) **tok** vektorového pole \vec{f} orientovanou plochou (\mathcal{S}, \vec{n}^o) .

8.5.4 Vektorový element orientované plochy $d\vec{S}$

S přihlédnutím k (8.82), kde $\vec{n}^o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, a k (8.83) se zejména v aplikovaných oborech formálně zavádí jako mnemotechnická pomůcka symbolický vektor

$$d\vec{S} = \vec{n}^o dS = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) dS, \quad (8.84)$$

který se např. nazývá (**vektorový**) **element orientované plochy**, přičemž pouze estetické hledisko nás vede k tomu, že tento nerozdělitelný symbol neoznačujeme $d\vec{S}$. Tento vektor má směr normálového vektoru \vec{n}^o a velikost rovnající se číselně velikosti elementu plochy dS . Pak tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f})$ pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ orientovanou plochou \mathcal{S} definovanou na oboru M můžeme plošným integrálem vyjádřit např. následovně

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}, \quad \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}^o dS, \quad \iint_{\mathcal{S}} (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS, \quad \iint_{\mathcal{S}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \\ \iint_{\mathcal{S}} (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) dS, \quad \text{apod.} \end{aligned} \quad (8.85)$$

8.5.5 Další tvary plošného integrálu vektorové funkce $\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$ lze s přihlédnutím k označení z předešlého odstavce zapsat též takto

$$\iint_{\mathcal{S}} P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy, \quad (8.86)$$

kde výrazy $dx \wedge dy$ (a další cyklickou záměnnou), $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ jsou tzv. **vnější součiny diferenciálů** dx, dy, dz . Podotkněme, že symbol \wedge pro vnější součin diferenciálů má následující základní vlastnost

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad dx_i \wedge dx_i = 0,$$

přičemž platí $d(dx_i) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

• Dříve, a někde ještě i dnes, se v integrálu (8.86) místo vnějšího součinu diferenciálů píše $dydz, dzdx, dx dy$, tj. píše se

$$\iint_{\mathcal{S}} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy, \quad (8.87)$$

což je někdy označováno jako tzv. „úplný klasický tvar plošného integrálu 2. druhu“, jehož používáním však může snadno docházet k nedorozumění, a proto se mu budeme vyhýbat.

8.5.6 Vlastnosti plošného integrálu vektorové funkce Z jeho definice je zřejmé, že plošný integrál vektorové funkce \vec{f} na orientované ploše \mathcal{S} v principu **není novým integrálem**, neboť je **speciálním plošným integrálem skalární funkce** (dané skalárním součinem $\vec{f} \cdot \vec{n}^o$), tj. **plošným integrálem pravoúhlého průmětu** vektorové funkce \vec{f} do jednotkového normálového vektoru \vec{n}^o plochy \mathcal{S} . Proto se na tento integrál přenášejí všechny vlastnosti, které nesouvisí se změnou orientace plochy, v nichž místo dříve psaného skalárního integrandu f stačí nyní psát $\vec{f} \cdot \vec{n}^o$. Jsou to věty o existenci 8.3.7, 8.3.8 a věta o vlastnostech plošného integrálu 8.4.1, ze které pouze poslední část d) je **rozdílná**, takže ji dále vyslovíme jako větu 8.5.7, jež bude vyjadřovat, že **plošný integrál vektorového pole \vec{f} závisí na orientaci plochy**.

• **Rovnost (8.83) reprezentuje vztah mezi plošnými integrály obou druhů.**

8.5.7 Věta o změně orientace plochy v plošném integrálu vektorové funkce Je-li vektorová funkce \vec{f} integrovatelná na ploše \mathcal{S} , pak je integrovatelná na opačně orientované ploše $-\mathcal{S}$ a

$$\iint_{-\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}. \quad \star$$

Důkaz: $\iint_{-\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot (-\vec{n}^o) dS = - \iint_{\mathcal{S}} (\vec{f} \cdot \vec{n}^o) dS = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$. ♣

8.5.8 Ještě k vlastnostem a výpočtu integrálu vektorové funkce Podle definice 8.2.14 součtu, a v našem případě orientovaného součtu vícelisté plochy $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_m$ jako orientované jednoduché po částech hladké plochy složené z m orientovaných listů \mathcal{S}_i (na sebe navazujících způsobem tam uvedeným) a z 8.3.6 – vzorce (8.73), v němž místo f píšeme funkci \vec{f} (integrovatelnou na \mathcal{S}_i), definujeme

$$\iint_{\mathcal{S}_1 + \dots + \mathcal{S}_m} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{S}_i} \vec{f} \cdot d\vec{S} \quad (8.88)$$

(Tzv. *aditivita plošného integrálu (tj. i aditivita toku) vzhledem k integračnímu oboru*).

- a) **Integrál (8.88) existuje** např. tehdy, je-li \vec{f} **spojité** vektorové pole na ploše \mathcal{S} (Stačila by jen jeho ohraničenost?), tj. právě když jsou spojité na \mathcal{S} jeho souřadnicové funkce (složky) P, Q, R , což budeme, nebude-li řečeno jinak, dále předpokládat a v řešených úlohách zaručovat. Přitom **pole jednotkových normálových vektorů** \vec{n}° plochy **nemusí existovat** v bodech ležících na okrajích $\partial\mathcal{S}_i$ jednotlivých listů \mathcal{S}_i , tj. může tam jít o **singulární body**.⁴³⁾ Tyto body, v nichž je porušena **regularita**, popř. **prostota** zobrazení Φ , definované uvažovanými listy, tvoří množinu **plošné míry 0** (Viz závěr v 8.2.21 a 8.2.12), tj. tvoří ji nejvýše konečný počet křivek (jednoduchých po částech hladkých) či bodů, přičemž existence ani hodnota plošného integrálu na ploše není těmito singularitami ovlivněna, pokud integrand \vec{f} je **aspoň ohraničená funkce**, což je vlastnost – tzv. **invariantnost plošného integrálu vzhledem k neinjektivnosti a neregularitě zobrazení Φ na množině plošné míry 0**. Jde o obdobu neměnnosti integrálu křivkového – viz 7.4.5b) na str. 180 nebo dvojného – viz 6.2.4f) na str. 151 a v 6.2.5.

b) **Věta o výpočtu plošného integrálu vektorové funkce na orientovatelné (vícelisté) ploše**

Je-li $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ spojité vektorové pole na orientovatelné ploše \mathcal{S} s některou z parametrizací $X = \Phi(u, v)$ na obrazci $M \subset \mathbb{E}_2$ (nebo Φ je zobrazení, jež s výjimkou množiny bodů plošné míry nula na \mathcal{S} , zmíněných v předešlé části, je parametrizací na M)⁴⁴⁾ danou rovnicemi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, a jestliže její předem (apriori) zadaná orientace \vec{n}° je **souhlasná, resp. není souhlasná s parametrizací Φ , pak pro orientovanou plochu $(\mathcal{S}, \vec{n}^\circ)$, resp. $(\mathcal{S}, -\vec{n}^\circ)$ platí**

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \pm \iint_M \vec{f}(\Phi(u, v)) \cdot \underbrace{(\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v))}_{\vec{n}(\Phi(u, v))} du dv \quad \star \quad (8.89)$$

Důkaz: pro znaménko „+“ využije (8.83), (8.68), takže platí

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(X) d\vec{S} &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(X) \cdot \vec{n}^\circ dS = \\ &= \iint_M \vec{f}(\Phi(u, v)) \cdot \frac{\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)}{\|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\|} \|\vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)\| du dv, \end{aligned}$$

odkud plyne vzorec (8.89). ♣

Jeho použití si ukážeme v příkladech.

- Zmíněný vzorec lze též uvést rozepsáním vektorového a skalárního součinu na tvar

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S} &= \pm \iint_M \left[P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \underbrace{\begin{vmatrix} y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \\ z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix}}_{n_1} + \right. \\ &\quad \left. Q(\dots) \underbrace{\begin{vmatrix} z'_u(u, v) & z'_v(u, v) \\ x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \end{vmatrix}}_{n_2} + R(\dots) \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}}_{n_3} \right] du dv, \end{aligned} \quad (8.90)$$

kde n_1, n_2, n_3 jsou složky normálového vektoru $\vec{n} = \vec{\Phi}'_u(u, v) \times \vec{\Phi}'_v(u, v)$.

(Jako samostatné cvičení zapište s využitím znalostí z lineární algebry předešlý integrál ještě tak, aby v integrandu byl jediný determinant 3. stupně)

⁴³⁾V nich se plocha „láme“ nebo má „hroty“ a formálně v nich lze pole jednotkových normálových vektorů \vec{n}° dodefinovat nulovým vektorem – viz text za vztahem (8.52) na str. 206.

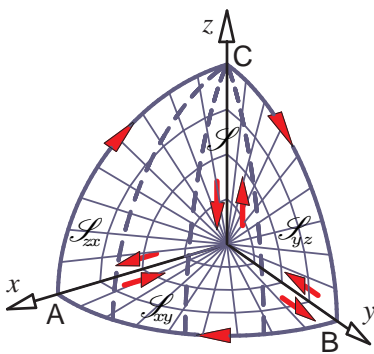
⁴⁴⁾Tedy na množině bodů plošné míry 0 na \mathcal{S} není zobrazení Φ prosté či regulární.

- c) **Výpočet plošného integrálu vektorové funkce \vec{f} na listu \mathcal{S} jako grafu funkce $z(x, y)$** spojitě diferencovatelné na obrazci M [v kartézské souřadnicové rovině Oxy , kdy se orientace \mathcal{S} často určuje podle toho, jaký úhel svírá zadaný normálový vektor grafu \mathcal{S} se směrem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ osy z , viz 8.2.3, 8.2.4 neboli], kdy (co nejnázorněji formulováno) zadané **pole jednotkových normálových vektorů** \vec{n}^o listu \mathcal{S} **má**, resp. **nemá** kladnou z -ovou složku, pak podle (8.89), a protože (Viz (8.26)) $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1)$, platí

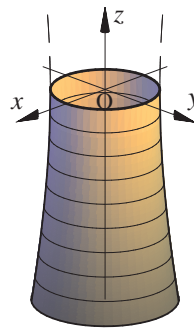
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \pm \iint_M [-P(x, y, z(x, y))z'_x - Q(x, y, z(x, y))z'_y + R(x, y, z(x, y))] dx dy. \quad (8.91)$$

V praxi se spíše používá základní vzorec (8.89), než-li vzorce (8.90), (8.91).

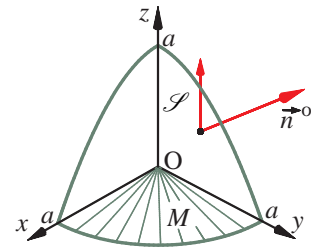
- d) Za určitých předpokladů lze výpočet plošného integrálu vektorové funkce převést na integrál trojný (věta Gaussova-Ostrogradského, je-li plocha \mathcal{S} uzavřená) nebo na křivkový (věta Stokesova), jak uvedeme dále.



Obr. 8.26



Obr. 8.27



Obr. 8.28

8.5.9 Příklad Máme určit tok \mathcal{T}_1 vektorového pole $\vec{f} = (xy, yz, xz)$ nejprve **a)** orientovanou trojlistou plochou, která je součtem tří čtvrtkruhů, z nichž každý je pravouhlým průmětem plochy \mathcal{S} , jíž je osmina sféry $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z 1. oktantu (tj. \mathcal{S} je *pravouhlý sférický trojúhelník* ABC), do souřadnicové roviny tak, že \mathcal{S}_{xy} je projekcí \mathcal{S} do Oxy , \mathcal{S}_{yz} do Oyz , \mathcal{S}_{zx} do Ozx , přičemž máme zadánu pouze orientaci plochy \mathcal{S}_{xy} vektorem $\vec{n}_{xy}^o = -\vec{k}$, \mathcal{S}_{xy} má mít souhlasnou orientaci se svým okrajem, stejně jako další listy, a tyto orientace okrajů máme postupně naznačit šipkami; **b)** poté máme určit tok \mathcal{T}_2 pole \vec{f} přes plochu \mathcal{S} , jejíž orientace má být tentokrát nesouhlasná s tou, kterou stanovíme z předešlé části a). Nakonec **c)** máme určit celkový tok \mathcal{T}_3 orientovanou uzavřenou plochou, která je povrchem ∂T osminy koule T z 1. oktantu, a která je orientována normálovým vektorem vně T neboli vnějším normálovým vektorem.

Řešení:

Ad a) Orientace okrajů tří čtvrtkruhů z obr. 8.26 je orientace vnějším normálovým vektorem vzhledem k povrchu ∂T osminy koule T z 1. oktantu. Tato trojlistá plocha $\mathcal{S}_{xy} + \mathcal{S}_{yz} + \mathcal{S}_{zx}$ je po částech rovinná (a po částech hladká). Připravíme si integrandy plošných integrálů. Pro \mathcal{S}_{xy} je $z = 0$, podle zadání je $\vec{n}_{xy}^o = (0, 0, -1)$, pak $\vec{f} \cdot \vec{n}_{xy}^o = (xy, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$, tedy $\iint_{\mathcal{S}_{xy}} \vec{f} \cdot \vec{n}_{xy}^o dS = 0$, a podobně pro \mathcal{S}_{yz} a \mathcal{S}_{zx} . Tok

$$\mathcal{T}_1 = \iint_{\mathcal{S}_{xy} + \mathcal{S}_{yz} + \mathcal{S}_{zx}} = \iint_{\mathcal{S}_{xy}} + \iint_{\mathcal{S}_{yz}} + \iint_{\mathcal{S}_{zx}} = 0.$$

Ad b) Podle obr. 8.26 je sférický trojúhelník ABC plochou \mathcal{S} , jež je orientovaná vnějším normálovým vektorem $\vec{n}_{\mathcal{S}}$ vzhledem k ∂T , podobně jako plocha z předešlé části.

b1) Nejrychlejší bude opět převedení výpočtu na integrály ze skalární funkce. Zvolme např. kartézskou „parametrizaci“ $\Phi(x, y)$ grafu \mathcal{S} funkce $z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ na $M = \mathcal{S}_{xy}$, tj. $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ (Z příkladu 8.2.20 víme, že Φ sice není parametrizace, ale jen na množině

plošné míry 0, a proto s Φ podle 8.2.21 můžeme jako se skutečnou parametrizací počítat). Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \\ &= \iint_M \vec{f} \cdot \vec{n}_{\mathcal{S}} dx dy = \iint_M (xy, y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) dx dy = \\ &= \iint_M \underbrace{\left(-xy \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)}_{I_1} + \underbrace{y^2}_{I_2} + \underbrace{x\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}_{I_3} dx dy. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Po transformaci dvojného integrálu \iint_M do polárních souřadnic máme

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{M^*} \cos^2 \varphi \sin \varphi \frac{\varrho^4}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} d\varrho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\varrho^4}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} d\varrho = \frac{1}{3} \int_0^R \frac{\varrho^4}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} d\varrho = \\ &= |\varrho = R \sin t| = \frac{R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt = \frac{R^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 dt = \\ &= \frac{R^4}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 \cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos 4t)) dt = \frac{R^4}{12} \left[\frac{3}{2}t - \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} \pi R^4, \\ I_2 &= \iint_{M^*} \varrho^3 \sin^2 \varphi d\varrho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^R \varrho^3 d\varrho = \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} [\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} \pi R^4, \\ I_3 &= \iint_{M^*} (\cos \varphi) \varrho^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2} d\varrho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \varrho^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2} d\varrho = \int_0^R \varrho^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2} d\varrho = \\ &= |\varrho = R \cos t| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 R^4 (\cos t \sin t)^2 dt = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{R^4}{8} [t - \frac{1}{2} \sin 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} \pi R^4, \end{aligned}$$

takže $\mathcal{T}_2 = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{16} \pi R^4$.

b2) Chceme-li použít pro $\iint_{\mathcal{S}}$ vzorec (8.89) s určováním znaménka před dvojným integrálem \iint_M , stačí si nyní ve shodě s obrázkem jen uvědomit, že třetí souřadnice orientujícího pole normálových vektorů $\vec{n}_{\mathcal{S}}$ je na vnitřku \mathcal{S} listu \mathcal{S} kladná ($\vec{n}_{\mathcal{S}}$ směřují nahoru), tj. zadaná orientace je souhlasná s parametrizací $\Phi(x, y)$. Lze proto psát $\mathcal{T}_2 = + \iint_M$ atd.

b3) Použijeme-li přímo zobrazení $\Phi(\vartheta, \varphi)$ ve sférických souřadnicích (Opět nejde o parametrizaci), je podle vzorce (8.58) v 8.2.20 $\vec{n}(\Phi(\vartheta, \varphi)) = R^2 \sin \vartheta (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$ a z téhož článku víme, že \vec{n} je vnější normálový vektor sféry, takže pro \mathcal{S} volíme znaménko +. Pak vzorec (8.89) dává

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= + \iint_M (R \cos \varphi \sin \vartheta R \sin \varphi \sin \vartheta, R \sin \varphi \sin \vartheta R \cos \vartheta, R \cos \varphi \sin \vartheta R \cos \vartheta) \cdot \\ &= R^2 \sin \vartheta (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta) d\vartheta d\varphi = \\ &= R^4 \iint_M (\cos^2 \varphi \sin \varphi \sin^4 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin^3 \vartheta + \cos \varphi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta) d\vartheta d\varphi = \\ &= R^4 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \vartheta d\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta d\vartheta + \right. \\ &= \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta d\vartheta \right\} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} \right) = \frac{3}{16} \pi R^4 \end{aligned}$$

(Podrobnější výpočet jistě nebude čtenáři činit obtíže, neboť se podobá předešlým částem).

Ad c)

c1) Celkový tok vektorového pole \vec{f} povrchem (hranicí) ∂T osminy koule T je pak $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 = \frac{3}{16} \pi R^4$.

c2) Vzorcem (8.86) s vnějšími součiny, by byl výpočet (ve stručnosti) následující

$$\mathcal{T}_3 = \iint_{\partial T} xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + xz dx \wedge dy, \quad (8.93)$$

přičemž tok \mathcal{T}_1 na plochách \mathcal{S}_{xy} , \mathcal{S}_{yz} , \mathcal{S}_{zx} je nulový, neboť např. na \mathcal{S}_{xy} je $z = 0$, $dz = 0$ atd. Pak

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &= \mathcal{T}_2 = \iint_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}_{yz}} y \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy \wedge dz + \iint_{\mathcal{S}_{zx}} z \sqrt{R^2 - x^2 - z^2} dz \wedge dx + \\ &= \iint_{\mathcal{S}_{xy}} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx \wedge dy = |\iint_{\mathcal{S}_{yz}} = \iint_{\mathcal{S}_{zx}} = \iint_{\mathcal{S}_{xy}}, \text{ proto např. píšeme } | = \\ &= 3 \iint_{\mathcal{S}_{xy}} x \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 3 \int_0^R \varrho^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \\ &= 3 \int_0^R \varrho^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2} d\varrho = |\text{ položíme } \varrho = R \cos t, \text{ jak u } I_3 \text{ v části b1)}| = \frac{3}{16} \pi R^4. \end{aligned}$$

• **Poznámka k příkladu** Efektivní způsob výpočtu později ukážeme použitím Gaussovy–Ostrogradského věty.

8.5.10 Příklad Plášť \mathcal{S} chladičí věže MORAVSKÝCH TEPLÁREN, a.s. je modelován rovnicí *jedno-
dílného rotačního hyperboloidu*

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \quad a > 0, \quad (8.94)$$

kte $z < 0$, $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq (k \cdot a)^2$, $k > 1$, a je (Viz obr. 8.27) orientován jednotkovým normálovým polem \vec{n}° , jehož třetí složka je stále kladná (směřuje nahoru). Určeme tok \mathcal{T} vektorového pole $\vec{f} = (-x^2, y^2, z^2)$ plochou \mathcal{S} .

Řešení: Hladký list \mathcal{S} je grafem funkce $z(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ definované na mezikruží $M = \{(x, y) \in \mathbb{E}_2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq (k \cdot a)^2\}$. Pak převedením integrálu vektorové funkce \vec{f} na skalární funkci máme ve shodě s (8.89)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} &= \iint_M (-x^2, y^2, x^2 + y^2 - a^2) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}, 1 \right) dx dy = \\ &= \iint_M \left(\frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} + x^2 + y^2 - a^2 \right) dx dy = \iint_M (x^2 + y^2 - a^2) dx dy, \end{aligned}$$

neboť

$$\iint_M \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} dx dy = \iint_M \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} dx dy,$$

vzhledem k symetrii integrandů na M . Transformací do polárních souřadnic máme

$$\mathcal{T} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{M^*} (\varrho^2 - a^2) \varrho d\varrho d\varphi = 2\pi \int_a^{ka} (\varrho^3 - a^2 \varrho) d\varrho = \frac{\pi}{2} (k^2 - 1)^2 a^4.$$

8.5.11 Příklad Určeme tok \mathcal{T} vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ části *rotačního paraboloidu* $\mathcal{S}: z = a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ v 1. oktantu orientovaného polem jednotkových normálových vektorů \vec{n}° tak, že $\vec{n}^\circ \cdot \vec{k} > 0$.

Řešení: $\vec{f} = \vec{r}$, tj. \vec{f} je pole rádiusvektorů bodů listu \mathcal{S} . Vektor \vec{n}° vypočítaný kartézskou parametrizací $\Phi(x, y)$ směřuje nahoru v každém bodě grafu \mathcal{S} funkce $z(x, y)$, jak víme z 8.2.3, neboli svírá ostrý úhel (a ve vrcholu $(0, 0, a)$ nulový úhel) se směrem \vec{k} osy z . Projekcí \mathcal{S} do Oxy je čtvrtkruh $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, viz obr. 8.28. Při kartézské parametrizaci $\Phi(x, y) = (x, y, a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2))$ je $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}, 1)$, $d\vec{S} = \vec{n} dx dy = (\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}, 1) dx dy$. Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{r} \cdot d\vec{S} &= \iint_M (x, y, a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)) \cdot (\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}, 1) dx dy = \iint_M (\frac{2x^2}{a} + \frac{2y^2}{a} + a - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{a}) dx dy = \\ &= \frac{1}{a} \iint_M (x^2 + y^2 + a^2) dx dy = \frac{1}{a} \iint_{M^*} (\varrho^2 + a^2) \varrho d\varrho d\varphi = \frac{\pi}{2a} \int_0^a (\varrho^3 + a^2 \varrho) d\varrho = \frac{3}{8} \pi a^3. \end{aligned}$$

8.5.12 Příklad Najdeme tok \mathcal{T} vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = (p(x), q(y), r(z))$ vnějším povrchem ∂T kvádrů $T: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ (Načrtněte si T).

Řešení: Úlohu lze řešit více způsoby. Povrch ∂T je šestilistá po částech rovinná plocha. Orientující pole jednotkových normálových vektorů \vec{n}° má tedy kladnou orientaci neboli směřuje ven z kvádrů a ani by je nebylo nutné pro geometrickou názornost počítat. Přesto pro zajímavost uvedme výpočet \vec{n}° pro dvojici protilehlých stěn $x = 0$, resp. $x = a$, které označíme \mathcal{S}_1 , resp. \mathcal{S}_2 . Při kartézské parametrizaci $\Phi(y, z)$ rovinného (hladkého) listu \mathcal{S}_1 , dané rovnicemi $x = 0, y = y, z = z$, je $\Phi(y, z) = (0, y, z)$, takže $\vec{v} = (1, -x'_y, -x'_z) = (1, 0, 0)$, nebo podrobněji

$$\vec{v}(\Phi(y, z)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}. \quad (8.95)$$

Vnější orientující pole jednotkových normálových vektorů je ovšem $\vec{n}^\circ = -\vec{i} = (-1, 0, 0)$. Pak pro $\mathcal{S}_1 = M = \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq b \wedge 0 \leq z \leq c\}$ máme $\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_M (p(0), q(y), r(z)) \cdot (-1, 0, 0) dy dz = -\int_0^b dy \int_0^c p(0) dz = -bcp(0)$. Analogicky vypočítáme $\iint_{\mathcal{S}_2} \vec{f} \cdot d\vec{S} = bcp(a)$. Pro další dvě dvojice stěn $y = 0, y = b$, resp. $z = 0, z = c$ lze obdržet $-acq(0), acq(b)$, resp. $-abr(0), abr(c)$. Výsledný tok je

$$\mathcal{T} = \iint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \left[\frac{1}{a} (p(a) - p(0)) + \frac{1}{b} (q(b) - q(0)) + \frac{1}{c} (r(c) - r(0)) \right] abc.$$

8.5.13 Příklad Máme určit tok centrálního silového pole

$$\vec{f} = -k \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^{\lambda+1}} = -k \frac{\vec{r}^o}{\|\vec{r}\|^\lambda}, \quad (8.96)$$

kde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $k > 0$, $\lambda > 0$, sférou \mathcal{S} se středem v počátku a poloměrem R . Orientace \mathcal{S} je dána vnějším normálovým vektorem.

Řešení: Protože orientující pole jednotkových vektorů vnějších normál na \mathcal{S} je $\vec{n}^o = \vec{r}^o = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, platí

$$\mathcal{T} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = -k \iint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}^o}{\|\vec{r}\|^\lambda} \cdot \vec{r}^o dS = -k \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\|\vec{r}\|^\lambda} dS.$$

Pro body $\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ je $\|\vec{r}(\mathbf{X})\| = R$, takže

$$\mathcal{T} = -k \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{R^\lambda} dS = -\frac{k}{R^\lambda} \iint_{\mathcal{S}} dS = -\frac{k}{R^\lambda} S(\mathcal{S}) = -\frac{k}{R^\lambda} 4\pi R^2 = -4\pi k R^{2-\lambda}.$$

• Z výsledku je zřejmé, že při $\lambda = 2$, tj. např. u **centrálního pole gravitačního**, resp. **elektrostatické intenzity**, vytvořeného hmotným bodem, resp. bodovým nábojem, **nezávisí tok na poloměru uvažované sféry**.

8.6 Integrální věty Gaussova-Ostrogradského a Stokesova. Definice operátorů teorie pole

8.6.1 Úvodní poznámka V článku 8.6 budou formulovány dvě základní integrální věty vektorové analýzy uvedené v jeho názvu. Mají mimořádný význam nejen v mechanice kontinua, termodynamice kontinua, teorii elektromagnetického pole, reakčně-difuzních procesech apod., ale usnadňují v některých úlohách výpočet integrálů, a rovněž nám objasní význam v diferenciálním počtu jen formálně zavedených operátorů **divergence** a **rotace** vektorového pole $\vec{f} = (P, Q, R)$. Připomeňme, že

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (8.97)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (8.98)$$

Obě věty (spolu s Greenovou větou) jsou pro svou hloubku a široký záběr svého využití považovány za jedny z nejelegantnějších výsledků klasické matematické analýzy. Uvedeme je bez důkazů, přestože matematické prostředky k tomu máme vybudovány.

• Následující věta říká, že za jistých podmínek je tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f})$ vektorového pole \vec{f} **uzavřenou** kladně orientovanou plochou \mathcal{S} (tj. orientovanou vnějším normálovým vektorem) roven objemovému (tj. trojnému) integrálu divergence pole \vec{f} přes vnitřek $\operatorname{int} \mathcal{S}$ plochy \mathcal{S} .

8.6.2 Divergenční Gaussova-Ostrogradského⁴⁵⁾ věta

Nechť

1. $T \subset \mathbb{E}_3$ je těleso, jehož hranici ∂T tvoří jediná uzavřená jednoduchá po částech hladká plocha \mathcal{S} ,⁴⁶⁾⁴⁷⁾
2. (\mathcal{S}, \vec{n}^o) je kladně orientovaná uzavřená plocha označená stručně \mathcal{S} (tj. orientovaná vnějším jednotkovým normálovým vektorem \vec{n}^o),
3. $\vec{f}(\mathbf{X}) = (P(\mathbf{X}), Q(\mathbf{X}), R(\mathbf{X}))$ je vektorová funkce třídy C^1 na (otevřené) oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ obsahující těleso T (tj. $T \subset G$, kde G je např. otevřená koule).

Potom pro tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f})$ vektorového pole \vec{f} uzavřenou plochou \mathcal{S} platí **Gaussův-Ostrogradského vzorec**

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) \equiv \boxed{\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{f}(x, y, z) \underbrace{dx dy dz}_{dV}} \cdot \star \quad (8.99)$$

⁴⁵⁾Ostrogradskij, Michal Vasiljevič (1801-1862), ruský matematik. Přispěl k rozvoji matematické analýzy, matematické fyziky a algebry.

⁴⁶⁾Odtud vyplývá, že T je jednoduše souvislé těleso.

⁴⁷⁾V případě, že T je vícenásobně souvislé těleso, viz následující poznámku.

8.6.3 Poznámky k větě Přitom, je-li obecněji v předešlé větě T *vícenásobně souvislé těleso* (Viz 8.2.29), znamená $\oiint_{\mathcal{S}}$ součet plošných integrálů na jednotlivých částech (listech) hranice tělesa T , tedy jde o podobné zobecnění věty jako u Greenovy věty v případě vícenásobně souvislých oblastí (obrazců) – viz 7.5.8 na str. 184. U vícenásobně souvislého tělesa lze totiž provést jeho dělení (rozklad) na jednoduchá (pod)tělesa, přičemž na společných plochách se pak integruje po obou stranách, takže se na společných plochách tyto integrály, představující toky, navzájem anulují (odečtou) a zůstává pouze tok hraniční plochou \mathcal{S} .

• V Gaussově-Ostrogradského vzorci (8.99) se u objemového (tj. trojného) integrálu místo uzavřené množiny T často píše int \mathcal{S} , tj.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) \equiv \boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\text{int } \mathcal{S}} \text{div } \vec{f}(\mathbf{X}) dV}. \quad (8.100)$$

• Uvedme ještě tvar se *směrovými kosiny* normály n hraniční plochy $\mathcal{S} \equiv \partial T$ tělesa T , orientované směrem vně T , resp. tvar obsahující *vnější součiny diferenciálů*, přičemž rozepíšeme též divergenci pole \vec{f} . Pak platí

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) \equiv \oiint_{\mathcal{S}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (8.101)$$

resp.

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) \equiv \oiint_{\mathcal{S}} (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy) = \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz. \quad (8.102)$$

• Podmínky věty Gaussovy-Ostrogradského jsou *postačující*, jak je zřejmé z její formulace, takže lze tuto větu formulovat i obecněji, avšak v praxi se používá uvedený tvar.

• Při *záporné orientaci* plochy \mathcal{S} je ovšem nutno psát na jedné straně Gaussova-Ostrogradského vzorce záporné znaménko.

8.6.4 Fyzikální interpretace Gaussovy-Ostrogradského věty, vyjadřující rovnost plošného a objemového integrálu, může být formulována následovně:

Celkový tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f})$ vektorového pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ uzavřenou plochou \mathcal{S} je roven celkovému součtu změn (součtu rychlostí změn) jednotlivých složek P, Q, R pole podél jednotlivých os – tedy je roven celkové „vydatnosti zdrojů“⁴⁸⁾ pole uvnitř plochy.

8.6.5 Integrovní definice divergence vektorového pole \vec{f} třídy C^1 v oblasti G je založena na jeho toku uzavřenou plochou $\mathcal{S} \subset G$, která je zároveň hraniční plochou pomyslného tělesa T v oblasti G a objemu $V(T)$. Uvažujme, že kladně orientovanou plochou \mathcal{S} proudí stálou rychlostí \vec{f} nestlačitelná kapalina, takže tok stacionárního pole těchto rychlostí \vec{f} ve směru vnějšího normálového vektoru k \mathcal{S} je $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$. Pak podíl $(\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S})/V(T)$ vystihuje jistou **míru vydatnosti zdrojů kapaliny** uvnitř \mathcal{S} . Uvažujme bod A uvnitř \mathcal{S} (tj. uvnitř T , tedy $A \in T^\circ$) a posloupnost (pod)těles $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, $T_n \subset G$ ($n = 1, 2, \dots$), s hraničními (uzavřenými) plochami \mathcal{S}_n , přičemž průměry (Viz 8.3.1) T_n se blíží k nule, tj. $\text{diam } T_n \rightarrow 0+$. Pak limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\oiint_{\mathcal{S}_n} \vec{f} \cdot d\vec{S}}{V(T_n)}, \quad (8.103)$$

reprezentující **stahování** ploch \mathcal{S}_n k bodu A , zároveň vyjadřuje, zda bod A je bodem *zřídla – zdroje* kapaliny (je-li limita kladná) či naopak, zda bod A je bodem *propadu – záporného zdroje* – odtoku kapaliny (je-li limita záporná). Uvedenou limitu určíme díky Gaussově-Ostrogradského větě a použitím věty o střední hodnotě integrovního počtu 6.2.6 pro trojný integrál spojitě funkce, podle nichž

$$\oiint_{\mathcal{S}_n} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_{T_n} \text{div } \vec{f} \cdot dV = \text{div } \vec{f}(\mathbf{R}_n^*) \iiint_{T_n} dV = \text{div } \vec{f}(\mathbf{R}_n^*) V(T_n), \quad \mathbf{R}_n^* \in T_n. \quad (8.104)$$

Odtud $\text{div } \vec{f}(\mathbf{R}_n^*) = (\oiint_{\mathcal{S}_n} \vec{f} \cdot d\vec{S})/V(T_n)$, a protože $\text{diam } T_n \rightarrow 0+$, $A \in \mathbb{E}_n$, je euklidovská vzdálenost bodů $\varrho(\mathbf{R}_n^*, A) \rightarrow 0+$. Ze spojitosti funkce $\text{div } \vec{f}$ vyplývá, že $\text{div } \vec{f}(\mathbf{R}_n^*) \rightarrow \text{div } \vec{f}(A)$ pro $n \rightarrow \infty$, takže

$$\boxed{\text{div } \vec{f}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\oiint_{\mathcal{S}_n} \vec{f} \cdot d\vec{S}}{V(T_n)}}. \quad (8.105)$$

• Zbývající část důkazu, že totiž divergence definovaná v (8.105) je též jako zavedená v diferenciálním počtu pomocí operátoru nabla (využívající Taylorův vzorec), nebudeme provádět.

⁴⁸⁾Viz následující odstavec

• Z fyzikálního významu zlomků na pravé straně je patrné, že **divergenci vektorového pole \vec{f} v bodě A lze nazvat hustotou zdrojů pole v okolí bodu A**, neboť limita napravo v (8.105) udává tendenci podílu toku pole \vec{f} povrchem podtělesa T_n k jeho objemu $V(T_n)$, zmenšuje-li se průměr T_n k nule – jinými slovy, pro malé okolí bodu A je tok tímto okolím přibližně roven součinu divergence $\operatorname{div} \vec{f}(A)$ a jeho objemu.

• Hydrodynamickou terminologií řečeno, **divergence rychlosti \vec{f} proudící kapaliny udává množství kapaliny, která za jednotku času vyteče, resp. vteče z jednotkového objemu.**

• Chemickou terminologií řečeno, $\operatorname{div} \vec{f}(A)$, kde vektorové pole \vec{f} je gradientem koncentrace, **znamená množství látky, které v okolí bodu A přibude difuzí či vznikne chemickou reakcí** (v případě, kdy $\operatorname{div} \vec{f}(A) > 0$) **nebo z okolí bodu A zmizí** (v případě, kdy $\operatorname{div} \vec{f}(A) < 0$).

• Speciálně, je-li $\operatorname{div} \vec{f}(X) = 0$ v oblasti G z \mathbb{E}_3 , pak je podle Gaussovy věty tok přes každou uzavřenou plochu v G nulový, což platí podle (8.105) i obráceně. Tedy rovnice

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0 \quad (8.106)$$

popisuje **ustálené proudění**. Proto už v DP bylo vektorové pole s nulovou divergencí nazváno **nezřídlové** či **nestlačitelné pole**. Je-li \vec{f} rychlostní pole v kapalině, pak se podmínka (8.106) nazývá v hydrodynamice **rovnice kontinuity** nestlačitelné kapaliny.

8.6.6 Přehled integrálních definic operátorů. Fyzikální význam Laplaceova operátoru. Odvození Laplaceovy rovnice pro ustálené tepelné proudění Představuje-li $\mathcal{S} \rightarrow A$ stahování uzavřené kladně orientované plochy \mathcal{S} , která je hraniční plochou tělesa T o objemu $V(T)$, do jejího vnitřního bodu A popsáno v předešlém článku, lze definovat operátory nezávisle na zvoleném systému souřadnic takto

$$\operatorname{div} \vec{f}(A) = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow A} \frac{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}}{V(T)} = \nabla \cdot \vec{f}(A), \quad (8.107)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(A) = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow A} \frac{-\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \times d\vec{S}}{V(T)} = \nabla \times \vec{f}(A), \quad (8.108)$$

a podobně lze definovat gradient skalárního pole f v bodě A

$$\operatorname{grad} f(A) = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow A} \frac{\oiint_{\mathcal{S}} f d\vec{S}}{V(T)} = \nabla f(A), \quad (8.109)$$

přičemž ve vztahu (8.108), resp. (8.109) se jedná o tzv. **vektorový integrál** na ploše \mathcal{S} , kdy nejde o tok vektorového pole plochou \mathcal{S} , ale o integraci vektorové funkce, jejímž **výsledkem je vektor!** Poslední dva vztahy nebudeme odvozovat.

• Protože z (5.76) na str. 109 víme, že **laplacián** na f je divergence gradientu f , tj. v \mathbb{E}_3 platí

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (8.110)$$

Laplaceův operátor lze chápat jako hustotu zdrojů vektorového pole \vec{f} gradientů původního skalárního pole f třídy C^2 v oblasti G , tj. tok pole $\vec{f} = \nabla f$ každou uzavřenou plochou \mathcal{S} v oblasti G je roven integrálu

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\nabla f) = \iiint_{\operatorname{int} \mathcal{S}} \Delta f dx dy dz. \quad (8.111)$$

• Speciálně, uvažujme stacionární (ustálené) pole teplot $f(x, y, z)$, vzniklé vedením (tj. kondukcí) tepla v tělese G , které je v určitém místě stejně intenzivně např. ohříváno, takže je ve vzdálenějších místech teplota nižší, ale nemění se s časem. Teplo proudí (teče) vždy z míst o vyšších teplotách do míst o nižších teplotách neboli proti teplotnímu spádu (proti gradientu teplot), tj. je podle **Fourierova zákona** pro vedení tepla v izotropním materiálu definováno polem $\vec{f} = -k \nabla f$, kde $k \in \mathbb{R}^+$ je součinitel vedení tepla. V izolované soustavě nastává po určité době stav tepelné rovnováhy, kdy tepelný tok každou uzavřenou plochou je nulový. To je podle (8.111) ekvivalentní s **Laplaceovou rovnicí**

$$\Delta f = 0, \quad \text{resp.} \quad -\Delta f = 0, \quad (8.112)$$

kterou jsme tak odvodili pro modelování ustáleného tepelného proudění díky Gaussově-Ostrogradského větě. Mimořádný význam Laplaceovy rovnice v matematické fyzice byl zmíněn již v 5.4.34 na str. 109 a 5.4.37 na str. 110.

8.6.7 Příklad – Vzorec pro objem tělesa plošným integrálem Určeme tok rádiusvektoru $\vec{r} = (x, y, z)$ vnější stranou libovolné uzavřené plochy \mathcal{S} , která je hraniční plochou tělesa T .

Řešení: Zřejmě $\vec{f} = \vec{r}$ je rádiusvektor bodu $X = (x, y, z) \in \mathcal{S}$, a protože \vec{r} je funkce dokonce třídy C^∞ v \mathbb{E}_3 , lze volit v Gaussově-Ostrogradského větě $G = \mathbb{E}_3$, a ta nám pro $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ dává

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{r}) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\operatorname{int} \mathcal{S}} 3dV = 3V(\operatorname{int} \mathcal{S}) = 3V(T).$$

Odtud máme vzorec

$$\boxed{V(T) = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \vec{r} \cdot d\vec{S}} \left(= \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right), \quad (8.113)$$

jenž je jistým zobecněním vzorce (7.27) z 7.5.7, přičemž odvozený vzorec nám též sděluje, že **tok polohového vektoru vnější stranou libovolné uzavřené plochy je roven trojnásobnému objemu tělesa ohraničeného touto plochou.**

8.6.8 Příklad Určeme tok \mathcal{T}_3 pole \vec{f} vnější stranou povrchu ∂T osminy koule T ze zadání příkladu 8.5.9c) pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty.

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 &= \iint_{\partial T} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div}(xy, yz, xz) = \iiint_T (x + y + z) dV = \\ &= \iiint_{T^*} (r \cos \varphi \sin \vartheta + r \sin \varphi \sin \vartheta + r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta = \\ &= \int_0^R r^3 dr \iint_{M^*} d\varphi [(\cos \varphi + \sin \varphi) \sin^2 \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta] d\vartheta = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}] d\varphi = \frac{R^4}{4} [(1+1) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}] = \frac{3}{16} \pi R^4. \end{aligned}$$

8.6.9 Příklad Plošným integrálem ověřme vzorec pro objem $V(T)$ rotačního kužele T s vrcholem dole, a to v počátku soustavy souřadnic, jenž má poloměr podstavy R a výšku b (Viz obr. 8.29).

Řešení: Podle obrázku je povrch tělesa $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, přičemž v každém bodě pláště \mathcal{S}_1 je skalární součin $\vec{r} \cdot \vec{n}_1^o = 0$ (neboť jejich úhel je $\frac{\pi}{2}$) a v každém bodě podstavy \mathcal{S}_2 o rovnici $z = b$ je $\vec{r} \cdot \vec{n}_2^o = b$, vzhledem k tomu, že $\|\vec{n}_2^o\| = 1$ neboli b je zároveň **pravoúhlý průmět vektoru \vec{r} do vektoru \vec{n}_2^o** . Podle vzorce (8.113) je pak

$$V(T) = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \vec{r} \cdot \vec{n}^o dS = \frac{1}{3} \left(\iint_{\mathcal{S}_1} \vec{r} \cdot \vec{n}_1^o dS + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{r} \cdot \vec{n}_2^o dS \right) = \frac{1}{3} b \iint_{\mathcal{S}_2} dS = \frac{1}{3} b S(\mathcal{S}_2) = \frac{1}{3} \pi R^2 b.$$

8.6.10 Příklad Pomocí Pascalova⁴⁹⁾ zákona máme odvodit Archimedův⁵⁰⁾ zákon.

Řešení: Mějme těleso T s povrchem ∂T . Nulová hladina (povrch) kapaliny o konstantní hustotě h ať prochází rovinou xy . Je-li T ponořeno do kapaliny, pak $T \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid z \leq 0\}$. Podle Pascalova zákona je hydrostatická tlaková síla $\vec{F} = (P, Q, R)$ působící na T dána plošnými integrály

$$\vec{F} = (-hg \iint_{\mathcal{S}} zn_1 dS, -hg \iint_{\mathcal{S}} zn_2 dS, -hg \iint_{\mathcal{S}} zn_3 dS),$$

kde $\vec{n}^o = (n_1, n_2, n_3)$ je vnitřní jednotkové orientující normálové pole plochy ∂T , g je tíhové zrychlení. Pak pro složky P, Q, R dává Gaussova-Ostrogradského věta

$$\begin{aligned} P &= -hg \iint_{\partial T} zn_1 dS = -hg \iint_{\partial T} z\vec{i} \cdot d\vec{S} = hg \iiint_T \operatorname{div}(z\vec{i}) dV = 0, \text{ podobně } Q = 0, \\ R &= -hg \iint_{\partial T} zn_3 dS = -hg \iint_{\partial T} z\vec{k} \cdot d\vec{S} = hg \iiint_T \operatorname{div}(z\vec{k}) dV = hg \iiint_T dV = hgV(T), \end{aligned}$$

takže celkem

$$\vec{F} = (0, 0, hgV(T)) = hgV(T)(0, 0, 1),$$

což je matematická formulace Archimedova zákona, podle níž **výsledná hydrostatická tlaková síla působící na povrch ponořeného tělesa (vyjádřená plošným integrálem přes jeho povrch) je násobkem objemu tělesa a směřuje proti tíži** (proto ji nazýváme vztlakovou).

⁴⁹⁾Pascal, Blaise (1623-1662), francouzský matematik a fyzik. V 18. letech sestrojil počítačový stroj.

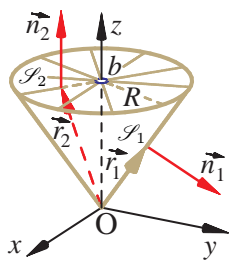
⁵⁰⁾Archimedes ze Syrakus (asi 287-212 před. n.l.), všestranný řecký génius. Používal už metody blízké integrálnímu počtu.

8.6.11 Věta Stokesova⁵¹⁾ Nechť

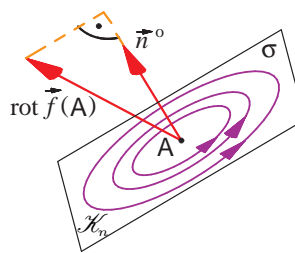
1. $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}_3$ je orientovaná jednoduchá po částech hladká plocha,
2. okraj $\partial\mathcal{S}$ plochy \mathcal{S} tvoří jediná uzavřená jednoduchá po částech hladká (prostorová) křivka \mathcal{K} a tento okraj je souhlasně orientovaný s plochou⁵²⁾ \mathcal{S} ,
3. $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ je vektorová funkce třídy C^1 na (otevřené) oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ obsahující plochu \mathcal{S} (tj. $\mathcal{S} \subset G$, kde G je např. otevřená koule).

Potom platí **Stokesův vzorec**

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S}. \star \quad (8.114)$$



Obr. 8.29



Obr. 8.30

8.6.12 Poznámky k větě Přitom, je-li speciálně v předešlé větě plocha \mathcal{S} uzavřená (tj. její okraj $\partial\mathcal{S} \equiv \mathcal{K} = \emptyset$), pak

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0.$$

• Je-li naopak obecněji v předešlé větě orientovaný okraj $\partial\mathcal{S}$ tvořen disjunktním sjednocením konečného počtu k uzavřených orientovaných (jednoduchých po částech hladkých) křivek (Viz 8.2.14 a obr. 8.12, znázorňující na str. 204 situaci pro $k = 2$), z nichž např. \mathcal{K}_1 je orientovaná **vnější hraniční křivka** plochy a $\mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_k$ jsou (opačně) orientované **vnitřní hraniční křivky plochy**, přičemž plocha \mathcal{S} a její okraj $\partial\mathcal{S}$ jsou orientovány souhlasně, pak platí **zobecnění Stokesovy věty**

$$\sum_{i=1}^k \oint_{\mathcal{K}_i} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S}. \quad (8.115)$$

• Uvedme ještě tvar Stokesova vzorce v podrobnějším tvaru a vpravo s využitím vnějších součinů diferenciálů

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\mathcal{S}} (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy. \quad (8.116)$$

• Poznamenejme, že Stokesův vzorec píšeme v uvedeném pořadí, neboť jeho praktický význam spočívá v převedení výpočtu **cirkulace $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\vec{f})$ vektorového pole \vec{f} , tedy i práce po uzavřené křivce \mathcal{K}** reprezentované levou stranou vzorce s křivkovým integrálem, na výpočet plošného integrálu na pravé straně vzorce, reprezentujícího **tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\operatorname{rot} \vec{f})$ vektoru rotace původního pole \vec{f}** , což lze zapsat vztahem

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\vec{f}) = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\operatorname{rot} \vec{f}). \quad (8.117)$$

Fyzikální interpretace Stokesovy věty je tak vyjádřena ekvivalencí (8.117).

• Obrácené použití vzorce, tj. vyjádření plošného integrálu pole \vec{g} na ploše \mathcal{S} v oblasti G integrálem křivkovým, kdy je nutné umět k danému vektoru \vec{g} najít jediné vektorové pole \vec{f} tak, aby platilo $\vec{g} = \operatorname{rot} \vec{f}$, je díky hlubokým výsledkům teorie pole možné, a je dokázáno, že k tomu musíme vedle dané $\operatorname{rot} \vec{f}$ znát ještě $\operatorname{div} \vec{f}$ a navíc jisté vlastnosti vektoru \vec{f} na okraji plochy, jde však o teoretický význam využití.

Význam Stokesovy věty totiž nespočívá ve výpočtu křivkových či plošných integrálů, ale v objasnění mnoha obtížných otázek z teorie pole i jejich aplikacích.

• Speciálním případem Stokesovy věty pro případ rovinné plochy – obrazce M , např. v souřadnicové rovině Oxy o rovnici $z = 0$, kdy obrazec M je vnořen v rovinném vektorovém poli $\vec{f} = (P(x, y), Q(x, y))$ třídy C^1

⁵¹⁾Stokes, George Gabriel (1819-1903), irský matematik a fyzik. Rozvinul matematickou fyziku, hydrodynamiku a optiku.

⁵²⁾tedy platí **pravidlo pravé ruky** zmíněné v 8.2.8, kdy orientace křivky $\partial\mathcal{S}$ je určena prsty pravé ruky a její vztyčený palec určuje směr pole normálových vektorů plochy

na oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$ a je ohraničen jedinou uzavřenou kladně orientovanou rovinnou křivkou \mathcal{K} (kdy $dz = 0$) a kdy plošný integrál v (8.116) je dvojným integrálem na M , je pak

$$\oint_{\mathcal{K}} P dx + Q dy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (8.118)$$

což je tvrzení **Greenovy věty** ze str. 183.

8.6.13 Věta o fyzikální interpretaci rotace pole jako jeho cirkulace Nechť platí předpoklady Stokesovy věty. Buď A libovolný bod plochy \mathcal{S} , jenž neleží na jejím okraji. Nechť $\vec{n}^o(A)$ označuje orientující jednotkový normálový vektor plochy \mathcal{S} v bodě A a $S(\mathcal{S})$ označuje obsah plochy \mathcal{S} . Pak pro **pravoúhlý průmět vektoru** $\text{rot } \vec{f}(A)$ do směru $\vec{n}^o(A)$ platí [Srovnej s (7.25) na str. 182]

$$\text{rot } \vec{f}(A) \cdot \vec{n}^o(A) = \lim_{\mathcal{S} \rightarrow A} \frac{\oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}}{S(\mathcal{S})}. \quad \star \quad (8.119)$$

Důkaz: využíje Stokesovu větu. Uvažujme pole \vec{f} třídy C^1 v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ obsahující libovolný bod A . Proložme bodem A rovinu σ (Viz obr. 8.30) s jednotkovým normálovým vektorem \vec{n}^o . Nyní uvažujme v rovině σ posloupnost $\{\mathcal{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$ uzavřených křivek (např. kružnic), souhlasně orientovaných s vektorem \vec{n}^o , jejichž vnitřky int \mathcal{K}_n obsahují bod A , a to takovou, že se křivky \mathcal{K}_n **stahují** k bodu A , tj. jejich průměry $\text{diam } \mathcal{K}_n \rightarrow 0+$ neboli $\mathcal{S} \rightarrow A$. Konečně uvažujme posloupnost ploch $\{\mathcal{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že je vždy plocha \mathcal{S}_n v σ ohraničená křivkou \mathcal{K}_n a orientovaná vektorem \vec{n}^o , takže $\partial \mathcal{S}_n = \mathcal{K}_n$. Podle **Stokesovy věty** jsou cirkulace pole \vec{f} po \mathcal{K}_n

$$\oint_{\mathcal{K}_n} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}_n} (\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^o) dS. \quad (8.120)$$

Použití **věty o střední hodnotě** integrálního počtu 6.2.6 pro plošný integrál vpravo ze spojitého integrandu dává

$$\iint_{\mathcal{S}_n} (\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^o) dS = (\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^o)|_{\mathbb{R}_n^*} \cdot S(\mathcal{S}_n), \quad (8.121)$$

kde bod $\mathbb{R}_n^* \in \mathcal{S}_n$. Odtud

$$(\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^o)|_{\mathbb{R}_n^*} = \frac{\oint_{\mathcal{K}_n} \vec{f} \cdot d\vec{s}}{S(\mathcal{S}_n)}. \quad (8.122)$$

Pro $n \rightarrow \infty$ je bodová posloupnost $\mathbb{R}_n^* \rightarrow A$ (protože $\text{diam } \mathcal{K}_n = \text{diam } \mathcal{S}_n \rightarrow 0+$ neboli protože $\mathcal{S} \rightarrow A$), a jelikož pole $\text{rot } \vec{f}$ je spojitě a \vec{n}^o se nemění, je $(\text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^o)|_{\mathbb{R}_n^*} \rightarrow \text{rot } \vec{f}(A) \cdot \vec{n}^o$, takže dostáváme

$$\text{rot } \vec{f}(A) \cdot \vec{n}^o(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\oint_{\mathcal{K}_n} \vec{f} \cdot d\vec{s}}{S(\mathcal{S}_n)} \equiv \lim_{\mathcal{S} \rightarrow A} \frac{\oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s}}{S(\mathcal{S})}. \quad (8.123)$$

♣

8.6.14 Slovní vyjádření výsledku předešlé věty o rotaci pole spočívá v tom, že $\text{rot } \vec{f}$ je vektor, jehož **pravoúhlý průmět (projekce) do libovolného uvažovaného směru je roven limitě podílu cirkulace (tj. popř. i práce, je-li \vec{f} síla) daného pole \vec{f} po okraji orientované rovinné plochy s normálovým vektorem v uvažovaném směru k obsahu této plochy.**

- Projekce $\text{rot } \vec{f}(A)$ do směru \vec{n}^o (Viz obr. 8.30) tak vyjadřuje **plošnou hustotu cirkulace – vířivosti** (tj. popř. i **plošnou hustotu energie) pole \vec{f}** v rovině σ kolem osy dané bodem A a vektorem \vec{n}^o .

- Proto maximální hustota víru pole \vec{f} v bodě A je v rovině, která je kolmá k vektoru $\text{rot } \vec{f}(A)$.

8.6.15 Dva příklady rychlostních polí s víry Představme si, že \vec{f} je rychlostní pole proudící kapaliny, do níž ponoříme lopatkový **mlýnek**. Pak bude energie mlýnku maximální, a tedy se mlýnek bude otáčet nejrychleji, nastavíme-li osu mlýnku ve směru $\text{rot } \vec{f}$ v daném bodě, takže osa mlýnku je osou víru. Volíme-li naopak osu kolmou na vektor rotace pole, bude energie nulová. Jak jsme uvedli již v **DP**, vektorové pole, pro něž $\text{rot } \vec{f} = \vec{o}$ v každém bodě, se nazývá **nevírové pole**.

- Vypouštíme-li **vanu**, vytvoří se v odtoku vír (Mimoходом, smysl jeho otáčení je vlivem Coriolisovy⁵³ síly na severní či jižní polokouli opačný). Dutina, která se objeví uprostřed víru, je zakřivená. To je tím, že osa víru je v různých místech různá neboli směr rotace rychlostního pole vody není konstantní.

⁵³Coriolis, Gaspard Gustave (1792-1843), francouzský matematik a fyzik. Coriolisova síla způsobuje např. meandry řek v rovinách.

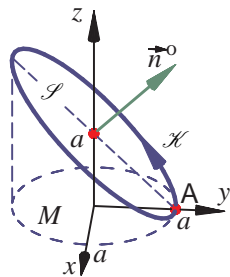
8.6.16 Příklad Vypočítejte cirkulaci $C_{\mathcal{K}}(\vec{f})$ pole $\vec{f} = (yz + \cos x)\vec{i} + (xz - y^4)\vec{j} + (xy - z^3)\vec{k}$ po křivce \mathcal{K} , která je hranicí trojúhelníka \mathcal{S} s vrcholy $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$, $a > 0$, a která je kladně orientovaná. Řešení: Jsou splněny předpoklady Stokesovy věty 8.6.11, \vec{f} je dokonce třídy C^∞ v $G = \mathbb{E}_3 \supset \mathcal{S}$. Pro Stokesův vzorec $C_{\mathcal{K}}(\vec{f}) = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\text{rot } \vec{f})$ je $\text{rot } \vec{f} = (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k} = (x - x)\vec{i} + (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0}$, tedy cirkulace $\oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0$ tohoto pole přes libovolnou (uzavřenou) křivku je nulová. Jde o **pole nevírové (nerotační)**, jelikož $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$, a protože je navíc \mathbb{E}_3 **jednoduše souvislá** oblast, jde o **pole konzervativní (potenciální)**, jak je zřejmé ze schématu v 5.4.40 ze str. 111 nebo z věty 7.6.8.

8.6.17 Příklad Ověřme platnost Stokesovy věty výpočtem cirkulace $C_{\mathcal{K}}(\vec{f})$ vektorového pole $\vec{f} = (x + y, y + z, x + z)$ po elipse \mathcal{K} , která je průsečnicí válcové plochy $x^2 + y^2 = a^2$ s rovinou $z = a - y$, $a > 0$, a \mathcal{K} je orientovaná souhlasně s plochou $\mathcal{S} = \overline{\text{int } \mathcal{K}}$ tak, že pro normálový vektor \vec{n} plochy a směr \vec{k} osy z platí $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ (Obr. 8.31).

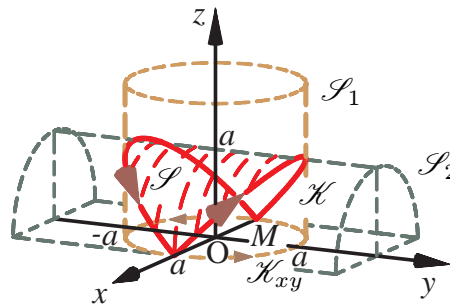
Řešení: Elipsu \mathcal{K} lze parametrizovat např. rovnicemi $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a - a \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, jimiž záměrně definujeme počáteční bod $A = (0, a, 0)$ integrační cesty na ose y , avšak parametrizace elipsy (a tedy i jejího průmětu – kružnice ∂M jako hranice kruhu M) je pak nesouhlasná s tou, která je vyznačena na obrázku a odpovídá zadání. Pro přímý výpočet cirkulace pak platí

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{K}}(\vec{f}) &= \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_0^{2\pi} (a \sin t + a \cos t, a \cos t + a - a \cos t, a \sin t + a - a \cos t) \cdot \\ &\quad (a \cos t, -a \sin t, a \sin t) dt = -a^2 \int_0^{2\pi} dt = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

Pro Stokesovu větu, jejíž předpoklady jsou splněny – např. \vec{f} je dokonce třídy C^∞ v $G = \mathbb{E}_3 \supset \overline{\text{int } \mathcal{K}}$, kde plocha $\mathcal{S} = \overline{\text{int } \mathcal{K}}$ je elipsa včetně svého vnitřku – máme $\text{rot } \vec{f} = -(1, 1, 1)$. Pro plochu \mathcal{S} , jež je částí roviny $z = a - y$, volme kartézskou parametrizaci $\Phi(x, y) = (x, y, a - y)$, kde $(x, y) \in M$. Normálový vektor plochy $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (0, 1, 1)$ směřuje (ve shodě s teorií) nahoru. Proto bude před dvojným integrálem znaménko $+$. Pak je $C_{\mathcal{K}}(\vec{f}) = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S} = + \iint_M -(1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) dx dy = -2 \iint_M dx dy = -2P(M) = -2\pi a^2$. Při použití jednotkového normálového vektoru $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ a obsahu vnitřku elipsy $P(\text{int } \mathcal{K}) = \pi a \sqrt{2} a = \sqrt{2} \pi a^2$ lze též psát $C_{\mathcal{K}}(\vec{f}) = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n}^0 dS = -\frac{2}{\sqrt{2}} \iint_{\mathcal{S}} dS = -\frac{2}{\sqrt{2}} S(\mathcal{S}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} P(\text{int } \mathcal{K}) = -2\pi a^2$.



Obr. 8.31



Obr. 8.32

8.6.18 Příklad Určete práci W silového pole $\vec{f} = \lambda(x \cos ax - 2y + bz^2 \cos bx, 3x - y \sin by, 2z \sin bx - ze^{-cz} \arctan cz)$ [kde koeficient λ je v měřicí jednotce $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ a koeficienty a, b, c jsou v m^{-1}] po uzavřené křivce \mathcal{K} , která je průnikem dvou kolmých **rotačních válcových ploch** o rovnicích $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 = a^2$, $\mathcal{S}_2 : x^2 + z^2 = a^2$, kde $z \geq 0$, a je orientovaná tak, že její pravoúhlý průmět do roviny xy je křivka \mathcal{K}_{xy} , která je orientovaná kladně (Viz obr. 8.32).

Řešení: \mathcal{K} je okrajem plochy \mathcal{S} , jež je grafem funkce $z = z(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ (jako části \mathcal{S}_2) definované na kruhu $M : x^2 + y^2 \leq a^2$ s hraniční kružnicí $\partial M = \mathcal{K}_{xy}$. Protože \mathcal{K} je uzavřená křivka, přičemž je orientovaný součtem dvou poloelips, \vec{f} je pole třídy C^∞ v oblasti $G = \mathbb{E}_3$, a lze použít Stokesovu větu, kde $\text{rot } \vec{f} = \lambda(0, 0, 5)$, a vnější normála je $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, 0, 1)$, platí

$$W = \oint_{\mathcal{K}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{S} = + \iint_M (\text{rot } \vec{f}) \cdot \vec{n} dx dy = 5\lambda \iint_M dx dy = 5\pi \lambda a^2 \text{ (kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}\text{)}.$$

8.7 Cvičení

A) Plocha jako graf explicitní funkce, její obsah i aplikace na skořepinu dvojným integrálem

- 1** Aplikací dvojného integrálu odvoďte vzorec pro obsah $S(\mathcal{S})$ **sféry** $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.
 $\{\{S(\mathcal{S}) = 4\pi R^2\}\}$
- 2** Dvojným integrálem najděte obsah části sféry $\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ležící ve válcovém prostoru $x^2 + y^2 \leq Ry$, $z \geq 0$.
 $\{\{(\pi - 2)R^2\}\}$
- 3** Dvojným integrálem určete obsah části **rotační kuželové plochy** $\mathcal{S}: x^2 + z^2 = y^2$ ohraničené válcovou plochou $x^2 + y^2 = a^2$.
 $\{\{2\pi a^2\}\}$
- 4** Užitím dvojného integrálu vyjádřete obsah části **rotačního paraboloidu** $\mathcal{S}: 2az = x^2 + y^2$ ohraničené rotační kuželovou plochou $z^2 = x^2 + y^2$.
 $\{\{\frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1)\pi a^2\}\}$
- 5** Dvojným integrálem vypočítejte obsah části roviny $\mathcal{S}: x + 2y + z = 1$ ležící uvnitř **eliptické válcové plochy** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
 $\{\{12\sqrt{6}\pi\}\}$
- 6** Dvojným integrálem určete obsah plochy $\mathcal{S}: x^2 + y^2 = z^2$ vyřezané plochou $y^2 + z^2 = a^2$.
 $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 7** Pomocí dvojného integrálu vyčíslete plošný obsah plochy $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid z = 1 - x^2 - y^2 \wedge z \geq 0\}$.
 $\{\{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\}\}$
- 8** Aplikací dvojného integrálu vypočítejte obsah části **hyperbolického paraboloidu** $z = xy$ (charakterizovaného v 4.9 **6b** na str. 81), přičemž $x > 0$, $y > 0$, jenž leží ve válcovém prostoru $x^2 + y^2 \leq 1$.
 $\{\{\frac{\sqrt{8}-1}{6}\pi\}\}$
- 9** Užitím dvojného integrálu určete těžiště $\mathbf{T} = (x_{\mathbf{T}}, y_{\mathbf{T}}, z_{\mathbf{T}})$ homogenní skořepiny \mathcal{S} , kterou je **polosféra** o rovnici $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
 $\{\{\mathbf{T} = (0, 0, \frac{R}{2})\}\}$
- 10** Pomocí dvojného integrálu vyjádřete kinetickou energii $E_z(\mathcal{S})$ homogenní skořepiny \mathcal{S} o plošné hustotě h , jíž je část pláště $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid z = \frac{b}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \leq b_1 \leq z \leq b_2 \leq b\}$ **rotační kužele**, která rotuje kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω .
 $\{\{E_z(\mathcal{S}) = \frac{\pi}{4}\omega^2 h \frac{b_2^4 - b_1^4}{b^4} R^3 \sqrt{R^2 + b^2}\}\}$
- 11** Aplikací dvojného integrálu stanovte moment setrvačnosti homogenní skořepiny \mathcal{S} vzhledem k ose z o plošné hustotě h , kde $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid z = b - \frac{b}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \leq b_1 \leq z \leq b_2 \leq b\}$.
 $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 12** Pomocí dvojného integrálu nalezněte hmotnost $H(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} , která je částí **rotačního paraboloidu** $2az = x^2 + y^2$ s plošnou hustotou $h = \lambda \cdot (x^2 + y^2 + a^2)$, jenž je ohraničen **rotační kuželovou plochou** $x^2 + y^2 = z^2$, $a, \lambda \in \mathbb{R}^+$.
 $\{\{H(\mathcal{S}) = 12\pi\lambda a^3\}\}$
- 13** Dvojným integrálem najděte hmotnost $H(\mathcal{S})$ skořepiny \mathcal{S} o plošné hustotě $h = \lambda \cdot xyz$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, kterou je část roviny $\mathcal{S}: x + y + z = a$ v 1. oktantu.
 $\{\{H(\mathcal{S}) = \frac{\sqrt{3}}{120}\lambda a^5\}\}$
- 14** Užitím dvojného integrálu vyjádřete hmotnost povrchu ∂T **čtyřstěnu** $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$ o plošné hustotě $h = \frac{\lambda}{(x+y+z)^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
 $\{\{H(\partial T) = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda(\sqrt{3} - 1)(1 + \ln 2)\}\}$

B) Parametrizace plochy. Plošný integrál skalární funkce neboli 1. druhu

- 15** Řešte zadání příkladu 8.2.20 na str. 209 s polosférou \mathcal{S} , je-li dáno zobrazení Φ , které vychází (viz str. 197) z **pravotočivých sférických zeměpisných souřadnic** (r, φ, ψ) , tj.

$$\Phi(\varphi, \psi) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi), \text{ kde } M = \{(\varphi, \psi) \in \mathbb{E}_2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

$\{\{\Phi$ plochu popisuje, neboť $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $\vec{n} = R^2 \cos \psi (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi)$, takže \vec{n} směřuje vzhůru (uvnitř \mathcal{S} vyjma $(0, 0, R)$ nebo je „na rovníku“ kolmý k ose z) a z vyjádření vektoru \vec{n} hned plyne, že Φ **není** parametrizace, neboť např. v bodech úsečky $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ z hranice ∂M obdélníka M , tj. už v nekonečně mnoha bodech (horní) strany obdélníka M je $\vec{n} = \vec{0}$, přičemž tuto úsečku zobrazí do „severního pólu“ $(0, 0, R)$, takže na ní **není** Φ těž prosté; $\Phi(\partial M)$ neuvádíme}}

- 16** Co je obrazem $\Phi(\partial M)$ hranice ∂M čtverce M z příkladu 8.4.3, v němž se M zobrazí na **anuloid**?
 $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 17** Na základě definice 8.3.2 na str. 214 rozhodněte, pro která R existuje plošný integrál $\iint_{\mathcal{S}} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$, je-li \mathcal{S} **sféra** se středem $\mathbf{S} = (0, 3, 0)$ a poloměrem R .
 $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 18** Cvičení **1** až **12** řešte plošným integrálem a při použití jiných než kartézských souřadnic (bez kartézské parametrizace).

- 19** Vypočítejte obsah plochy z příkladu 8.2.19, avšak pro parametrizaci Φ použijte cylindrické souřadnice.
 $\{\{\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, ku), (u, v) \in M = [0, 2a] \times [0, \pi]\}\}$
- 20** Dopačítejte obsah *anuloidu* z příkladu 8.4.3.
- 21** Vypočítejte obsah úseče *rotačního paraboloidu* z příkladu 8.1.9 na str. 195.
- 22** Pro skořepinu \mathcal{S} , jež je částí *kolmého šroubového konoidu – helikoidu* (Viz 8.2.17 a obr. 8.16 na str. 208), a má rovnici $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + v \vec{k}$, $(u, v) \in M = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, najděte **a**) hmotnost $H(\mathcal{S})$, má-li hustotu $h = \lambda \cdot z^4$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$; **b**) moment setrvačnosti $I_{xy}(\mathcal{S})$ vzhledem k souřadnicové rovině Oxy , je-li homogenní s hustotou h . $\{\{H(\mathcal{S}) = \frac{16}{5}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))\pi^5 \lambda; I_{xy}(\mathcal{S}) = \frac{4}{3}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))\pi^3 h\}\}$
- 23** Najděte hmotnost skořepiny o plošné hustotě $h = \lambda \cdot yz$, která je trojúhelníkem s vrcholy $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$, kde $a \in \mathbb{R}^+$. $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 24** Určete moment setrvačnosti homogenní skořepiny vzhledem k ose z o hmotnosti H , kterou je sféra se středem v počátku a poloměrem R . $\{\{\frac{2}{3}H \cdot R^2\}\}$
- 25** Vyjádřete kinetickou energii homogenní skořepiny \mathcal{S} o hmotnosti H , rotující kolem osy z konstantní úhlovou rychlostí ω , kdy skořepinou je plášť rotačního kužele s osou v ose z o poloměru R a výšce b . Nejprve množinově zapíšte \mathcal{S} . $\{\{\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \mid b^2(x^2 + y^2) = R^2 z^2 \wedge 0 < z < b\}, E_z(\mathcal{S}) = \frac{1}{4}\omega^2 H \cdot R^2\}\}$

C) Orientace plochy. Plošný integrál vektorové funkce neboli 2. druhu. Integrální věty

- 26** Uvažujte *Möbiův pás* \mathcal{S} z odstavce 8.2.16, nyní pro pohodlnější zápis výpočtu vyjádřený bodovým zobrazením
- $$\mathbf{X} = \Phi(u, v) = \left((R + u \cos \frac{v}{2}) \cos v, (R + u \cos \frac{v}{2}) \sin v, u \sin \frac{v}{2} \right), \quad (8.124)$$
- $(u, v) \in M = [-a, a] \times [0, 2\pi]$, $0 < a < R$. Určete tečný vektor $\vec{\Phi}'_u(\mathbf{X})$, resp. tečný vektor $\vec{\Phi}'_v(\mathbf{X})$ v libovolném bodě $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ u -křivce, resp. v -křivce pásu \mathcal{S} a pomocí nich pak normálový vektor $\vec{n}(\mathbf{X}) = \vec{\Phi}'_u(\mathbf{X}) \times \vec{\Phi}'_v(\mathbf{X})$, přičemž jeho výsledné souřadnice co nejvíce zjednodušte užitím vzorců pro goniometrické funkce. Výběrem vhodných parametrů u, v pro \vec{n} ověřte závěr ze zmíněného odstavce, že \mathcal{S} nelze orientovat. $\{\{\text{neuvádíme}\}\}$
- 27** Slepte si z papíru Möbiův pás. Odhadněte co se stane, když pás podélně rozstříhnete **a**) v polovině šířky; **b**) ve třetině šířky. Pak vše vyzkoušejte.
- 28** Orientovanou plochou (\mathcal{S}, \vec{n}^o) v oblasti $G \subseteq \mathbb{E}_3$ protéká kapalina, jejíž stacionární rychlostní pole (resp. vektor rychlosti) je \vec{f} . Určete objemové množství kapaliny, které za jednotku času proteče plochou \mathcal{S} (tj. tok $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$), jestliže
- \mathcal{S} je část roviny $x + y + z = 1$ v 1. oktantu orientovaná vektorem normály směřujícím do poloprostoru neobsahujícího počátek a $\vec{f} = 4\vec{i} - 3z\vec{j} - y\vec{k}$ $\{\{\frac{4}{3}\}\}$
 - \mathcal{S} je (horní) část *rotačního paraboloidu* $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $a \in \mathbb{R}^+$ ohraničená rovinou $z = 0$ a orientovaná polem jednotkových normálových vektorů plochy \vec{n}^o tak, že $\vec{n}^o \cdot \vec{k} > 0$, přičemž $\vec{f} = 2\vec{r}$, kde \vec{r} je rádiusvektor bodů $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ $\{\{3\pi\}\}$
 - \mathcal{S} je sféra se středem v počátku a poloměrem R orientovaná vnější normálou a $\vec{f} = \vec{r}$. Interpretujte výsledek $\{\{\mathcal{T} = 4\pi R^3 = S(\mathcal{S}) \cdot R; \text{tok rádiusvektoru sférou je součinem jejího povrchu a poloměru}\}\}$
 - \mathcal{S} je plášť kužele $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_2 \mid b^2(x^2 + y^2) \leq z^2 R^2 \wedge 0 \leq z \leq b\}$ orientovaný souhlasně se zvolenou parametrizací a $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$ $\{\{\frac{1}{10}\pi R^2 b(3R^2 - 4b^2)\}\}$
 - \mathcal{S} je celá vnější strana povrchu ∂T kužele z předešlé úlohy (tj. \mathcal{S} je orientovaná normálou ven). Použijte popř. *Gaussovu-Ostrogradského větu* $\{\{\frac{3}{10}\pi R^2 b(R^2 + 2b^2)\}\}$
 - \mathcal{S} je část roviny $2x + 3y + 3z = 6$ ležící v 1. oktantu, přičemž pro normálový vektor \vec{n} plochy a směr \vec{k} osy z platí $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ a $\vec{f} = (x, y, z)$ $\{\{9\}\}$
 - \mathcal{S} je trojúhelník určený body $A(1, 0, 1)$, $B(1, 3, 1)$, $C(0, 3, 1)$, přičemž $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ a $\vec{f} = (1, 3, 2y)$ $\{\{-9\}\}$
 - \mathcal{S} je celá vnější strana povrchu ∂T čtyřstěnu T s vrcholy $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $\vec{f} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. Výpočet proveďte co nejefektivněji $\{\{\text{Věta 8.6.2 dá hned } \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\vec{f}) = 0\}\}$
 - \mathcal{S} je dolní polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a úhel jejího normálového vektoru \vec{n} a směru \vec{k} osy z je tupý, přičemž $\vec{f} = 15y^2 z \vec{k}$ $\{\{-2\pi R^5\}\}$
 - \mathcal{S} je vnější strana uzavřené plochy $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$, kde $\mathcal{S}_1 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\mathcal{S}_2 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $\mathcal{S}_3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge z = 0$ a $\vec{f} = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Použijte Gaussovu-Ostrogradského větu $\{\{\frac{62}{5}\pi\}\}$
 - \mathcal{S} je vnější strana sféry se středem v počátku a poloměrem R , přičemž $\vec{f} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$. $\{\{\frac{12}{5}\pi R^5\}\}$
- 29** Plošným integrálem odvoďte vzorec pro objem koule o poloměru R , znáte-li obsah jejího povrchu.

30 Pomocí *Stokesovy věty* určete cirkulaci $C_{\mathcal{K}}(\vec{f})$ pole \vec{f} po (uzavřené) cestě \mathcal{K} , jestliže

- a) $\vec{f} = (x - y, y - z, z - x)$, \mathcal{K} je průnik *rotačního paraboloidu* $\mathcal{S}: z = 2(1 - x^2 - y^2)$ s rovinou $z = 0$, kde \mathcal{S} a \mathcal{K} jsou souhlasně orientované $\{\{\pi\}\}$
- b) $\vec{f} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, \mathcal{K} je elipsa vzniklá průnikem *rotační válcové plochy* $x^2 + y^2 = 9$ a roviny $x + z = 3$, kdy \mathcal{K} je orientovaná ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu z kladného směru osy x $\{\{-36\pi\}\}$
- c) $\vec{f} = (z, x + y, y)$, \mathcal{K} je průnik *sféry* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ s rovinou $x + y + z = 0$ a \mathcal{K} je souhlasně orientovaná s normálovým vektorem \vec{n} , jenž svírá ostrý úhel se směrem \vec{k} osy z $\{\{\sqrt{3}\pi\}\}$
- d) $\vec{f} = (x^2 + y^2, z^2, x^2)$, \mathcal{K} je hranice $\partial\mathcal{S}$ trojúhelníka \mathcal{S} s vrcholy $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ a orientace \mathcal{K} je souhlasná (Náčrtněte ji) s jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n}^o = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ roviny trojúhelníka. $\{\{2\}\}$

„Náš život není v minulosti
ani v budoucnosti
ani v přítomnosti,
náš život je v našem nitru.“
Jacques Prévert

Literatura

- [1] BRABEC, J.; HRŮZA, B. *Matematická analýza II*. Praha: SNTL/Alfa, 1986.
- [2] BRDIČKA, M.; SAMEK, L.; SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha: Academia, 2000.
- [3] BROŽOVÁ, E.; KITTLEROVÁ, M. *Sbírka příkladů z MATEMATIKY II*. Skriptum ČVUT v Praze FS, 2002.
- [4] BUDINSKÝ, B.; CHARVÁT, J. *Matematika II*. Praha: SNTL, 1990.
- [5] *Česká technická norma ČSN ISO 31-11 Veličiny a jednotky - část 11: Matematické znaky a značky používané ve fyzikálních vědách a v technice*. Praha: Český normalizační institut, 1999, 27s.
- [6] ČIPERA, S.; MACHALICKÝ, M. *Tématické celky pro přednášky z předmětu MATEMATIKA II*. Skriptum ČVUT v Praze FS, 1997.
- [7] ČUČKA, J.; CHRASTINOVÁ, M.; MINAŘÍKOVÁ, K. *Cvičení z matematické analýzy II*. Skriptum VUT v Brně FE, 1983.
- [8] DUBČÁK, F. *Cvičení z matematiky*. Skriptum VUT v Brně FT ve Zlíně, 1987.
- [9] FIALKA, M. *Diferenciální počet funkcí více proměnných s aplikacemi*. Skriptum UTB ve Zlíně FT, 2008 (Značíme jej **DP**).
- [10] FIALKA, M. *Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi*. Skriptum UTB ve Zlíně FT, 2008 (Značíme jej **IP**).
- [11] FINNEY, R.L.; THOMAS, G.B. Jr. *Calculus*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [12] GILLMAN, L.; McDOWELL, R. *Matematická analýza*. Přel. Jiří Adámek. 2. nezměněné vydání. Praha: SNTL, 1983.
- [13] GREBENČA, M.K.; NOVOSELOV, S.I. *Učebnice matematické analýzy II*. Přel. z ruského originálu z r. 1953. Praha: NČAV, 1955.
- [14] HAMHALTER, J.; TIŠER, J. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Skriptum ČVUT v Praze FEL, 1999.
- [15] HAMHALTER, J.; TIŠER, J. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Skriptum ČVUT v Praze FEL, 1998.
- [16] HANUŠ, J.; CHUDÝ, J. *Matematika III pro čtyřleté studium*. Skriptum ČVUT v Praze FS, 1984.
- [17] HAVEL, V.; HOLENDÁ, J. *Lineární algebra*. Praha: SNTL/Alfa, 1984.
- [18] HRŮZA, B.; STUDNIČKA, I. *Matematická analýza II*. Skriptum VUT v Brně FE, 1983.
- [19] JARNÍK, V. *Diferenciální počet II*. Praha: Academia, 1976.
- [20] JIRÁSEK, F.; ČIPERA, S.; VACEK, M. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*. Praha: SNTL, 1989.
- [21] KAŇKA, M.; HENZLER, J. *Matematická analýza – Matematika B pro VŠE*. Skriptum VŠE v Praze FIS, 1995.
- [22] KLÍČ, A.; DUBCOVÁ, M. *Základy tenzorového počtu s aplikacemi*. Skriptum VŠCHT Praha FCHT a FCHI, 1998.
- [23] KOLDA, S.; MACHAČOVÁ, L. *Matematika II*. Skriptum Univerzity Pardubice FES, 1995.
- [24] KOLDA, S.; MACHAČOVÁ, L.; PRACHAŘ, O. *Cvičebnice z matematiky II*. Skriptum Univerzity Pardubice FES, 1995.
- [25] KOLDA, S.; KRAJŇÁKOVÁ, D.; KIMLA, A. *Matematika pro chemiky II*. Praha: SNTL/Alfa, 1990.
- [26] KRAJŇÁKOVÁ, D.; MÍČKA, J.; MACHAČOVÁ, L. *Zbierka úloh z matematiky*. Bratislava: Alfa/SNTL, 1988.
- [27] KRUPKOVÁ, V. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných – cvičení*. Skriptum VUT v Brně FEI (nyní FEKT), 1999.

- [28] KŘENEK, J.; OSTRAVSKÝ, J. *Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné s aplikacemi v ekonomii*. Skriptum UTB ve Zlíně FT, 2004.
- [29] *Názvy a značky školské matematiky*. Praha: SPN, 1988.
- [30] NEČAS, J. a kol. *Aplikovaná matematika*. Encyklopedie aplikované matematiky. Praha: SNTL, 1988.
- [31] NEUSTUPA, J. *Matematika II*. Skriptum ČVUT v Praze FS, 2003.
- [32] NOVÁK, L.; MIKEŠ, J.; RACHŮNEK, L.; ZEDNÍK, J. *Algebra a geometrie*. Skriptum UTB ve Zlíně FT, 2003.
- [33] PULTR, A. *Podprostory euklidovských prostorů*. Praha: SNTL, 1986.
- [34] REKTORYS, K. aj. *Přehled užití matematiky I, II*. Praha: Prometheus, 2003, 1995.
- [35] ROZENSKÝ, Z.; SCHMIDTMAYER, J.; VEIT, J. *Úlohy z matematiky II. díl*. Skriptum ČVUT v Praze FEL, 1965.
- [36] RYBIČKA, J. *L^AT_EX pro začátečníky*. Brno: KONVOJ, 2003.
- [37] SIKORSKI, R. *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Přel. z polštiny. Praha: Academia, 1973.
- [38] SUCHOMEL, J.; PLAČKOVÁ, J.; KNOFLÍČEK, F. *Matematika II. Integrální počet*. Skriptum VUT v Brně FS, 1985.
- [39] SZABÓ, I. *Mechanika tuhých těles a kapalin*. Praha: SNTL, 1967.
- [40] ŠKRÁŠEK, J.; TICHÝ, Z. *Základy aplikované matematiky I, II*. Praha: SNTL, 1983, 1986.
- [41] TOMICA, R. *Cvičení z matematiky II*. Skriptum VUT v Brně FS, 1974.
- [42] ZEDNÍK, J. *Lineární algebra zaměřená na geometrii a ekonomii*. Skriptum UTB ve Zlíně, 2003.
- [43] ZINDULKA, O. *Vektorová pole*. Skriptum ČVUT v Praze FSv, 1999.

Rejstřík

- aditivita
 integrálu, 151
 integrálu křivkového vzhledem k oboru integrace, 177, 180
 integrálu plošného vzhledem k oboru integrace, 215, 221
 míry, 193
 anuloid, 54, 107, 216, 232
 aplikace fyzikální, 161, 165, 178, 194, 216
 asteroida, 175, 189
 axióm
 definitnosti, 34
 definitnosti pozitivní, 20, 34
 homogenity, 34
 nerovnost trojúhelníková, 30, 34
 symetrie, 30
 totožnosti, 30
 axiómy
 grupy komutativní, 15
 násobení skalárem, 16
 normy, 34
 prostoru konvergenčního, 43
 báze, 16
 ekvivalentní, 25
 ortonormální, 16, 21
 přirozená, 16
 standardní, 16, 86, 98, 99
 bod, 19, 30
 N , 114
 hraniční, 48, 122, 124
 hromadný, 48, 68, 122
 izolovaný, 49
 křivky koncový, 171
 křivky počáteční, 171
 nespojitosti
 neodstranitelné, 78
 odstranitelné, 75
 nevlastní ∞ , 75, 84
 podezřelý z extrému, 123
 přírůstkový, 86, 88, 93, 118, 120
 regulární, 114, 171, 173, 175, 198, 200
 sedlový, 60, 122
 singulární, 114, 139, 140, 171, 175, 198, 210
 singulární (soustavy souřadnic), 162
 stacionární, 105, 122, 138
 vnější, 48
 vnitřní, 48
 cesta, 175, 179, 180
 jednoduchá, 175
 opačná, 175
 uzavřená, 175
 cirkulace, 181, 229
 cykloida, 189
 čára, 171
 část listu, 204
 orientovaného, 206
 číslo vlastní (matice), 126
 čtverec souřadnicový, 201
 čtyřstěn, 167, 169, 232
 deformace elastická, 63, 71, 170, 196
 dělení intervalu, 144, 146
 délka elipsy, 189
 délka kružnice, 189
 délka křivky, 173, 175
 délka vektoru, 14
 délka vektoru normálového, plochy, 214
 derivace
 funkce
 parciální, 86
 parciální spojitě prodlouženy na hranici, 96
 složené, 94, 141
 směrová, 98
 ve směru, 98, 101
 vektorové, 98
 logaritmická, 95
 množiny, 50, 68
 podle (jednotkového vektoru) vnější normály, 141
 vyšší, 95
 v bodě, 98
 zobrazení, 198
 derivace funkce parciální, 98
 determinant Jacobiův, 129, 156
 diagram termodynamický, 19
 diagram vrstevnicový, 59
 diferenciál parciální, 90
 diferenciál totální, 88, 90, 186
 diferenciál totální k -tý, 118
 dimenze, 16
 disipace energie, 185
 divergence pole, 108, 225
 doplněk algebraický prvku, 26
 element
 (obsahu) plochy grafu funkce, 195, 203
 (obsahu) plochy parametrizované, 203, 214
 hmotnosti, 161, 165, 178, 195
 objemu, 158
 oblouku, 174
 oblouku neorientovaný, 176
 oblouku orientovaný, 179
 obsahu, 158
 plochy, 203
 plochy neorientovaný, 203
 plochy orientované vektorový, 220
 plochy plošný, 195, 214
 plochy plošný skalární, 203
 práce, 179
 skalární plochy neorientované, 214
 veličiny, 158
 elipsoid, 81, 135, 166
 elipsoid trojosý, 116, 169
 entier (charakteristika) reálného čísla, 81
 extrém globální, 121
 extrém lokální, 121
 extrém vázaný, 124, 128
 forma diferenciální, 158
 Pfaffova, 186
 forma kvadratická, 125, 142
 forma lineární, 103, 118
 funkce
 algebraická, 66
 bodová, 55, 63
 diferencovatelná, 88
 spojitě k -krát, 96
 diferencovatelná k -krát, 117
 Dirichletova, 148
 elementární, 66, 73, 81, 148
 explicitní, 113
 harmonická, 109, 141
 hladká, 192
 hladká k -tého řádu, 96
 charakteristika, 81, 84
 implicitní, 113
 integrovatelná, 147, 176, 177, 180, 214, 215, 219
 kmenová, 186
 konstantní po částech, 81
 Lagrangeova, 131
 lineární, 89, 92
 na množině, 58
 nekonečně malá, 88, 119
 obecná mocnina, 66
 ohraničená, 59, 75, 147
 potenciální, 186
 prázdná, 58
 prodloužená spojitě, 78
 prodloužitelná spojitě, 75
 reálná, 58
 signum, 66, 73, 140
 složená, 65
 souřadnicové, 64
 spojitá, 68

- stejnoměrně, 74, 75, 203
 spojitá na množině, 68
 spojitá v bodě, 68
 spojitá v bodě vzhledem
 k množině, 69
 třídy, 91
 třídy C , 73
 třídy C^k , 67, 96
 vektorová, 55, 63
 funkcionál, 67
- gradient funkce, 104
 gradient skalárního pole, 99, 185
 graf funkce, 58
 graf funkce kartézský, 198
- helikoid, 208, 218, 233
 hladina funkce, 103, 104, 116
 hladina pole, 97, 104
 hodnota funkce střední, 151, 189
 hrana maxima, 81
 hranice
 hladká není, 134
 množiny, 50
 oblasti v \mathbb{E}_3 orientovaná
 kladně, 213
 tělesa orientovaná kladně, 213
 tělesa orientovaná vektorem
 normálovým vnějším, 213
 tělesa orientovaná záporně,
 213
 úsek hladký, 133
 hrot hranice, 134
 hyperboloid jednodílný rotační,
 224
- charakteristika (entier) reálného
 čísla, 81
 chyba aproximace, 120
- identita Lagrangeova, 27, 203
 index sčítací, 22
 infimum, 35
 integrál
 k -rozměrný ($k \leq n$) v \mathbb{E}_n , 144
 n -rozměrný v \mathbb{E}_n , 144
 dvojnásobný, 153
 dvojný, 147, 192
 eliptický úplný 2. druhu, 189
 funkce vektorové, 98
 křivkový, 144
 funkce skalární, 176
 funkce vektorové, 180
 Kurzweilův-Henstockův, 37
 Lebesgueův, 36, 67
 plošný, 144
 2. druhu, úplný klasický
 tvar, 220
 funkce skalární, 214
 funkce vektorové, 219
- funkce vektorové ve tvaru
 vnějších součinů diferen-
 ciálů, 220
 Riemannův, 36
 totálního diferenciálu, 186
 trojnásobný, 162
 trojný, 161
 vektorový, 227
 integrovatelnost absolutní, 36
 interpretace fyzikální, 14, 63, 71,
 72, 103–105, 108, 110,
 181, 216, 219, 226, 229,
 230
 interval n -rozměrný, 47, 144
 invariant, 24, 91, 105, 112
 euklidovský, 32
 invariantnost
 cirkulace, 181
 Gaussových koeficientů, 204
 integrálu plošného vzhledem
 k neinjektivnosti a ne-
 regularitě zobrazení, 211,
 221
 integrálu vzhledem ke změně
 hodnot, 151, 178, 216
 integrálu vzhledem k parame-
 trizaci, 176, 215
 izokřivka, 59, 104
 izoplocha, 59, 97, 103, 104, 116,
 140, 195
- jacobíán, jakobián, 129, 156
 jádro obrazce, 201
 jehlan čtyřboký pravidelný, 81
- kardioida (srdcovka), 184
 klobouk Gaussův, 81, 168
 klotoida, 114
 koeficienty Gaussovy, 204
 koeficienty Lagrangeovy, 131
 kolmost vektorů, 21
 kompaktní, 50
 konoid Plückerův, 78, 88, 136
 konoid šroubový kolmý, 208, 218,
 233
 konstantní hladina funkce, 59, 103
 konvergence
 posloupnosti bodů v \mathbb{E}_n , 44
 stejnoměrná (funkce), 77
 stejnoměrná řady, 36
 kosinus směrový vektoru, 22
 kóta křivky průnikové, 59
 kóta vrstevnice, 59, 104
 koule n -rozměrná, 42
 kritérium konzervativnosti pole,
 107
 Kroneckerovo delta, 23
 kružnice meridiánová, 210, 216
 krychle n -rozměrná, 47
 křivka, 54
 u -křivka, 197
- v -křivka, 196
 Gaussova, 81
 hraniční, 152
 vnitřní, vnější, 184, 229
 jako varieta, 133
 jednoduchá, 107
 jednoduchá hladká, 171
 jednoduchá po částech
 hladká, 175
 konvexní, 119
 krajní, plochy, 206
 orientovaná
 souhlasně, nesouhlasně
 s parametrizací, 172
 průniková (řezu), 59
 regulární třídy C^k , 104
 rovinná, 104, 133
 řídicí plochy válcové, 212
 souřadnicová, 163, 197
 uzavřená, 107, 171, 175
 hladká jednoduchá, 171
 orientovaná, 175
 orientovaná kladně, zá-
 porně, 183
 Vivianiho, 194
 vnitřní, vnější, 152
 kužel rotační, 169, 232
 kvádr n -rozměrný, 47, 144
 kvádr souřadnicový, 186
- láhev Kleinova, 207
 lemniskáta Bernoulliho, 114, 212
 lemniskáta kosá, 167
 lichoběžník křivočarý, 152
 limita
 dvojná, 76, 77
 dvojnásobná, 77
 funkce, 69
 nevlastní, 69
 posloupnosti, 44
 postupná, 77
 vektorové funkce, 71
 vektorového pole, 71
 zobrazení, 69
- lineál, 15, 16, 34
 linearita integrálu, 150, 178, 216
 list, 198
 hladký, 198
 jednoduchý
 hladký, 206
 orientovaný, 200
 opačně, 200, 206
 souhlasně, nesouhlasně
 s okrajem, 201
 souhlasně, nesouhlasně
 s parametrizací, 200
 souvislý jednoduše, 198
 list Descartesův, 139
 listy
 přilehlé či přilepené, 205

- přilehlé orientované souhlasné, 205
v podstatě se nepřekrývající, 193
- matice, 23, 67
diagonální, 126
Hessova, 125, 142
Jacobiova, 129, 156, 210
Jacobiova, parametrizace, 197
jednotková, 23
kontrakce, 64
ortogonální, 25
- maximum, minimum funkce na množině, 121
- metoda
gradientní, 129
iterační zobecněná, 129
jacobíanu, 131
Lagrangeova, 131
Lagrangeových koeficientů, 131
Newtonova-Raphsonova tečen, 129
řezů, 59
sečen, 129
vloženého parametru, 129
- metrika, 30
euklidovská, 14, 31, 41
kubická, 32, 47
kvadratická, 36
maximová, 36
oktaedrická, 32, 57
sférická, 31
stejnoměrná, 36
supremální, 36
- metriky ekvivalentní, 33, 47
- míra
množiny dvojrozměrná, 149, 192
množiny plošná, 192, 193
množiny plošná na listu, 204
množiny plošná na ploše, 206
množiny trojrozměrná, 162
- množina
bodová, 30
derivovaná, 50
elementární, 152, 154, 166
vzhledem k ose, 61, 152
hustá, 50
izolovaná (diskrétní), 50
kompaktní (kompakt), 50
konvexní, 55
měřitelná, 149
měřitelná plošně (na ploše vícelisté), 204
míry nula, 149
míry plošné nula, 204, 211, 221
nejvýše spočetná, 44, 122
nespočetná, 44
nosná, 16, 30, 32
obojetná, 50
ohraničená, 45, 50
otevřená, 50
roztíná prostor, 53
souvislá, 53, 74, 75, 171
lineárně, 54
obloukově, 171
spočetná, 37, 44
těleso reálných čísel, 15
uzavřená, 50
- model
personifikovaný, 25
model personifikovaný, 182, 201
model prostoru, 16
monotonie integrálu, 151, 178, 216
motivace fyzikální, 13, 146, 175, 179, 185, 191, 213
- nadplocha, 115, 195
regulární třídy C^k definovaná implicitně, 104
v \mathbb{E}_n , 129
- nadrovina tečná, 93, 104
násobek vektoru skalární, 15
nejvýše spočetně mnoho, 44
- nerovnost
Hölderova, 33
integrální, 36
Minkovského, 33
integrální, 36
Schwarzova, 34, 40
integrální, 36
trojúhelníková, 30, 34
- nezávislost integrálu křivkového na cestě, 185, 189
- norma
gradientu, 100
prvku, 34
vektoru, 14
- normála
grafu, 92
plochy, 92, 200
- nosič prostoru, 16, 18
- obdélník souřadnicový, 148, 192
objem intervalu n -rozměrný, 145, 166
- oblast, 54
regulární, 149, 154, 212
uzavřená, 213
souvislá jednoduše, 106, 107, 111, 183, 184, 189, 213, 231
souvislá vícenásobně, 152, 184, 213
uzavřená, 54
- oblouk, 171, 174
obor definiční funkce, 58
obor hodnot funkce, 58
- obor integrace elementární, 152, 166
obor parametrů, 198
obraz množiny, 62
obrazec, 153, 184
souvislý jednoduše, 184
souvislý vícenásobně, 184
- obsah (plošná míra)
množiny na listu, 204
plochy, 192, 201, 215
grafu funkce, 192, 215
válcové, 177
- obvod kruhu, 189
okno Vivianiho, 194
- okolí
bodů, 41
kubické (krychlové), 47
kvádrové, 47, 76
sférické, 41
vzhledem k množině, 69
čtvercové, 42
kruhové, 42
redukované, 41
bodů vzhledem k množině, 69
- okraj
křivky, 172
listu, 198
listu s listem souhlasně orientovaný, 201
plochy dvojlisté, 205
plochy vícelisté, 206
plochy vícelisté orientovaný, 206
- operátor, 67, 100
biharmonický, 138
d'Alembertův, 139
diferenciální, 67
divergence, 108, 225
gradient, 99
Laplaceův, 109, 227
lineární, 67
maticový, 67
nabla, Hamiltonův, 99
rotace, 106, 225
směrové derivace, 119
- orientace
grafu funkce, 199
grafu funkce je, není indukovaná parametrizací, 199
grafu souhlasná, nesouhlasná s parametrizací kartézskou, 199
hranice tělesa kladná, 213
hranice tělesa orientovaná vektorem normálovým vnějším, 213
hranice tělesa vektorem normálovým vnitřním, 213
hranice tělesa záporná, 213

- křivky, 172
 listu, 200
 listu a okraje, 201
 listů přilehlých souhlasná, 205
 oblasti v \mathbb{E}_3 kladná, 213
 plochy, 205, 207
 uzavřené kladná, též vektorem normály vnější apod., 212
 uzavřené záporná, též vektorem normály vnitřní apod., 212
 tělesa kladná, 213
 orientace báze
 vektorové, 28
 vektorového prostoru, 25
 osa reálná, 32
 osa reálná rozšířená, 75
 osa soustavy $Oxyz$, 21
 označení polokartézské, 98, 99

 parabola kubická, 114
 paraboloid hyperbolický, 60, 81, 126, 167, 232
 paraboloid rotační, 81, 126, 135, 167, 217, 224, 232, 233
 parametr, 84
 parametrizace, 84
 ekvivalentní, 173
 grafu funkce kartézská, 198
 křivky, 171
 listu (jednoduchá), 198
 plochy, 198
 parametrizace křivky, 131
 pás Möbiův, 207, 233
 plocha
 dvojstranná, 200, 207
 ekvipotenciální, 103, 105
 grafu funkce, 199
 hladina skalárního pole, 116
 hladká, 104
 grafu funkce, 192
 hraniční, 213
 jako varieta, 133
 jednoduchá, 74, 195
 hladká, 198, 206
 po částech hladká (dvojlistá), 205
 po částech hladká neboli vícelistá, 205
 jednostranná, 207
 kulová n -rozměrná, 42
 kulová – sféra, 140
 kuželová eliptická, 169
 kuželová rotační, 81, 232
 orientovaná, 207
 opačně, 207
 souhlasně, nesouhlasně s parametrizací, 200
 orientovatelná, 206
 přímková, 78
 regulární třídy C^1 definovaná implicitně, 200
 regulární třídy C^k , 104, 140, 195
 definovaná implicitně, 104
 řeckého amfiteátru, 81
 střechy sedlové, 81
 uzavřená, 206
 dvojlistá, 205
 orientovaná kladně, záporně, 212
 orientovaná normálou vně neboli vnější; dovnitř neboli vnitřní, 212
 orientovaná směrem ven; dovnitř, 212
 orientovaná vektorem normálovým vnějším; vnitřním, 212
 vícelistá, 206
 válcová, 130, 177, 189
 rotační, 231
 válcová eliptická, 232
 válcová parabolická, 66, 113, 169
 válcová rotační, 169, 234
 Vivianiho, 194
 vulkánu, 81
 plocha kuželová rotační, 62
 počátek soustavy souřadnic, 19
 podlist listu, 204
 podlist orientovaný, 206, 219
 podmínka nutná konzervativnosti pole, 106, 190
 podmnožina vlastní, 30
 podposloupnost, 43
 podprostor prostoru, 30
 pojem geometrický, 172, 198, 205
 pojem lokální, 105, 112
 pojem topologický, 30, 48, 53, 71
 pole
 disipativní, 111, 185
 elektrostatické intenzity, 225
 gradientní, 100, 102, 189
 gravitační intenzity, 225
 gravitační Newtonovo, 187
 harmonické, 109
 homogenní, 97
 konstantní, 219
 konzervativní, 106, 111, 185, 189, 231
 Laplaceovo (harmonické), 109, 139
 magnetické intenzity, 138, 190
 nerotační, 231
 nestacionární
 skalární, 107
 vektorové (rychlosti), 105
 nestlačitelné, 108, 227
 nevírové, 111, 186, 230, 231
 nezřídlové, 227
 orientující, křivky, 173
 potenciální, 106, 111, 185, 231
 rotační (vírové), 111
 rovinné, 98
 rychlostí, 219
 rychlostní, 105, 168, 219
 silové, 64
 skalární, 97, 105
 stacionární, 97, 110, 219
 tíhové, 189
 vektorové, 63, 64, 97, 105, 179
 vektorové nezřídlové, 108
 vektorů normálových, 200, 222
 vektorů tečných, 172
 polonormála listu, 212
 polopřímka, 48, 98
 polosféra, 232
 polotečna křivky, 100
 polyedr, 192
 polygon, 54, 150, 178, 192
 polynom
 charakteristický
 matice, 126
 Maclaurinův, 120
 Taylorův, 120
 posloupnost
 bodů, 43
 číselná, 43
 klesající, 49
 ohraničená, 45
 divergentní, 44
 konstantní, 44
 konvergentní, 44
 normální, 147, 161, 176, 214, 219
 nulová, 44, 74, 147
 ohraničená, 45
 prostá, 44
 vybraná, 43
 potenciál, 106, 189
 potenciál gravitační vrstvy jednoduché, 218
 potenciál Newtonův pole silového, 188
 pravidlo pravé ruky, 25, 201, 229
 pravidlo řetězové, 94
 prodloužitelnost funkce spojitá, 75
 prostor
 afinní, 18
 aritmetický, 19
 Banachův, 37
 bodově vektorový, 18
 bodový, 14, 18
 euklidovský, 18, 20
 aritmetický, 31
 rozšířený, 75
 funkcí $C^k(M)$, 96

- funkcionální, 18, 35
- Hammingův, 37
- Hilbertův, 18, 37
- kompaktní, 72
- konvergenční, 68
- lineární, 15, 16, 34, 38
 - aritmetický, 16
 - funkcí, 17, 96
 - obecný, 16
- metrický, 30
 - funkcí lebesgueovsky integrovatelných, 36
 - ohraničený, 56
 - příklady, 32
 - souvislý, 53, 171
 - souvislý obloukově, 171
- normovaný, 34, 37
 - funkcí, 67
- prehilbertovský, 17
- tečný, 132
- topologický, 30
- unitární, 17, 37
- válcový rotační, 168, 169
- vektorový, 16
 - aritmetický, 19, 30, 31
 - euklidovský, 17
 - vnořený, 30
- prostory homeomorfní, 71
- prostory izometrické, 32
- prstenec, 216
- průměr intervalu, 145, 166
- průměr množiny, 50, 214
- průměr plochy, 202, 219
- průmět vektoru pravouhlý, 22, 64, 102, 219, 220, 228, 230
- prvek normovaný, 39
- prvek okrajový, 201
- přímka, 48
- přírůstek funkce, 88
- pseudosféra, 84

- rádusvektor, 19, 218
- realizace prostoru, 16
- reologie, 144
- rotace pole, 110, 225
- rovina tečná plochy, 91, 92, 116, 196, 198
- rovnice
 - diferenciální exaktní, 186
 - ekvivalentní, 113
 - kontinuity, 108, 227
 - Laplaceova, 96, 110, 141, 227
 - Maxwellovy, 139
 - nestlačitelnosti, 108
 - operátorová, 67
 - vektorová nelineární, 129
 - vlnová, 139
- rovnoběžnost (kolineárnost) vektorů, 21
- rovnost definitornická, 17

- rozklad
 - listu, 206
 - plochy
 - orientovaný, 206
- rozklad plochy, 206
- rozšíření funkce, 65, 148, 153, 192
- rozšíření zobrazení, 30, 65, 197
- rozvoj Laplaceův, 26

- sedlo funkce, 60, 122
- sféra, 231, 232
- sféry, 234
- schéma důsledků funkce spojitě diferencovatelné, 101
- schéma o klasifikaci bodů v \mathbb{E}_n , 49
- schéma testovací konzervativnosti pole, 111
- singularita nepodstatná, 171, 198, 210
- singularita pole, 109, 110
- síť čtvercová řádu k , 201
- síť pravouhlá, 146
- skalár, 15
- skořepina, 196
- sloup vinutý, 207
- složka pravouhlá rádusvektoru, 22
- směr, 14
- smysl otáčení kladný, 86
- součet
 - integrální, 147, 161, 193, 219
 - křivek orientovaných, 175
 - listů orientovaných, 206
 - listů přilehlých, 205
- součin
 - skalární, 18, 20, 38
 - integrální, 37
 - kanonický, 31
 - standardní, 16, 21, 31
 - smíšený, 27
 - vektorový, 26
 - vnější diferenciálů, 220
- souřadnice
 - bodu, 19, 31
 - vnitřní, 64
 - cylindrické, 163
 - kartézské, 21, 163
 - kontravariantní, 19
 - kovariantní, 19
 - křivočaré, 163, 197
 - polární, 158, 163
 - zobecněné, 212
 - polární zobecněné, 160
 - přímočaré, 163
 - sférické, 164
 - vektoru
 - kontravariantní, 24
 - kovariantní, 24
 - zeměpisné sférické, 197, 232
 - zobrazení, 63
- soustava rovnic nelineárních, 129

- soustava souřadnic
 - cylindrická pravotočivá, 163
 - kartézská, 163
 - kartézská pravotočivá, 25, 97
 - křivočará, 163
 - ortogonální, 163
 - lineárních, 19
 - polárních, 158
 - přímočarých, 19, 163
 - sférická pravotočivá, 164
 - zeměpisná sférická, 197
- souvislost oblouková, 171
- spád
 - funkce, 105
 - plochy, 105
 - pole skalárního, 105
- spočetně mnoho, 37, 44, 51
- spojitost
 - funkce, 68
 - stejněměrná, 71
 - vektorové funkce, 71
 - vektorového pole, 71
 - zobrazení, 68
- strana plochy, 200
- střecha sedlová, 81, 102, 207
- supremum funkce, 59, 142
- supremum množiny, 35, 202
- systém
 - disipativní, 185
 - funkcí ortogonální, 38
 - funkcí ortonormální, 39
 - funkcí úplný, 38
 - konzervativní, 185
 - kosinů, 39
 - sinů, 39

- šroubovice
 - kuželová, 177
 - pravotočivá, 174, 189
 - pravotočivá dvojité, 174

- tabulka základních operací teorie pole, 112
- těleso, 154, 213
 - souvislé jednoduše, 213
 - souvislé vícenásobně, 213
- těleso platónské dokonalé, 33, 57
- tok, 181, 219, 220, 229
- topologie, 30, 107, 182
- torus, 216
- trajektorie, 175
- transformace lineární, 64
- transformace souřadnic vektoru, 23
- translace bodu, 15
- translace prostoru, 15
- trojhran pravotočivý, 163
- trojúhelník sférický pravouhlý, 222
- tvrzení o neexistenci limity, 73

- tvzení o nejvýše spočetné množině ostrých lokálních extrémů, 122
- tvzení o podmnožině množiny měřitelné, 148
- tvzení praktická o limitách (vč. postupných), 77
- úhel
- konvexní, 20, 22
 - nulový, 199
 - ostrý, 199
 - přímý, 199
 - směrový přímky, 86
 - směrový vektoru, 22
 - tupý, 199
 - vektorů, 20
- úseč kulová, 169
- úseč paraboloidu rotačního, 169
- úsečka, 48
- uzávěr množiny, 50, 205
- válec eliptický, 169
- válec kosý, 219
- válec rotační, 137
- varieta, 63, 133, 158, 207, 216
- vektor, 19
- aritmetický, 16, 31
 - báze lokální, 163
 - báze lokální jednotkový, 163
 - geometrický, 14
 - jednotkový, 21, 22
 - klouzavý, 14
 - normálový grafu funkce, 92
 - normálový hladiny pole, 104
 - normálový plochy (listu), 200
 - normálový plochy grafu funkce, 195, 200
 - normálový plochy regulární, 116
 - normály pole, 104
 - normály vnější, 141
 - normály vnější, křivky, 181
 - normály vnější, plochy, 212
 - normály vnitřní, plochy, 212
 - nulový, 14, 16
 - posunutí, 14
 - přímky směrový, 92
 - přírůstkový, 88, 118, 120, 132
 - směrový tečen, 91
 - souřadnicový, 89, 98
 - symbolický, 99
 - tečný
 - křivky, 170, 172, 197
 - plochy, 196, 200 - tečný křivky, 131
 - vázaný, 14, 18, 64
 - ve tvaru polokartézském, 26
 - volný, 14, 18
- vektory
- kolineární, 14
 - souhlasně, 21
 - komplanární, 14
 - lineárně nezávislé, 26
 - lineárně závislé, 26
 - rovnoběžné
 - souhlasně, 14, 21, 98 - složkové, 22
 - souřadnicové, 19, 86, 87, 99
- věta 1. a 2. o přechodu k limitám funkcí vyhovujících nerovnostem, 76
- věta Bolzano–Weierstrassova, 46
- věta Bolzanova o mezihodnotě 1. a 2., 74
- věta Fermatova, 123
- věta Fubiniova pro integrál dvojný, 153
- věta Fubiniova pro integrál trojný, 162
- věta Gaussova–Ostrogradského, 225, 233
- věta Greenova, 183, 230
- věta Heine–Cantorova, 75
- věta Heinova o limitě, 70
- věta Heinova o spojitosti a limitě, 70
- věta Jordanova v \mathbb{E}_2 , 107
- věta Jordanova v \mathbb{E}_2 , 182
- věta Jordanova v \mathbb{E}_3 , 212
- věta Lagrangeova o střední hodnotě, 120
- věta o aplikacích skořepiny, 194
- věta o derivacích směrových funkce diferencovatelné, 100
- věta o derivacích vyšších funkce složené, 96
- věta o diferenciálu a směrových derivacích funkce, 103
- věta o ekvivalenci konvergenčí posloupností, 44
- věta o ekvivalenci nezávislosti integrálu a nulové cirkulace, 185
- věta o ekvivalenci okolí v \mathbb{E}_n , 47
- věta o ekvivalenci pole konzervativního a nulové cirkulace v něm, 186
- věta o funkci implicitní dvou proměnných, 116
- věta o funkci implicitní jedné proměnné, 113
- věta o fyzikální interpretaci rotace, 230
- věta o gradientu a směrové derivaci funkce diferencovatelné, 102
- věta o invariantnosti 1. diferenciálu, 91
- věta o invariantnosti integrálu vzhledem k množině míry
- nula, 151
- věta o kompaktu, 52
- věta o konzervativnosti a nevírovosti pole v oblasti jednoduše souvislé, 111
- věta o kritériu diferencovatelnosti, 90
- věta o kritériu diferencovatelnosti na množině, 90
- věta o kritériu existence integrálu n -rozměrného, 150
- věta o kritériu existence integrálu křivkového, 177
- věta o kritériu existence integrálu plošného, 215
- věta o kritériu existence vázaných lokálních extrémů, 132
- věta o kritériu neexistence extrému, 123
- věta o kritériu ostrého lokálního extrému, 124
- věta o limitě a hromadném bodě, 49
- věta o limitě podle souřadnic, 45
- věta o limitě složeného zobrazení, 70
- věta o limitě souřadnic zobrazení, 72
- věta o lokální ohraničenosti funkce, 75
- věta o matici přechodu, 23
- věta o měřitelnosti elementární množiny, 152
- věta o měřitelnosti množiny, 149
- věta o množině míry nula, 149
- věta o neexistenci zobrazení spojitého i prostého prostoru euklidovského dimenze vyšší do nižší, 73
- věta o nejvýše jedné limitě, 45
- věta o normálách ploch, 200
- věta o nutné podmínce diferencovatelnosti, 89
- věta o nutné podmínce vázaného lokálního extrému metodou Lagrangeových koeficientů, 131
- věta o oblasti a polygonu, 54
- věta o oboru hodnot funkce, 75
- věta o obsahu plochy grafu, 192
- věta o ohraničenosti konvergentních posloupností, 46
- věta o operacích s limitami, 76
- věta o orientovatelnosti plochy uzavřené, 207
- věta o potenciálu pole konzervativního, 185
- věta o potenciálu pole vektorového, 106
- věta o řetězovém pravidle, 94

- věta o souvislé množině v \mathbb{E}_1 , 53
 věta o spojitosti elem. funkcí, 73
 věta o spojitosti stejnoměrné, 74
 věta o spojitosti zobrazení na množině, 68
 věta o spojitosti zúžení a rozšíření, 73
 věta o spojitých souřadnicích zobrazení, 71
 věta o spojitých zobrazeních kompaktní 1. a 2., 72
 věta o střední hodnotě integrálního počtu, 146, 151, 189
 věta o tečné nadrovině grafu v \mathbb{E}_{n+1} , 93
 věta o topologické různosti prostorů euklidovských dimenze různé, 73
 věta o transformaci integrálu, 157
 věta o určení kmenové funkce, 186
 věta o určení potenciálu pole konzervativního, 186
 věta o vybrané posloupnosti, 45
 věta o zachování souvislosti spojitým zobrazením, 54
 věta o změně orientace křivky, 180
 věta o výpočtu integrálu plošného funkce vektorové, 221
 věta Pythagorova prostoru unitárního, 40
 věta Schwarzova, 96
 věta Schwarzova zobecněná, 96
 věta Steinerova, 159
 věta Stokesova, 186, 229, 233
 věta Sylvestrova pro ostrý lokální extrém $f(X)$, 126
 věta Sylvestrova pro ostrý lokální extrém $f(x, y)$, 126
 věta Taylorova, 119
 věta termodynamiky II., 185
- věta Weierstrassova 1. a 2., 36, 75
 věta zobecněná o záměnnosti derivací, 117
 věty Guldinovy, 217
 věty o funkcích spojitých, 74
 věty o vlastnostech integrálu plošného, 215
 věty o vlastnostech integrálu, 150
 věty o vlastnostech integrálu křivkového, 178
 Vivianiho okno, plocha, křivka, 194
 vlastnost skoro všech bodů, 150
 vlastnost topologická, 30, 71, 107
 vlastnosti integrálu, 150
 vlastnosti integrálu křivkového, 178
 vnějšek
 množiny, 49
 uzavřené křivky, 183
 uzavřené plochy, 212
 vnitřek
 listu, 193, 198
 množiny, 49, 124, 142, 144, 153
 uzavřené křivky, 107, 152, 183
 uzavřené plochy, 212
 vrstevnice, 112
 vrstevnice funkce, 59, 104
 výběr reprezentantů, 147, 219
 výseč kulová, 169
 výška závitů, 189
 vzdálenost bodu od množiny, 50
 vzdálenost množin, 50
 vzdálenost polární, 158
 vzor množiny, 63, 68, 204
 vzorec
 Eulerův, 39
 Gaussův-Ostrogradského, 225
 Greenův, 183
- Maclaurinův, 120
 Stokesův, 229
 Taylorův, 119
 Torricelliův, 136
- zákon antikomutativní, 27
 zákon Archimedův, 228
 zákon Fourierův, 227
 zákon komutativní, 15
 zákon kontrapozice, 157
 zákon Pascalův, 228
 zákon termodynamiky II., 185
 zaměření prostoru, 18, 31
 zaměření roviny tečné, 196
 zobrazení
 afinní, 202
 bodové, 55
 difeomorfní, 157
 hladké, 196
 homeomorfní, 203
 homeomorfní (topologické), 30, 71, 72
 inverzní, 63
 izometrické, 32, 193
 kontrakce, 64
 lineární, 64, 202
 prodloužitelné spojitě, 171
 prosté (injektivní), 155, 157
 regulární, 156
 složené, 65
 spojitě, 54, 68, 156, 171
 spojitě na množině, 68
 spojitě v bodě vzhledem k množině, 69
 třídy C^1 , 156
 typu (n, m) , 62
 vzájemně jednoznačné, 157
 zúžení funkce, 65, 86, 87, 100, 119, 134, 143, 192
 zúžení zobrazení, 30, 65, 197